7. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Собр. соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. Т. 1. С. 57–75.
8. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1980. Вып. 12. С. 3–8.
9. *Харламов М.П.* О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1981. Вып. 13. С. 10–14.
10. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 3. С. 92–100.
11. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. II // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 4. С. 70–76.
12. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. III // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 3. С. 102–111.
13. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. IV. Интегральные принципы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 5. С. 76–83.
14. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. V. Принцип освобождаемости и условие идеальности связей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1988. № 6. С. 51–54.
15. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
16. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
17. *Пуанкаре А.* Идеи Герца в механике // Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 310–333.
18. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
19. *Даламбер Ж.* Динамика. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 344 с.
20. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
21. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
22. *Чаплыгин С.А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 15–25.
23. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
24. *Гернет М.М.* Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1987. 344 с.
25. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
26. *Фуфаев Н.А.* О возможности реализации неголономной связи посредством сил вязкого трения // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 513–515.
27. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
28. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Донецк

Поступила в редакцию
7.XII.1988

УДК 531.36

© 1992 г. **В.В. Козлов**

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИКЕ

Рассматриваются задачи, связанные с предельным переходом в уравнениях Лагранжа второго рода, когда коэффициенты жесткости, вязкости и присоединенные массы устремляются к бесконечности. При определенных условиях решения исходных уравнений стремятся к решениям предельной задачи со связями. Для интегрируемых связей предельные уравнения совпадают с обычными уравнениями со множителями связей. В случае неинтегрируемых связей ответ существенно зависит от способа их реализации. Обсуждаются обобщенные модели динамики систем с неинтегрируемыми связями и свойства предельных уравнений движения.

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – обобщенные координаты механической системы, T – ее кинетическая энергия, $F_1, \ldots, F_n$ – обобщенные силы. Если система является "свободной" (т.е. координаты x и скорости $x^\cdot$ не связаны каким-либо нетривиальным соотношением), то ее движения описываются уравнениями Лагранжа

$$[T] = F \tag{1.1}$$

где $[f]$ – вариационная производная $(\partial f/\partial x^\cdot)^\cdot - \partial f/\partial x$.

Если имеется связь $\Phi(x^{\cdot}, x, t) = 0$ (в приложениях функция Φ линейна по $x^{\cdot}$), то уравнения (1.1) обычно заменяются более общими:

$$[T] = F + \lambda \partial\Phi/\partial x^{\cdot}, \quad \Phi = 0, \tag{1.2}$$

где λ – пока неопределенный множитель. Пусть $\partial\Phi/\partial x^{\cdot} \neq 0$. Тогда, не решая уравнений (1.2), множитель λ можно представить в виде явной функции от $x^{\cdot}$, x, t.

Уравнения (1.2) эквивалентны принципу Даламбера–Лагранжа:

$$([T] - F)\,\delta x = 0, \quad \Phi = 0 \tag{1.3}$$

где возможные перемещения δx удовлетворяют уравнению

$$(\partial\Phi/\partial x^{\cdot})\,\delta x = 0 \tag{1.4}$$

При построении неголономной динамики обычно исходят из принципа Даламбера–Лагранжа. Некоторые авторы (Гаусс, Пуансо, Якоби, Кирхгоф и др.) рассматривали принцип Даламбера–Лагранжа как самостоятельный принцип, доказывать который не нужно (см. [1, 2]). Однако при традиционном способе изложения динамики этот принцип доказывается с помощью принципа освобождаемости и аксиомы идеальности связи. Принцип освобождаемости утверждает, что систему со связью можно считать свободной, но к внешним силам F надо добавить еще реакцию связи

$$R = [T] - F \tag{1.5}$$

Аксиома идеальности связи выражается равенством

$$R\delta x = 0 \tag{1.6}$$

Соотношения (1.5) и (1.6) вместе с уравнением связи $\Phi = 0$ эквивалентны, конечно, (1.3). Однако сами по себе уравнения (1.3) без уравнения (1.4), задающего возможные перемещения, не определяют однозначно уравнений движения. Поэтому при таком способе построения динамики в число аксиом следует включить определение возможных перемещений. Эта аксиома независима от аксиом (1.5) и (1.6). Действительно, в теории систем с сервосвязями [3] выполнены соотношения (1.5) и (1.6), но уравнения для возможных перемещений отличаются от (1.4).

