УДК 531.36

© 1992 г. П.В. Харламов

КРИТИКА НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Предлагаемые теории изучаемого явления, включающие и его математическую модель, неприемлемы, если они не удовлетворяют известным критериям (см., напр., [1], с. 14, [2], с. 190–196). Объективный критерий *правильности* требует, чтобы получаемый при использовании математической модели прогноз хода явления с принятой точностью совпадал с данными наблюдений[1]. Остающихся в пределах принятой точности правильных теорий может быть несколько[2]. В практическом использовании исследователь предпочтет ту из них, которая ему представляется более *простой*[3].

Курант, заключая свой очерк ([6], с. 27), подчеркивает известное принципиальное отличие постановок и целей исследований математика и ученого, решающего прикладную задачу. Для математика единственным критерием приемлемости теории является ее логическая *непротиворечивость*. Стремление к общности теории несовместимо с требованием простоты ее. А поскольку объект исследований математика – свойства математических соотношений, то, даже в тех случаях, когда эти соотношения возникли, например, в механике, их обычно рассматривают в абстрактных обобщениях, и правильность (в указанном смысле) не обсуждают.

Однако, если такое исследование претендует на прикладное значение, то, разумеется, оно должно удовлетворять критериям правильности и простоты. И в ряде случаев обнаруживается неприемлемость математической конструкции для практического использования.

Это утверждение продемонстрировано здесь на моделях Линделефа и Козлова.

Как известно, конечная связь может быть учтена уже при составлении функции Лагранжа. Решая задачу о качении тела вращения по горизонтальной плоскости, Линделеф применил этот прием и к дифференциальной связи. Назовем для определенности его конструкцию *моделью Линделефа* (хотя так поступали и до, и после него). Значение его публикации в том, что она привлекла внимание Чаплыгина к этой проблеме [7]. Отметив, что "при самом выводе дифференциальных уравнений Линделеф допустил важную ошибку, вследствие которой найденные им уравнения оказались проще истинных", Чаплыгин из начала Даламбера выводит свои уравнения, носящие теперь его имя, что придало исследованию значение, существенно превышающее успех решения конкретной задачи. Но саму эту задачу Чаплыгин решает, не обращаясь к своим уравнениям, а вводя реакции плоскости, использует общие теоремы динамики о количестве и моменте количества движения. Отмечая, что сам он свел задачу "к квадратурам лишь в том случае, когда оказывается приводимым . . . основное линейное дифференциальное уравнение второго порядка", Чаплыгин противопоставляет свой результат результату Линделефа, который "казалось бы решает задачу . . . в полном объеме", сводя "все к выполнению некоторых квадратур". Из этого принципиального различия аналитических форм представления конечных результатов Чаплыгин заключает, что "успех" Линделефа лишь "кажущийся".

Хотелось бы, однако, увидеть, как эти различия проявляются в движениях тел, прогнозируемых моделями Чаплыгина и Линделефа. Используя современные методы геометрического представления движения тел [8, 9], можно получить в наглядной форме информацию о всех его особенностях. Но наличие набора свободных параметров потребовало бы немалой работы по классификации и анализу возможных форм движения и установлению отличий их в сопоставляемых моделях. Непроста и экспериментальная проверка. Между тем, имеется объект, движение которого общеизвестно. Это однородный шар, катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости. Распространенные игры (кегли, бильярд и др.) основаны на возможности определенного предвидения игроком

---

[1] Мы должны требовать, чтобы применение предлагаемой математической модели "к задаче с приблизительно точными условиями всегда давало бы приблизительно точные результаты, но не совершенно неверные" ([1], с. 36).

[2] Фейнман утверждает: "каждый приличный физик-теоретик знает шесть или семь теоретических обоснований одних и тех же физических фактов. Он знает, что они эквивалентны и что никто никогда не сможет решить, оставаясь на этом же уровне, какая из этих теорий верна" ([3], с. 186).

[3] В.В. Новожилов: "Когда возникает какая-либо новая проблема, прежде всего создается ее грубая модель. Она проверяется опытами (если таковые ей не предшествовали) и уже потом создаются все более совершенные модели по мере того, как в них возникает необходимость" ([4], с. 361). Г. Кирхгоф выдвигает требование простоты теории уже в начале своей первой лекции ([5], с. 5), подчеркивая тем самым значение этого критерия в естественных науках.

движения однородного шара, получившего начальный импульс. Можно полагать это движение настолько известным, что будет признан обоснованным выполненный посредством этого объекта отбор математических моделей по критерию правильности ([2], с. 191). Именно так в настоящей работе установлена неправильность модели Линделефа, а значит, и неприемлемость ее в механике.

К такому же заключению приводит и анализ модели Козлова, пытавшегося распространить принцип Гамильтона на механические системы с неинтегрируемыми дифференциальными связями [10–16]. Возможность этого отвергал еще Герц: "Применение принципа Гамильтона к какой-либо материальной системе не исключает того, чтобы между выбранными координатами этой системы существовали жесткие связи, но оно требует все же, чтобы эти связи могли быть выражены математически при помощи конечных уравнений между координатами. Появление таких связей, которые могут быть выражены математически только посредством дифференциальных уравнений, недопустимо . . . К таким случаям принцип Гамильтона неприменим, или, выражаясь точнее, математически возможное применение принципа приводит к физически ложным результатам" ([1], с. 34). То же заключает и Пуанкаре ([17], с. 328). Иллюстрируя эти утверждения простейшим примером – качением без скольжения по инерции шара по горизонтальной плоскости, и Герц, и Пуанкаре обходятся без математических выкладок, ограничиваясь качественными суждениями кинематического характера. К динамическим уравнениям обратился Г.К. Суслов ([18], с. 362–363), рассматривая движение материальной частицы, он доказывает, что "принцип Гамильтона не прилагается к системам, подчиненным неинтегрируемым связям", так как получаемые на его основе уравнения отличны от соответствующих уравнений механики Ньютона.

Но если от формируемой теории не требовать правильности и простоты, ограничиваясь лишь требованием непротиворечивости ее, то, разумеется, вполне возможно создать мыслимую математическую конструкцию некой системы, основываясь на принципе Гамильтона и вводя некоторые соотношения в роли дифференциальных неинтегрируемых связей. Так и поступает В.В. Козлов. Однако он при этом не полагает свою конструкцию лишь чисто математической, а, напротив, считает ее "естественной" [10, с. 82], утверждает, что его "ваконома динамика, являясь внутренне непротиворечивой моделью, *применимой к описанию л ю б ы х механических систем* (курсив и разрядка мои – П.Х.), так же "истинна", как и традиционная неголономная механика" ([12], с. 110), и в соответствии с этим утверждением он применяет ее к классическим механическим системам с дифференциальными неинтегрируемыми связями – саням Чаплыгина (в одном случае упрощая рассматриваемый объект ([10], с. 99), в других – усложняя его (12], с 106–109; [15], с. 552–553) и объекту задачи Суслова ([11], с. 75–76, [15], с. 553–554). В этих примерах он ограничивается получением аналитических зависимостей (в основном приближенных) и не доводит их до необходимой в механике формы, требующейся для сопоставления найденных при вычислениях "движений" с наблюдаемыми (или хотя бы – ожидаемыми) даже в тех случаях, когда это несложно было осуществить.

Если модель В.В. Козлова "применима к описанию любых механических систем", казалось бы естественным применить ее к объекту, движение которого общеизвестно и часто наблюдаемо, а именно, – к однородному шару, катящемуся по инерции без скольжения по горизонтальной плоскости. Но В.В. Козлов этого не делает, возможно из-за реплики Г. Герца: "шар, который движется в соответствии с упомянутым принципом (принципом Гамильтона, П.Х.), был бы чрезвычайно похож на живое существо . . . в то время как рядом с ним шар, подчиняющийся закону природы, произвел бы впечатление мертвой, равномерно перекатывающейся массы" ([1], с. 35).

Вопреки заключением Герца, Пуанкаре и Суслова В.В. Козлов все же предлагает применять в механике математическую модель систем с дифференциальными неинтегрируемыми связями, основанную на принципе Гамильтона. Поэтому и стало необходимым дать детальный анализ упомянутых примеров, показать, что применение модели В.В. Козлова приводит к результатам, принципиально отличающимся от наблюдаемых, не согласующимися с ними ни в каком приближении. Это означает, что модель В.В. Козлова неправильна, неприемлема в механике.

По упомянутым соображениям вначале рассмотрена задача об однородном шаре, и для последующих сопоставлений в нескольких строках дано решение этой задачи на основе общих теорем динамики. МодельЛинделефа в применении к шару наглядно демонстрирует свою неприемлемость. Неприемлемость модели В.В. Козлова становится очевидной при взгляде на предсказываемые ею траектории центра шара. К такому же выводу приводит и полный анализ рассматривавшихся В.В. Козловым примеров – задач Чаплыгина и Суслова.

1. Классические модели. Из наблюдений устанавливают, что на некотором промежутке времени (пока заметно не проявилось влияние обычно малых сопротивлений качению и верчению) центр находящегося на горизонтальной плоскости и получившего начальный импульс однородного шара движется прямолинейно, а ось вращения сохраняет в пространстве направление (о чем судят по движению отметок, нанесенных на поверхность шара). Выбирая неподвижные оси координат в соответствии с начальными данными, можем полагать, что при $t = 0$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = n_0, \quad \omega_3 = n \tag{1.1}$$

$$v_1 = v_0, \quad v_2 = 0 \tag{1.2}$$

(обозначения обычные: ω_1, ω_2, ω_3 – компоненты угловой скорости шара в неподвижной системе координат с вертикальной третьей осью; v_1, v_2 – компоненты скорости центра шара в этих же осях; n_0 – начальное значение угловой скорости качения; n – начальное значение угловой скорости верчения; v_0 – начальное значение скорости центра шара).

Условия качения шара без скольжения

$$f_1(\mathrm{v}, \omega) = v_1 - a\omega_2 = 0, \quad f_2(\mathrm{v}, \omega) = v_2 + a\omega_1 = 0 \tag{1.3}$$

(a – радиус шара) связывают начальные значения

$$v_0 = an_0 \tag{1.4}$$

Элементарное решение задачи о качении шара получают из общих теорем динамики, вводя в точке касания шара с плоскостью реакцию (R_1, R_2, R_3)

$$mv_1^{\cdot} = R_1, \quad mv_2^{\cdot} = R_2, \quad J\omega_1^{\cdot} = aR_2, \quad J\omega_2^{\cdot} = -aR_1, \quad J\omega_3^{\cdot} = 0$$

(m – масса шара, J – момент инерции его относительно диаметра). Исключая затем реакцию $(J\omega_1 - mav_2)^{\cdot} = 0$, $(J\omega_2 + mav_1)^{\cdot} = 0$ и привлекая уравнения связи (1.3), устанавливаем, что $J_0\omega_1^{\cdot} = 0$, $J_0\omega_2^{\cdot} = 0$, где

$$J_0 = J + ma^2 \tag{1.5}$$

И значит, угловая скорость шара (а вместе с ней и скорость его центра) сохраняют начальные значения (1.1), (1.2). Этот результат с достаточной точностью согласуется с наблюдениями и может быть признан правильным (в указанном смысле).

Но такой путь решения не всегда принимают, так как не все допускают введение реакций как "понятий неясных и метафизических" ([19], с. 24). Не использующие этих понятий классические методы составления уравнений движения более трудоемки. Для уравнений Эйлера–Лагранжа приходится вычислять трехиндексные символы, а для уравнений Аппеля – энергию ускорений. Используя эти уравнения в задаче о качении без скольжения однородного шара по горизонтальной плоскости, получаем тот же правильный результат (см., например, [20], с. 372–374, с. 402).