Неголономные уравнения (1.2) ковариантны: все входящие в него слагаемые преобразуются при заменах обобщенных координат по ковариантному закону. Простое, но важное свойство ковариантности гарантирует математическую непротиворечивость физической модели. Пример противоположного рода – "модель Линделефа", введенная П.В. Харламовым [4]: движения системы зависят от способа исключения циклических скоростей в функции Лагранжа. Вот простой пример: пусть $L = (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2})/2$ – функция Лагранжа, а $x^{\cdot}\sin z = y^{\cdot}\cos z$ – уравнение неинтегрируемой связи. Координаты x, y – циклические. Исключая циклическую скорость $y^{\cdot}$ и записывая уравнения Лагранжа с лагранжианом $(z^{\cdot 2} + x^{\cdot 2}\cos^{-2} z)/2$, получаем, что почти всегда координата x неограниченно возрастает с ростом t. Наоборот, исключая циклическую скорость $x^{\cdot}$, решая уравнения Лагранжа с лагранжианом $(z^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}\sin^{-2} z)/2$ и интегрируя затем соотношение $x^{\cdot} = y^{\cdot}\operatorname{ctg} z$, получаем, что для почти всех начальных данных координата x ограничена. Следовательно, "модель Линделефа" внутренне противоречива, и поэтому вообще некорректно ставить вопрос о ее сопоставлении с данными экспериментов. Отметим, что сам Линделеф не занимался построением новых моделей движения; им допущена ошибка при выводе неголономных уравнений из принципа Даламбера – Лагранжа.

Вопрос о применимости неголономной модели (впрочем, как и любой другой модели механики систем со связями) в конкретной ситуации невозможно решить в рамках аксиоматической схемы без привлечения экспериментальных данных. Например, нельзя утверждать априори, что в задаче о качении твердого тела без проскальзывания неинтегрируемые связи идеальны. Дело в том, что помимо силы трения скольжения (не совершающей работы при качении тела) в действительности всегда присутствуют силы трения качения и верчения (работа которых на возможных перемещениях твердого тела в общем случае отлична от нуля). Напротив, мы уверены в том, что если имеется лишь одна сила кулонова трения скольжения, то при стремлении коэффициента сухого трения к бесконечности твердое тело при всех начальных данных (совместимых со связями) будет совершать качение в соответствии с неголономными уравнениями. Для однородного бильярдного шара этот результат вытекает из классических работ Эйлера и Кориолиса (см. [5]). Были получены [6, 7] и более общие результаты о реализуемости неголономных связей силами кулонова трения.

2. Формально-аксиоматический метод обоснования динамики систем со связями (о котором шла речь в разд. 1) имеет очевидные недостатки: остается непроясненным происхождение исходных аксиом (например, аксиомы возможных перемещений (1.4)), а также остаются неопределенными границы применимости теоретической модели. С этой точки зрения более предпочтительным выглядит "конструктивный" подход к теории систем со связями, основанный на анализе физических способов реализации связей. Его основная идея состоит в выполнении предельного перехода в "полных" уравнениях движения свободной системы, когда некоторые физические параметры системы (коэффициенты жесткости, вязкости, присоединенные массы) устремляются к бесконечности.

Надо ясно сознавать, что на самом деле в природе нет связей как таковых: они вводятся с целью упрощения сложной физической картины взаимодействия. Конструктивный метод позволяет на основе анализа механизма этого взаимодействия предложить упрощенную математическую модель, адекватно описывающую движение механической системы.

Основные идеи конструктивного подхода намечены в работах Лекорню, Клейна и Прандтля, посвященных известным парадоксам сухого трения, обнаруженных Пенлеве (см. [8]). Твердые тела, фигурировавшие в модельных задачах Пенлеве, было предложено заменить упругими телами с большими модулями упругости (что, кстати сказать, больше отвечает действительности). После такой замены исчезали явления, связанные с неединственностью и несуществованием решений уравнений движения. Затем модуль упругости устремлялся к бесконечности. Как правило, в результате такого предельного перехода получаются движения системы с абсолютно твердыми телами. Однако в задачах Пенлеве предела не существует, что свидетельствует о некорректности использования в этих случаях модели твердого тела.

Общая теорема о реализации голономных (интегрируемых) связей с помощью поля упругих сил с большим модулем упругости была высказана Курантом и позднее доказана [9].