2. Неприемлемость модели Линделефа. Следуя Линделефу, кинетическую энергию шара $T = \frac{1}{2}[m(v_1^2 + v_2^2) + J(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)]$ записываем, используя уравнения связи (1.3) и обозначение (1.5): $L = \frac{1}{2}[J_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) + J\omega_3^2]$. Вводим углы Эйлера θ, φ, ψ и кинематические уравнения

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \theta^{\cdot}\cos\psi + \varphi^{\cdot}\sin\theta\sin\psi, \quad \omega_2 = \theta^{\cdot}\sin\psi - \varphi^{\cdot}\sin\theta\cos\psi \\ &\omega_3 = \psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\theta \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда

$$L = \tfrac{1}{2}[J_0(\theta^{\cdot 2} + \varphi^{\cdot 2}\sin^2\theta) + J(\psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\cos\theta)^2]$$

Координата ψ – циклическая

$$\omega_3 = \psi^{\cdot} + \varphi^{\cdot}\sin\theta = n \tag{2.2}$$

Уравнения

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi^{\cdot}}\right)^{\cdot} = 0$$

при учете соотношений (2.1), (2.2) приводятся к виду

$$\omega_1^{\cdot} + k\omega_2 = 0, \quad \omega_2^{\cdot} - k\omega_1 = 0, \quad k = (J_0 - J)n/J_0 \tag{2.3}$$

Таким образом, по Линделефу лишь при отсутствии верчения ($n = 0$) компоненты ω_1, ω_2 сохраняют начальные значения и центр шара будет двигаться по прямой. Если же $n \neq 0$, то, как следует из уравнений (2.3), начальных данных (1.1), (1.2) и уравнений связи (1.3)

$$\omega_1 = -n_0\sin kt, \quad \omega_2 = n_0\cos kt$$

$$x_1^{\cdot} = v_1 = an_0\cos kt, \quad x_2^{\cdot} = v_2 = an_0\sin kt$$

Траектория центра шара – окружность. По Линделефу, стало быть, возможно, например, при игре в бильярд послать шар от борта в принадлежащую этому борту лузу без промежуточных соударений (фиг. 1). Общеизвестно, что такие движения невозможны.

Очевидное несоответствие математического результата с наблюдаемым движением означает, что модель Линделефа неправильна, а значит, и неприемлема в механике.

3. Неприемлемость модели В.В. Козлова. Предложенная В.В. Козловым математическая модель [10–16] представлена [11] системой уравнений

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \omega_i}\right)^{\cdot} + c^i_{\alpha\beta}\,\omega_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \omega_\beta} = X_i(\mathcal{L}^*) \tag{3.1}$$

Для однородного шара

$$\mathcal{L}^* = \tfrac{1}{2}[J(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+m(v_1^2+v_2^2)] - \lambda_1(v_1 - a\omega_2) - \lambda_2(v_2 + a\omega_1) \tag{3.2}$$

В дополнение к координатам $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$, $q_4 = x_1$, $q_5 = x_2$ В.В. Козлов полагает координатами и параметры λ_1, λ_2: $q_6 = \lambda_1$, $q_7 = \lambda_2$. Следуя [11], обозначаем $\omega_4 = v_1$, $\omega_5 = v_2$, $\omega_6 = \dot\lambda_1$, $\omega_7 = \dot\lambda_2$, что вместе с (2.1) приводит к соотношениям $\dot q_i = a_{ij}(q)\,\omega_j$, в которых коэффициенты могут зависеть лишь от θ и ψ:

$$a_{ij} = \delta_{ij} \text{ при } i > 3,\quad a_{11} = \cos\psi,\quad a_{12} = \sin\psi,\quad a_{21} = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}$$

$$a_{22} = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta},\quad a_{31} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\psi,\quad a_{32} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\psi,\quad a_{33} = 1$$

Остальные коэффициенты – нули.

Вводя оператор $X_k = a_{ik}\,\partial/\partial q_i$ и вычисляя коммутаторы $[X_\alpha, X_\beta] = c^i_{\alpha\beta} X_i$, находим значения отличных от нуля параметров $c^1_{32} = -c^1_{23} = 1$, $c^2_{13} = -c^2_{31} = 1$, $c^3_{21} = -c^3_{12} = 1$. Теперь уравнения (3.1) с функцией (3.2) записываются в виде

$$(J\omega_1 - a\lambda_2)^{\cdot} + a\lambda_1\omega_3 = 0$$

$$(J\omega_2 + a\lambda_1)^{\cdot} + a\lambda_2\omega_3 = 0 \tag{3.3}$$

$$J\dot\omega_3 - a(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = 0 \tag{3.4}$$

$$(mv_1 - \lambda_1)^{\cdot} = 0,\quad (mv_2 - \lambda_2)^{\cdot} = 0 \tag{3.5}$$

$$v_1 - a\omega_2 = 0,\quad v_2 + a\omega_1 = 0 \tag{3.6}$$

Введем новые переменные κ и σ, полагая

$$\lambda_1 = ma\kappa\cos\sigma,\quad \lambda_2 = ma\kappa\sin\sigma \tag{3.7}$$

Появляющиеся при интегрировании уравнений (3.5) постоянные выразим посредством постоянных c и ϵ: $v_1 = a(\kappa\cos\sigma + c\cos\epsilon)$, $v_2 = a(\kappa\sin\sigma + c\sin\epsilon)$, и, очевидно, не умаляя общности, можем принять $c \geqslant 0$. Из (3.6) теперь следует

$$\omega_1 = -\kappa\sin\sigma - c\sin\epsilon,\quad \omega_2 = \kappa\cos\sigma + c\cos\epsilon \tag{3.8}$$

Эти значения вместе с (3.7) вносим в (3.3) и устанавливаем, что

$$\kappa = \text{const} \tag{3.9}$$

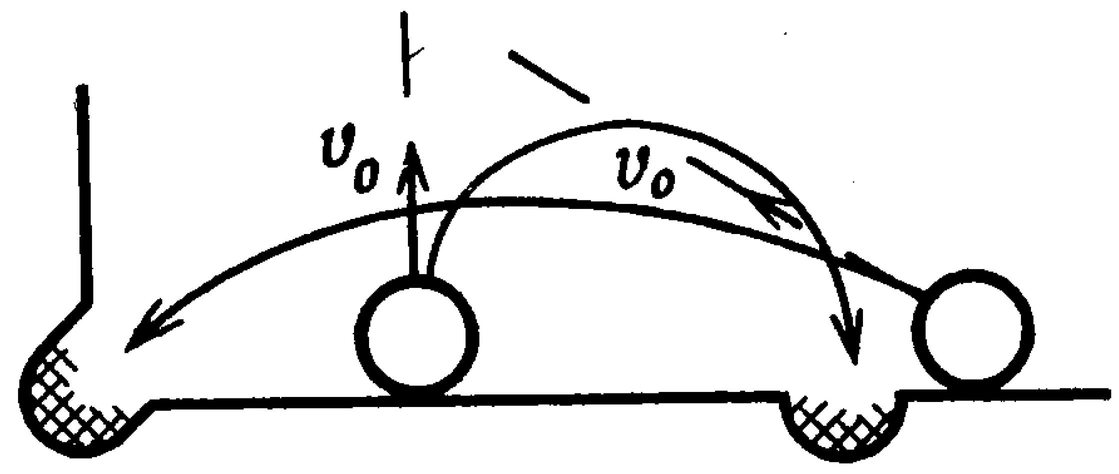
$$\omega_3 = J_0(ma^2)^{-1}\dot\sigma \tag{3.10}$$

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ из (3.3)–(3.5) следуют уравнения движения шара по идеально гладкой плоскости $J\dot\omega_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, $m\dot v_j = 0$ $(j = 1, 2)$, отличающиеся от уравнений п.1 отсутствием горизонтальных составляющих R_1, R_2 реакции связи. Если же $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$, то из (3.7), (3.9) следует, что постоянную κ всегда можно считать положительной: $\kappa > 0$. Остававшееся еще неиспользованным уравнение (3.4) запишем при учете соотношений (3.10), (3.7), (3.8): $\ddot\sigma - m^2a^4(JJ_0)^{-1}c\kappa\sin(\sigma - \epsilon) = 0$. При первом интегрировании появляется константа, которую представим посредством произвольного параметра k:

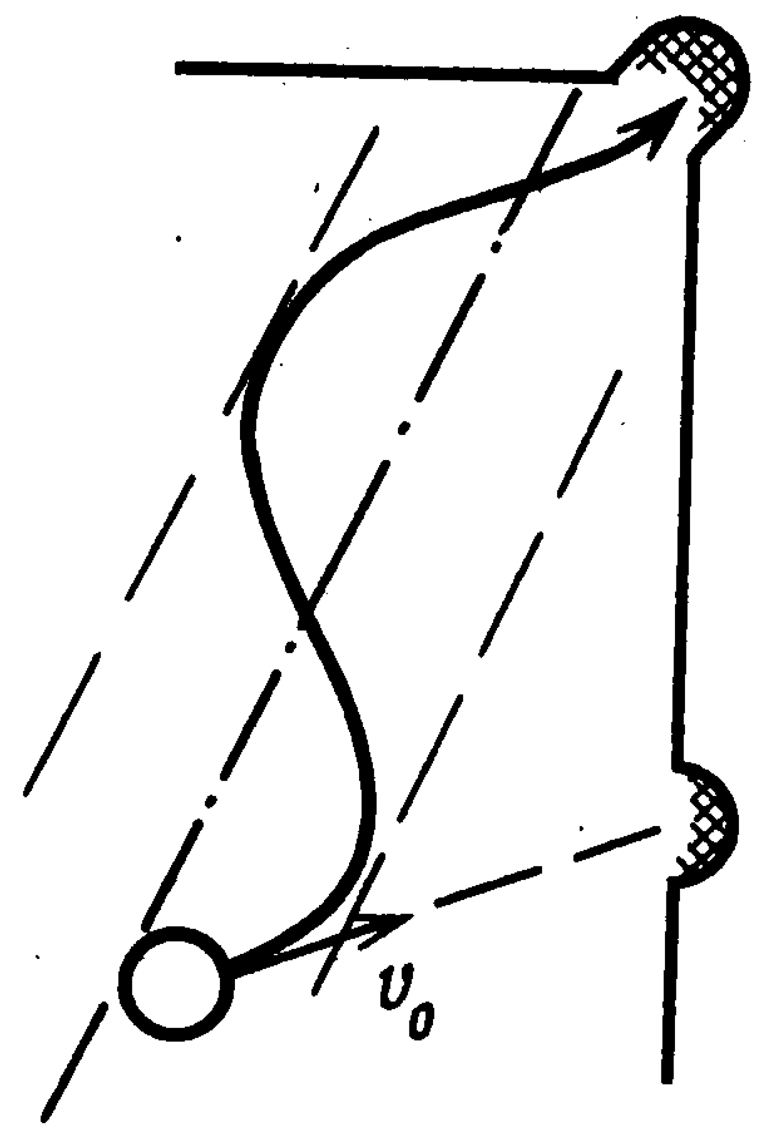
$$\dot\sigma^2 = 4\frac{m^2a^4}{JJ_0}c\kappa\left(k^2 - \cos^2\frac{\sigma-\epsilon}{2}\right)$$

Обозначая

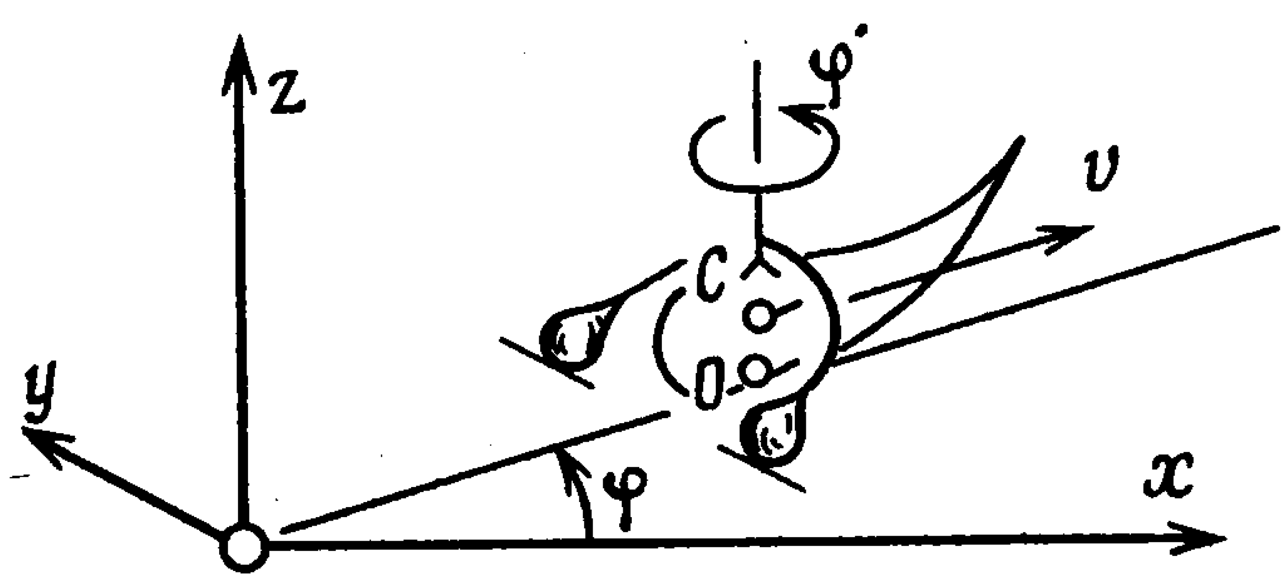
$$\tau = n_* t,\quad n_* = ma^2\sqrt{c\kappa/JJ_0} \tag{3.11}$$