Задача о реализации неинтегрируемых связей посредством сил вязкого трения поставлена Каратеодори [10]. Им рассмотрена задача о скольжении конька по льду под действием добавочной силы $-Nv$, где $N=\mathrm{const}>0$, v – проекция скорости точки контакта на направление, ортогональное плоскости лезвия. Было показано [11], что при $N\to\infty$ движения такой системы стремятся к движениям конька с неголономной связью: скорость точки касания лежит в плоскости лезвия.

Как обобщение результатов [10, 11] на многомерный случай рассматривалось [12–14] движение системы под действием дополнительных сил вязкого трения с диссипативной функцией Релея $N\Phi^2/2$. Уравнения движения имеют вид

$$[T]=F-N\Phi\partial\Phi/\partial x^{\cdot} \tag{2.1}$$

Если силы F потенциальны $(F=-\partial V/\partial x)$, то $(T+V)^{\cdot}=-N\Phi^2$. Поэтому энергия не рассеивается на движениях, удовлетворяющих уравнению $\Phi=0$. Однако в общем случае система (2.1) может не иметь таких движений при конечных значениях N. Трение, задаваемое функцией Релея $N\Phi^2/2$, часто называют анизотропным.

Оказывается, что при $N\to\infty$ решения системы (2.1) с фиксированными начальными данными на любом конечном промежутке времени $0<t<\tau$ стремятся к решениям неголономных уравнений (1.2). Начальные данные могут не удовлетворять уравнению связи $\Phi=0$, поэтому из-за наличия пограничного слоя сходимость решений системы (2.1) при $N\to\infty$ к решениям (1.2) не является равномерной в интервале $(0,\tau)$. Эта теорема о предельном переходе доказывается методами теории сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений.

3. Предельный переход к бесконечности по вязкости не является единственным, приводящим систему к движению по связи. Была рассмотрена [15] более общая задача о движении свободной механической системы с кинетической энергией

$$T_N=T+\alpha N\Phi^2/2,\qquad \alpha=\mathrm{const}\geqslant 0$$

на которую, помимо обобщенных сил F, действуют анизотропные вязкие силы с диссипативной функцией Релея $\beta N\Phi^2/2$, $\beta=\mathrm{const}\geqslant 0$. Движение описывается системой уравнений

$$[T_N]=F-\beta N\Phi\partial\Phi/\partial x^{\cdot} \tag{3.1}$$

Если Φ – линейная однородная форма по скоростям, то при всех $N\geqslant 0$ функция T_N – положительно определенная квадратичная форма по $x^{\cdot}$. Коэффициент αN имеет смысл присоединенной массы (или момента инерции). При больших значениях N система с кинетической энергией T_N обладает сильной анизотропией тензора инерции: для движений с одной и той же по величине скоростью кинетическая энергия системы существенно зависит от направления движения. Классическим примером является задача о движении твердого тела в жидкости.

Положим $\Phi=(a(x),x^{\cdot})$ и будем считать, что $a\neq 0$. Пусть $\alpha>0$ (случай $\alpha=0$ уже рассмотрен в разд. 2).

Теорема 1. Пусть $x_N(t)$ – решение системы (3.1) с начальными данными

$$x_N(0)=x_0,\quad \dot{x}_N(0)=v_0+w_0/N \tag{3.2}$$

причем $(a(x_0),v_0)=0$ и x_0,v_0,w_0 не зависят от N. Тогда на каждом конечном промежутке времени $0\leqslant t\leqslant\tau$ существует

$$\lim_{N\to\infty} x_N(t)=x(t)$$

причем предельное движение $x(t)$ вместе с некоторой функцией $\lambda(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$[T] = F - \alpha\lambda^{\cdot}\partial\Phi/\partial x^{\cdot} - \alpha\lambda[\Phi] - \beta\lambda\partial\Phi/\partial x^{\cdot}, \qquad \Phi = 0 \tag{3.3}$$

и начальным данным

$$x(0) = x_0, \qquad x^{\cdot}(0) = v_0, \qquad \lambda(0) = (a(x_0), w_0)/\alpha \tag{3.4}$$

Механический смысл множителя λ ясен из следующего предельного соотношения:

$$\alpha\lambda(t) = \lim_{N\to\infty} N(a(x_N(t)), x^{\cdot}_N(t)) \tag{3.5}$$

При $\alpha = 0$ уравнения (3.3) совпадают с обычными неголономными уравнениями (1.2). Пусть связь $\Phi = 0$ интегрируема: $\Phi = f^{\cdot}(x)$. Тогда $[\Phi] = 0$ и уравнения (3.3) будут описывать движение голономной системы в избыточных координатах x. Однако, если связь $\Phi = 0$ неинтегрируема, то при $\alpha \neq 0$ уравнения (3.3) отличаются от уравнений (1.2).