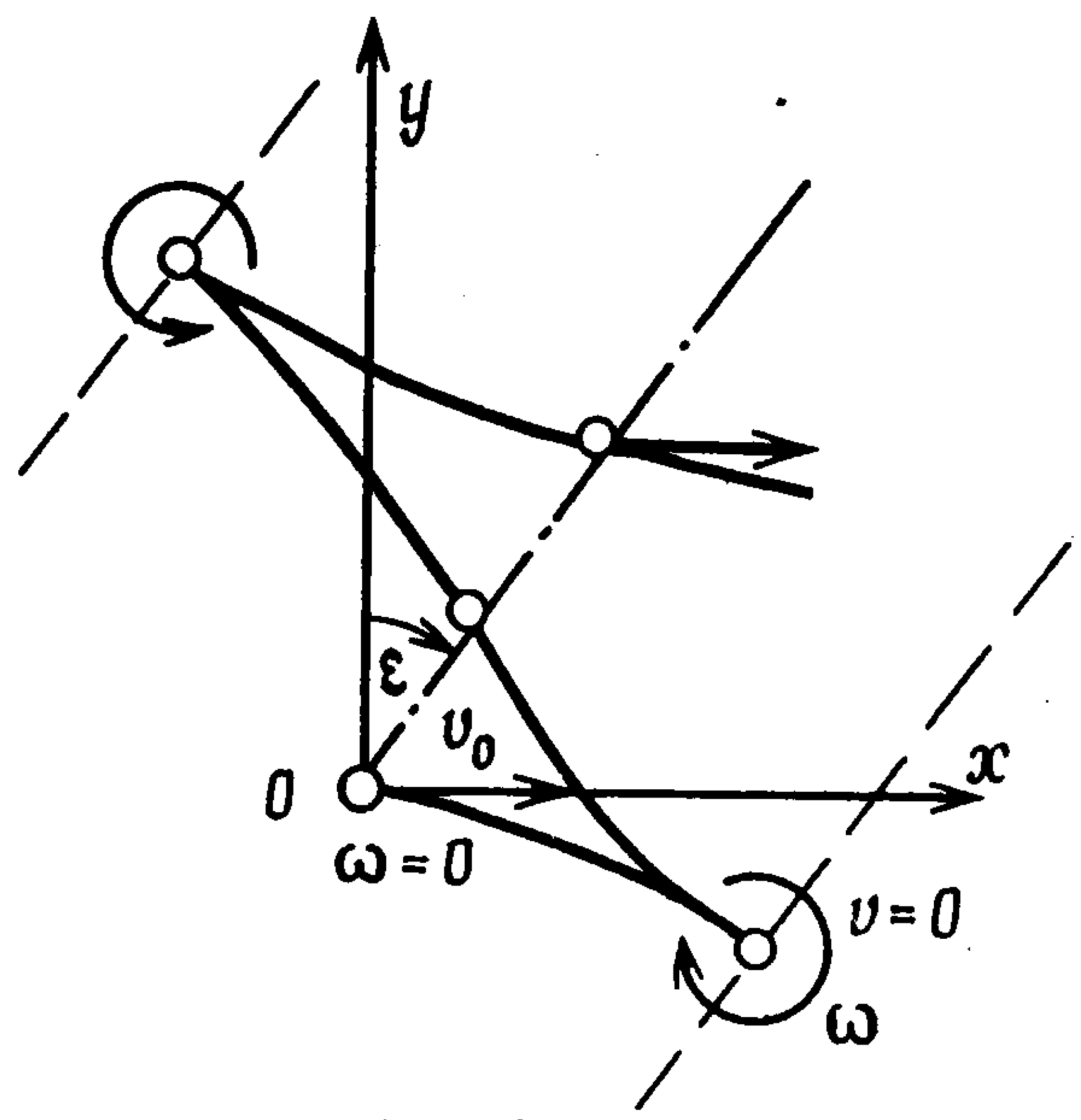
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

имеем, обращаясь к эллиптическим функциям Якоби [21]

$$\cos\frac{\sigma-\epsilon}{2} = k\,\mathrm{sn}(\tau, k), \quad \sin\frac{\sigma-\epsilon}{2} = -\mathrm{dn}(\tau, k)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = k\,\mathrm{cn}(\tau, k)$$

и из (3.8), (3.10), (3.11)

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -[c + \kappa - 2\kappa\,\mathrm{dn}^2(\tau, k)]\sin\epsilon + \\
&+ 2\kappa k\,\mathrm{sn}(\tau, k)\,\mathrm{dn}(\tau, k)\cos\epsilon \\
\omega_2 &= [c + \kappa - 2\kappa\,\mathrm{dn}^2(\tau, k)]\cos\epsilon + \\
&+ 2\kappa k\,\mathrm{sn}(\tau, k)\,\mathrm{dn}(\tau, k)\sin\epsilon \\
\omega_3 &= k\sqrt{c\kappa J_0/J}\,\mathrm{cn}(\tau, k)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Удовлетворим начальным условиям (1.1): $(c - \kappa)\sin\epsilon = 0$, $(c - \kappa)\cos\epsilon = n_0$, $k\sqrt{c\kappa J_0/J} = n$. И поскольку в общем случае $n_0 \neq 0$, то

$$\epsilon = 0, \quad c = n_0 + \kappa, \quad k = n\sqrt{J/[(n_0 + \kappa)\kappa J_0]} \tag{3.13}$$

и значит,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2\kappa k\,\mathrm{sn}(\tau, k)\,\mathrm{dn}(\tau, k), \quad \omega_2 = n_0 + 2\kappa k^2\,\mathrm{sn}^2(\tau, k) \\
\omega_3 &= n\,\mathrm{cn}(\tau, k)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Параметр κ остался произвольным.