Теорема 1 была впервые установлена ([16], II) в частном случае $\beta = 0$. Математическая модель движения систем со связями, основанная на уравнениях (3.3) (в которых положено $\beta = 0$), названа [16] "вакономной механикой".

В частном случае движений по инерции (когда $F = 0$) вакономные уравнения были известны Герцу [17] (на самом деле их впервые получил Лагранж в связи с задачами вариационного исчисления). Герц называл траектории вакономных движений геодезическими путями, а обычные неголономные траектории – прямейшими путями. Им же было отмечено различие неголономных и вакономных траекторий в задаче о бильярдном шаре. Так что вычисления из разд. 3 статьи П.В. Харламова [4] ничего нового не добавляют к наблюдению Герца. К тому же этот анализ неполон и соответствующие выводы ошибочны: среди вакономных движений бильярдного шара содержатся все его неголономные движения (достаточно положить постоянные интегрирования κ, ϵ равными нулю). Обратное, конечно, неверно.

Причина такого явления состоит в том, что при качении однородного шара реакции связи обращаются в нуль. Впрочем, это замечание носит формальный характер, поскольку (как видно из теоремы 1) вакономная модель не имеет прямого отношения к задаче о качении твердого тела; об этом было ясно сказано ([16] (III), с. 110).

Герц считал, что реальные системы со связями движутся по прямейшим путям, а не по геодезическим. Его аргументация весьма примечательна: "...шар, который двигается в соответствии с упомянутым принципом (Гамильтона – В.К.), был бы чрезвычайно похож на живое существо, которое целеустремленно двигается к определенному положению, в то время как рядом с ним шар, подчиняющийся закону природы, произвел бы впечатление мертвой, равномерно перекатывающейся массы" ([17], с. 35).

Уравнения (3.3) ковариантны и универсальны: их можно записать для любой системы со связью. Теоретические условия применимости этих уравнений дает теорема 1. Например, если связи возникают из-за анизотропии инерционных свойств системы ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$), то с теоретической точки зрения в этом случае естественно воспользоваться вакономной моделью, если же связи возникают из-за наличия анизотропного трения ($\alpha = 0$, $\beta \neq 0$), то движение системы со связью описывается в рамках классической неголономной модели (ср. с [16] (III), с. 110).

Как видно из (3.3), неголономная и вакономная модели являются крайними случаями некоторой одной более общей математической модели движения систем со связями. Она включает постоянную $k = \alpha/\beta$ (имеющую размерность времени), для определения которой следует привлекать экспериментальные данные.

В случае движения по инерции ($F = 0$) постоянная k имеет простой геометрический смысл: она характеризует отклонение геодезической кривизны траекторий системы (3.3) от кривизны прямейших (по Герцу) путей – неголономных траекторий. Чтобы это показать, введем вектор ускорения w с компонентами

$$x_i^{\cdot\cdot} + \sum_{j,l} \Gamma_i^{j,l} x_j^{\cdot} x_l^{\cdot}$$

где $\Gamma_i^{j,l}$ – символы Кристоффеля римановой метрики, задаваемой кинетической энергией T. Пусть неинтегрируемая связь описывается уравнением $(a, x^{\cdot}) = 0$ и $2T = (A(x)x^{\cdot}, x^{\cdot})$. Исключая $\lambda^{\cdot}$ из системы (3.3) при помощи уравнения связей, можно получить вектор ускорения

$$w = \lambda(-\beta A^{-1}a + \alpha A^{-1}c) \tag{3.6}$$

$$c = \frac{(A^{-1}b, a)}{(A^{-1}a, a)}a - b, \qquad b = \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^T\right)x^{\cdot}$$

Так как $(A^{-1}a, c) = 0$, то из (3.6) получаем геодезическую кривизну

$$|w|^2 = \lambda^2(\beta^2|a|^2 + \alpha^2|c|^2) \qquad (3.7)$$

Здесь $|w|^2$, $|a|^2$, $|c|^2$ – квадраты длин векторов w, $A^{-1}a$, $A^{-1}c$ во внутренней метрике T.