Траекторию центра шара получим из (3.6) интегрированием, учтя (3.11), (3.13), (3.14), (1.4)

$$x_1(t) = (v_0 + 2a\kappa)t - 2\frac{a}{n_*}\kappa\int\limits_0^{n_*t} dn^2(\tau, k)\,d\tau$$
$$x_2(t) = 2\frac{nJ}{(n_0+\kappa)ma}\operatorname{cn}(n_*t, k) \qquad (3.15)$$

Ограничимся для определенности значениями $k \in]0;\ 1[$, которые, как следует из (3.13), получаем, ограничив произвольный параметр κ условием $\kappa > \sqrt{n_0^4/4 + JJ_0^{-1}n^2} - n_0/2$

Траектория (3.15) последовательно касается границ полосы

$$-2nJ/[(n_0+\kappa)ma] \leqslant x_2 \leqslant 2nJ/[(n_0+\kappa)ma]$$

а величина

$$x_1^{\cdot}x_2^{\cdot\cdot} - x_2^{\cdot}x_1^{\cdot\cdot} = a^2kn_*\kappa\operatorname{cn}(n_*t, k)\{\kappa + (n_0+\kappa)[1 - 2\operatorname{dn}^2(n_*t, k)]\}$$

обращается в нуль при $x_2 = 0$, и значит, центр шара должен описывать в полосе волнистую кривую (фиг. 2). Но таких движений не наблюдают и, следовательно, модель В.В. Козлова, как и модель Линделефа, приводит к математическому результату, не согласующемуся с наблюдаемым движением, что означает неприемлемость этой модели в механике.

К тому же она и неоднозначна, что усугубляет ее неприемлемость. Начальные условия (1.1) не выделяют, как это присуще задачам механики, из общего решения (3.12) уравнений (3.3) – (3.6) то единственное, которое приобретает шар при таких начальных условиях. Удовлетворяющее им решение (3.14) содержит произвольный параметр κ. Неизбежность этой ситуации заложена при конструировании модели. Рассматривая задачу как вариационную с ограничениями (дифференциальными связями), автор вводит лагранжиан с параметрами λ_i. Он полагает эти параметры "дополнительными координатами" ([11], с. 71). Но поскольку механического смысла эти "координаты" не имеют, нет никаких рациональных предпосылок для назначения им конкретных отвечающих задаче начальных условий. Сопоставляемые этим "координатам" постоянные интегрирования приходится оставлять произвольными, что и обусловливает неоднозначность получаемого решения, сохраняющуюся и при удовлетворении начальными данными истинных координат. Тем самым модель Козлова – лишь математическая конструкция, не относящаяся к механике.

4. О санях Чаплыгина и о задаче Суслова. Качение без скольжения тела по поверхности несложно осуществить в эксперименте. Тела простейших форм (шар, диск) при сравнительно небольшой идеализации служат удобными примерами и в аналитических исследованиях. Вместе с тем в теории неголономных систем обращаются и к "мыслимым" конструкциям, которые, если и свяжут с реальными объектами, то лишь при значительной идеализации свойств последних. Таковы "сани Чаплыгина" ([22], с. 21–24), "нескручиваемая нить" в задаче Суслова ([18], с.593–594). Но именно эти примеры и использованы в работах [10–12, 15].

Покажем, что более детальный анализ движения в задачах Чаплыгина и Суслова на основе теории В.В. Козлова также приводит к результатам, которые в механике сочтут неприемлемыми.

"Коньком" названы ([10], с. 99) сани Чаплыгина в случае, когда центр масс C находится над точкой O касания лезвия с горизонтальной плоскостью (фиг. 3). Предполагается, что трение скольжения и верчения отсутствует, а неголономная связь $x^{\cdot}\sin\varphi - y^{\cdot}\cos\varphi = 0$ означает, что вектор $\mathbf{v}$ скорости точки C остается в плоскости лезвия

$$x^{\cdot} = v\cos\varphi, \quad y^{\cdot} = v\sin\varphi \qquad (4.1)$$

Все классические методы [22, 20, 23] решения такой задачи приводят к одному и тому же результату: если в начальный момент

$$v = v_0 \neq 0, \quad \varphi^{\cdot} = \omega_0 = 0 \qquad (4.2)$$

конек будет равномерно скользить вдоль прямой $x = v_0t$, $y \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ (несущественные произвольные константы x_0, y_0, φ_0 поглощены выбором осей координат). Этот результат в механике сочтут приемлемым (его можно истолковать как идеализированную модель движения, нередко совершаемого конькобежцем, который, придав себе толчком начальный импульс, плавно катится по льду).

К иному результату приводит модель В.В. Козлова. Он вводит канонические импульсы ([10], с. 99)

$$p_x = x^{\cdot} - \lambda\sin\varphi, \quad p_y = y^{\cdot} + \lambda\cos\varphi, \quad p_\varphi = \varphi \qquad (4.3)$$

с дополнительной переменной

$$\lambda = p_y \cos\varphi - p_x \sin\varphi \tag{4.4}$$

а также функцию Гамильтона

$$H = \tfrac{1}{2}[(p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)^2 + p_\varphi^2] \tag{4.5}$$

Позже ([11], с. 73) переменная λ названа "дополнительной координатой".