Сравним геодезические кривизны траекторий системы (3.3) с разными значениями k, но с одними и теми же начальными данными для x, $x^{\cdot}$, λ. Поскольку при $\alpha = 0$ значение $\beta\lambda$ однозначно выражается через x, $x^{\cdot}$ (разд. 1), то формулу (3.7) естественно переписать в виде

$$|w|^2 = (\beta\lambda)^2(|a|^2 + k^2|c|^2) \qquad (3.8)$$

где $\beta\lambda$, $|a|$, $|c|$ – известные функции от x, $x^{\cdot}$. Если w_* – ускорение неголономного движения в том же состоянии $(x, x^{\cdot})$, то

$$|w|^2 - |w_*|^2 = (\beta\lambda)^2 k^2 |c|^2$$

Для интегрируемых связей $c = 0$ и поэтому $|w|^2 = |w_*|^2$. Однако в общем случае, когда связь неинтегрируема, $c \neq 0$. Отметим, что неравенство $|w|^2 \geqslant |w_*|^2$, вытекающее из (3.8), представляет принцип наименьшей кривизны Гаусса – Герца [17].

4. П.В. Харламов в [4] неверно представил смысл работ [15, 16], в которых будто бы предлагается заменить классическую неголономную модель вакономной моделью. Однако в указанных работах нигде этого нет. Напротив, уже в самой первой работе цикла [16] (I–II) доказана теорема о предельном переходе (когда $\beta = 0$) и тем самым указаны условия применимости вакономной модели связанные с анизотропией тензора инерции системы. Основной результат статьи П.В.Харламова [4] заключается в следующем: на трех конкретных примерах показано различие решений неголономных и вакономных уравнений движения и на этом основании сделан вывод о неприемлемости вакономной модели. Однако, во-первых, на это различие было указано еще в работах Герца, Гельдера, Суслова (современный анализ см. [18]), а во-вторых, П.В. Харламов игнорирует физические условия применимости вакономной модели.

Рассмотрим эти примеры более подробно.

В разд. 3 решается вакономная задача о качении бильярдного шара. Однако эти вычисления не имеют никакого отношения к реальной динамике, поскольку отсутствие проскальзывания осуществляется за счет сил вязкого или сухого трения, а не за счет эффекта присоединенных масс.

В разд. 6 обсуждается задача о скольжении конька на льду с точки зрения вакономной модели. Здесь неинтегрируемая связь (скорость точки контакта лежит в плоскости лезвия конька) осуществляется за счет боковой силы, а не за счет анизотропии тензора инерции. Поэтому динамика этой системы описывается классическими неголономными уравнениями (см. [10, 11]). Был указан ([16], III) иной физический способ реализации той же неинтегрируемой связи, основанный на эффекте присоединенных масс. Рассматривалось плоскопараллельное движение твердого тела (имеющего плоскость симметрии) в безграничном объеме идеальной жидкости в постановке Кирхгофа. Кинетическая энергия системы "тело плюс жидкость" приводится к виду

$$T = (a_1u^2 + a_2v^2 + b\omega^2)/2$$

где u, v – компоненты скорости некоторой точки тела в подвижном пространстве, ω – его угловая скорость. Из-за эффекта присоединенных масс $a_1 \neq a_2$. Было показано ([16] III), что за счет изменения формы тела можно устремить массу a_2 к бесконечности, при этом a_1, b стремятся к конечным пределам. Согласно теореме 1 (где надо положить $\beta = 0$), при $a_2 \to \infty$ движение такого тела подчиняется неинтегрируемой связи $v = 0$ (как в задаче о коньке на льду) и описывается вакономными (а не неголономными) уравнениями. "Причудливый след конька", изображенный на фиг.4 статьи П.В. Харламова [4], – одна из траекторий предельной гидродинамической задачи.

При больших, но конечных значениях a_2, скорость v в общем случае отлична от нуля. Однако она тем меньше, чем больше a_2, и движение такого тела сколь угодно мало отличается от вакономного. Следует иметь в виду, что движение реального конька по льду на самом деле также отличается от неголономного (из-за сопротивления вращению конька со стороны льда).