Из (4.5) имеем

$$\dot p_x = 0, \quad \dot p_y = 0 \tag{4.6}$$

$$\dot p_\varphi = (p_x \cos\varphi + p_y \sin\varphi)(p_x \sin\varphi - p_y \cos\varphi) \tag{4.7}$$

Появляющиеся при интегрировании уравнений (4.6) постоянные выразим через два параметра c и ϵ:

$$p_x = c\sin\epsilon, \quad p_y = c\cos\epsilon$$

и из (4.4), (4.3), (4.7) при учете (4.1), (4.2) получим

$$\lambda = c\cos(\varphi + \epsilon), \quad v = c\sin(\varphi + \epsilon)$$

$$\dot\varphi^2 = c^2[\sin^2\epsilon - \sin^2(\varphi + \epsilon)]$$

откуда [21]

$$\sin(\varphi + \epsilon) = k\,\mathrm{sn}(\tau, k), \quad \cos(\varphi + \epsilon) = \mathrm{dn}(\tau, k),$$

$$k = \sin\epsilon, \quad k' = \cos\epsilon, \quad \tau = K(k) + ct$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

и из (4.1)

$$x(\tau) = k[-k'\mathrm{cn}(\tau, k) + k^2 \int_K^\tau \mathrm{sn}^2(z, k)\,dz]$$

$$y(\tau) = k^2[\mathrm{cn}(\tau, k) + k' \int_K^\tau \mathrm{sn}^2(z, k)\,dz]$$

Эти уравнения определяют причудливый след конька (фиг. 4), получившего начальный импульс (4.2). Такой след вряд ли может быть признан допустимым в механике. Конечно же, он следствие априорного принципа, принятого в теории В.В. Козлова.

Как и в случае шара, неприемлемость модели В.В. Козлова в задаче Чаплыгина усугублена наличием в полученном решении произвольного параметра ϵ, вследствие чего начальные условия (4.2) не определяют единственного решения. Не спасает положения существование в этом множестве траектории $x = v_0 t$, $y \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, получаемой при $\epsilon = \pi/2$, так как нет никаких оснований придавать параметру ϵ конкретное значение.

Обратимся теперь к задаче Г.К. Суслова.

Система уравнений

$$\begin{aligned} &J_{11}\dot\omega_1 + (J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 - \lambda)\omega_2 = 0 \\ &J_{22}\dot\omega_2 - (J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 - \lambda)\omega_1 = 0 \\ &(J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2)^{\cdot} + (J_{22} - J_{11})\omega_1\omega_2 = \mu \end{aligned} \tag{4.8}$$

при

$$\lambda = 0 \tag{4.9}$$

совпадает с уравнениями, полученными Г.К. Сусловым, а при

$$\lambda \neq 0, \quad \mu = \dot\lambda \tag{4.10}$$

это уравнения, предложенные в этой задаче В.В. Козловым ([11], с. 75)[4]. Используя интеграл

---

[4]Сохраненная в [11] несущественная компонента J_{12} тензора инерции в уравнениях (4.8) отсутствует.

$J_{11}\omega_1^2 + J_{22}\omega_2^2 = h^2$, введем, следуя Г.К. Суслову, переменную χ:

$$\omega_1 = \frac{h}{\sqrt{J_{11}}}\sin\chi, \quad \omega_2 = \frac{h}{\sqrt{J_{22}}}\cos\chi$$

и внесем эти выражения в исходную систему (4.8):

$$\chi^{\cdot}\sqrt{J_{11}J_{22}} + \left(\frac{J_{13}}{\sqrt{J_{11}}}\sin\chi + \frac{J_{23}}{\sqrt{J_{22}}}\cos\chi\right)h = \lambda \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{J_{13}}{\sqrt{J_{11}}}\cos\chi - \frac{J_{23}}{\sqrt{J_{22}}}\sin\chi\right)h\chi^{\cdot} + $$
$$+ \frac{J_{22}-J_{11}}{\sqrt{J_{11}J_{22}}}h^2\sin\chi\cos\chi = \mu \tag{4.12}$$

В постановке Г.К. Суслова (при значении (4.9)) уравнение (4.11) устанавливает зависимость χ от t в элементарных функциях

$$\operatorname{tg}\frac{\chi+\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\chi_0+\alpha}{2}e^{-kt}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_{23}}{J_{13}}\sqrt{\frac{J_{11}}{J_{22}}}, \quad k = h\sqrt{\frac{J_{13}^2}{J_{11}^2J_{22}} + \frac{J_{23}^2}{J_{22}^2J_{11}}}$$

Здесь существенно, что именно характеризующие динамический дисбаланс тела относительно выделенной связью третьей оси компоненты J_{13}, J_{23} тензора инерции определяют все особенности движения тела. При $J_{13} = J_{23} = 0$ тело равномерно вращается вокруг неподвижной оси.

Иначе дело обстоит в "мыслимой" модели В.В. Козлова. При условиях (4.10) исключаем переменную λ из уравнений (4.11), (4.12)

$$\chi^{\cdot\cdot} + \frac{J_{11}-J_{22}}{J_{11}J_{22}}h^2\sin\chi\cos\chi = 0$$

и значит, значения имеющихся в уравнениях (4.8) компонент J_{13}, J_{23} не оказывают никакого влияния на зависимость $\chi(t)$ (а вместе с нею и на зависимости $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$). Но это означает, что имеющийся у тела дисбаланс в модели В.В. Козлова не проявляется в движении тела. Такой результат в механике сочтут неприемлемым.

5. О "реализации связи". Итак, приведенные примеры опровергают утверждение В.В. Козлова, что его конструкция применима к описанию движения *любых* механических систем. Впрочем, высказав это утверждение, В.В. Козлов тут же вводит и противоречащее ему ограничение: "Если неинтегрируемые связи реализуются силами вязкого трения с большим коэффициентом вязкости, то для описания движения естественно воспользоваться неголономной моделью. . . . Если же связи возникают в результате изменения римановой метрики системы (например, при помощи присоединенных масс), то с теоретической точки зрения предпочтение следует отдать вакономной модели" ([12], с. 110). Тем самым В.В. Козлов выдвигает неожиданное для механика требование, чтобы он, уже имея уравнение связи, вводимое при отказе от привлечения информации о характере взаимодействия рассматриваемого тела с телом, осуществляющим связь, записывал уравнения движения тела лишь в том случае, когда имеется эта информация. Нуждается в уяснении смысла часто используемое В.В. Козловым словосочетание "реализация связи".