Наконец, была рассмотрена [4] задача Суслова о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, стесненного нескручиваемой нитью. По Суслову, наличие такой нити осуществляет вращение твердого тела с неголономной связью: обращается в нуль проекция угловой скорости на некоторое в теле направление l. Заметим сначала, что на самом деле нить вообще не препятствует вращению тела вокруг оси l. Так что реализация связи, предложенная Сусловым, некорректна. На это обстоятельство, по-видимому, впервые обратил внимание Г.К. Пожарицкий.

Корректная реализация неголономной связи Суслова была предложена Вагнером [19]. Она использует эффект качения без скольжения и поэтому вращение тела (в реализации Вагнера) описывается неголономными уравнениями. Была предложена ([16], II) другая реализация той же связи ($\omega_l = 0$). Тело помещается в идеальную жидкость и к нему прикрепляется эллиптическая пластинка, центр которой совпадает с точкой подвеса, а ось l направлена вдоль малой оси. Если теперь удлинять пластинку, не меняя ее площади, то присоединенный момент инерции тела относительно оси l будет стремиться к бесконечности, а остальные присоединенные моменты – к нулю. Следовательно, согласно теореме 1 в пределе тело вращается в соответствии с вакономными уравнениями и удовлетворяет уравнению связи $\omega_l = 0$.

Имеется изящное геометрическое представление Пуансо: эллиптическая пластинка, являющаяся сечением эллипсоида инерции плоскостью, ортогональной l, катится без скольжения по некоторой неподвижной плоскости, ортогональной суммарному кинетическому моменту системы "тело плюс жидкость", вычисленному относительно точки закрепления. Подчеркнем еще раз, что вопреки утверждению П.В. Харламова [4] (введение, разд. 6) в работах [15, 16] нигде не предполагалось описывать вакономными уравнениями скольжение конька по льду и вращение твердого тела с нескручиваемой нитью.

П.В. Харламов [4] выдвигает и отстаивает тезис о том, что когда вводится связь (математически задаваемая некоторым уравнением), то тем самым уже отражено "существенное в изучаемом явлении".

Таким образом, по П.В. Харламову, динамика системы со связями однозначно определяется заданием ее инерционных свойств (кинетической энергии), обобщенных сил и уравнений связи. Ошибочность этого тезиса опровергается теорией сервосвязей Бегена [3]. Сервосвязи осуществляются "активно" при помощи автоматически регулируемых воздействий и при анализе движения механических систем с сервосвязями нельзя отвлечься от физического способа их осуществления. То же относится и к теории управляемых систем: имеются различные способы описания скользящих режимов на границах разрыва, зависящие от механизма переключения [20].

Неприемлемость тезиса П.В. Харламова особенно отчетливо видна на примере динамики систем с ударами, ибо получается, что закон отражения определяется лишь уравнением односторонней связи. Однако это не так: имеются различные модели удара (абсолютно упругий и неупругий удары, гипотеза Ньютона и т.д.), зависящие от физических свойств соударяемых тел. На самом деле удар происходит не мгновенно, а в течение короткого промежутка времени осуществляется деформирование тел, сопровождающееся рассеянием энергии. Можно показать, что при надлежащем согласованном стремлении к бесконечности модуля упругости и коэффициента вязкости движение свободной системы стремится к движению с ударом, причем предельная модель существенно зависит от соотношения между физическими параметрами задачи [21].

С этой точки зрения основной вывод из работ [15, 16] заключается в том, что и при "пассивной" реализации неинтегрируемых связей динамика предельной (упрощенной) системы существенно зависит от физического способа реализации связей.

5. П.В. Харламов утверждает ([4], разд. 3), что множители λ не имеют механического смысла и поэтому "нет никаких рациональных предпосылок для назначения им конкретных отвечающих задаче начальных условий". Это неверно. Механический смысл множителя λ ясен из соотношения (3.5). Например, в вакономном варианте задачи Суслова (разд. 4) λ имеет смысл кинетического момента системы "тело плюс жидкость" относительно оси l. Начальное значение λ дается формулой (3.5). В частности, если начальные данные $x_0, x_0^{\cdot}$ удовлетворяют уравнению связи, то $\lambda_0 = 0$.

Итак, начальное значение для λ можно вычислить в "допредельной" задаче, когда $N \neq \infty$. Однако, можно поступить по-другому. Зная положение системы в два близкие момента времени, можно найти начальные данные $x_0, x_0^{\cdot}, \lambda_0$ и тем самым однозначно выделить искомое решение. Отметим, что в отличие от вакономной модели в неголономной механике краевая задача почти всегда неразрешима.

Теорема 1 прозрачно объясняет причину нарушения классического принципа детерминированности, когда $\alpha \neq 0$. Действительно, при $N \to \infty$ начальные данные $x_0, x_0^{\cdot}$ (3.2) одни и те же, однако предельные движения $\lim\limits_{N\to\infty} x_N(t)$ будут разными. В "допредельной" системе различие начальных данных на малую величину порядка N^{-1} порождает на временах $t \sim 1$ конечные отклонения решений. Принцип "малые причины – большие следствия" – фундаментальный механизм квазислучайного поведения детерминированных динамических систем (см., например, [22]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: Главн. ред. общетехн. лит. 1936. 271 с.
2. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 402 с.
3. *Беген А.* Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. М., 1967. 171 с.
4. *Харламов П.В.* Неприемлемость некоторых математических моделей механических систем с дифференциальными связями // ПММ. 1991. Т. 56. Вып. 4. С. 683–692.

5. *Кориолис Г.* Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
6. *Новожилов И.В.* Условия застоя в системах с кулоновым трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 8–14.
7. *Калинин В.С., Новожилов И.В.* О необходимых и достаточных условиях реализации неголономных связей силами кулонова трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 15–19.
8. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
9. *Rubin H., Ungar P.* Motion under a strong constraining force // Communs. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 67–87.
10. Caratheodory C. Der Schlitten // Z. Angew. Math. und Mech. 1933. B. 13. H.2. S. 71–76.
11. *Фуфаев Н.А.* О возможности реализации неголономной связи посредством сил вязкого трения // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 513–515.
12. *Khmelevski I., Plotnikova G.* Sur une équivalence de modeles mathématiques des liasons en méchanique analytique // Ann. Soc. Sci. Bruxtlles. Ser. 1. 1976. V. 90. № 1. P. 15–23.
13. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 45–51.
14. *Бренделев В.Н.* О реализации связей в неголономной механике // ПММ. 1981. Т. 45. № 3. С. 481–487.
15. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
16. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I–V // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механ. 1982. № 3. С. 92–100; 1982. № 4. С. 70–76; 1983. № 3. С. 102–111; 1987. № 5. С. 76–83; 1988. № 6. С. 51–54.
17. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
18. *Румянцев В.В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.
19. *Вагнер В.В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. 1941. Вып. 5. С. 301–327.
20. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
21. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
22. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
26. XII. 1991

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В разд. 3 моей статьи "Безударное сжатие баротропного газа", (ПММ, 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 769–779) имеется ошибка в выкладках на с. 774. В формуле (3.5) букву μ следует заменить на степень сжатия s. Формула для μ в (3.6) не нужна. После этого меняется формула (3.7) на $\eta \sim 1$, а в формуле (3.8) показатель степени $2(\gamma - 1)$ должен быть изменен на $\gamma - 1$. Такая корректировка формул меняет вывод о большом выигрыше в затратах энергии при малых степенях сжатия. При слабых степенях сжатия выигрыш при оптимальном способе управления несуществен. При больших же степенях сжатия вывод остается прежним, но количественная оценка для η уменьшается. Так, при $\gamma = 3$ имеем $\eta \sim 2$, а при $\gamma \to \infty$ будет $\eta \to {}^1/_3 e^2$. Конечно, неверны графики на фиг. 3. На последующие результаты, приведенные в статье, ошибка влияния не оказывает.

Выражаю признательность Я.М. Каждану, обнаружившему и указавшему мне на эту ошибку. Пользуясь случаем, хочу привести ссылку на работу Я.М. Каждана "К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня" (ПМТФ, 1977. Т. 1. С. 23–30), в которой получено автомодельное решение о безударном сжатии газового шара, имеющее прямое отношение к рассматриваемой в моей статье проблеме, но отсутствующую в списке литературы.

А.Ф. Сидоров
2.IV.1992