Создавая математическую модель изучаемого движения, в прикладной механике всегда имеют дело с конкретной системой взаимодействующих тел. Некоторые из взаимодействий могут быть охарактеризованы ньютоновыми силами, зависимость которых от взаимных положений тел и их относительных скоростей установлена из опыта (наблюдений). В тех случаях, когда в системе имеются контактно взаимодействующие тела, существенное значение имеют физико-химические свойства тел в областях контакта, которые и до настоящего времени остаются непознанными. Такие взаимодействия, если и удается охарактеризовать посредством сил, то лишь на основе эмпирических зависимостей, обычно имеющих весьма узкую область применения. Результаты многочисленных разнообразных экспериментов систематизируют, классифицируют и публикуют как справочный материал для использования при решении технических задач. В тех случаях, когда полагают, что допустимо пренебречь физическими характеристиками взаимодействия, полностью отказываются от введения гипотез о механизме взаимодействия, отвлекаются от динамических факторов и отмечают лишь геометрические (кинематические) характеристики движения, те наблюдаемые ограничения, которые на рассматриваемое тело накладывает контактирующее с ним другое тело. "Если твердое тело соприкасается с другими телами, которые тем или иным образом ограничивают свободу его перемещения, то такие тела по отношению к рассматриваемому называются связями" ([24], с. 19) – подобные этому определения понятия связи посредством материальных тел обычно вводят в теоретических системах прикладной направленности. Однако понятие связи вводят и иначе, как *наименование*, присваиваемое математическому соотношению – это обычное в математике априорное аксиоматическое введение исходного понятия: "Пусть γ – m-мерная поверхность в $3n$-мерном конфигурационном пространстве точек $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ масс $m_1, \ldots, m_n$. Пусть $q = (q_1, \ldots, q_m)$ – какие-нибудь координаты на γ: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q)$. Система, описываемая уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad L = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + U(q),$$

называется системой n точек, стесненной $3n - m$ идеальными голономными связями" ([25], с. 66–67). И В.В. Козлов термин "связь" вводит как наименование математического соотношения (в более общем случае – дифференциального) ([10], с. 92, [12], с. 102).

Если понятие связи возникает при математическом моделировании взаимодействий материальных тел, отвлечении от динамических характеристик взаимодействия, то не имеет смысла вопрос о "реализации связи", и он в механике не возникает. Но если в качестве первичного объекта предложено математическое соотношение, названное связью, то у механика, столкнувшегося с таким элементом постановки задачи, появляется естественное стремление попытаться установить, какой физический смысл имеет это уравнение. Поиски такого смысла называют "реализацией связи".

Этот термин, по-видимому, впервые появился при обсуждении задачи о санях Чаплыгина. У Н.А. Фуфаева [26] он относится к предложению Каратеодори ввести вместо неизвестной реакции плоскости скольжения на направляющее лезвие саней силу вязкого трения и "реализовать связь" предельным переходом при неограниченном возрастании коэффициента вязкости. Искусственность такой постановки очевидна. Вязким трением характеризуют действие жидкой среды, в которой допущение об анизотропии (тем более "отслеживающей" положение лезвия) неестественно. Предложенная К. Каратеодори математическая конструкция в дальнейшем была распространена на систему общего вида [27].

Принципиально иное толкование "реализации связи" предложил В.В. Козлов. Этот термин он впервые употребил в связи с задачей Суслова "о вращении твердого тела с нулевой проекцией угловой скорости на фиксированную в теле ось", предлагая обсуждать некую процедуру, при которой "эта связь реализуется с помощью задачи Кирхгофа о движении твердого тела в безграничной идеальной жидкости" ([12], с. 105). В задаче Чаплыгина о скольжении конька В.В. Козлов предложил "реализовать связь" посредством "движения в безграничной идеальной жидкости удлиненной невесомой эллиптической пластинки с жестко закрепленными точками положительной массы" ([12], с. 109). Понятно, что в подобной "реализации связей" одного механического объекта, посредством другого, никак физически не соотносящегося с первым, вряд ли возможно усмотреть какой-либо физический смысл.

Рассматривая классическую задачу о движении в идеальной жидкости (простирающейся беспредельно и покоящейся на бесконечности) тела, имеющего форму эллипсоида с полуосями $a = \epsilon$, $b = \epsilon^{-\alpha}$, c (ϵ и α – положительные величины), В.В. Козлов вначале полагает $c = 0$, а затем совершает предельный переход при $\epsilon \to 0$.

Уже тот факт, что для предельного объекта – "бесконечной прямой" задача гидродинамики при указанных условиях на бесконечности имеет тривиальное решение (идеальная жидкость покоится, "не замечая" такой объект), отличное от предлагаемого В.В. Козловым, свидетельствует о некорректности его результата. В допредельной задаче "вакономная механика" В.В. Козлова не нужна. Это обычная лагранжева система ([28], с. 234–237), которая, разумеется, может быть описана и обычными уравнениями Гамильтона.

Таким образом, в механике нет объектов, к которым следует применять "вакономную" модель В.В. Козлова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
2. *Харламов П.В.* Почему спорят механики об основаниях своей науки? // Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 1989. С. 186–204.
3. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М.: Мир, 1968. 232 с.
4. *Новожилов В.В.* Вопросы механики сплошной среды. Л.: Судостроение, 1989. 396 с.
5. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
6. *Курант Р.* Математика в современном мире // Математика в современном мире. М.: Мир, 1967. С. 13–27.

7. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Собр. соч. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. Т. 1. С. 57–75.
8. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1980. Вып. 12. С. 3–8.
9. *Харламов М.П.* О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1981. Вып. 13. С. 10–14.
10. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 3. С. 92–100.
11. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. II // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 4. С. 70–76.
12. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. III // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. № 3. С. 102–111.
13. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. IV. Интегральные принципы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 5. С. 76–83.
14. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. V. Принцип освобождаемости и условие идеальности связей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1988. № 6. С. 51–54.
15. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
16. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
17. *Пуанкаре А.* Идеи Герца в механике // Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 310–333.
18. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
19. *Даламбер Ж.* Динамика. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 344 с.
20. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
21. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
22. *Чаплыгин С.А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 15–25.
23. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
24. *Гернет М.М.* Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1987. 344 с.
25. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
26. *Фуфаев Н.А.* О возможности реализации неголономной связи посредством сил вязкого трения // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 513–515.
27. *Карапетян А.В.* О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
28. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Донецк

Поступила в редакцию
7.XII.1988

УДК 531.36

 В.В. Козлов

К ВОПРОСУ О РЕАЛИЗАЦИИ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИКЕ

Рассматриваются задачи, связанные с предельным переходом в уравнениях Лагранжа второго рода, когда коэффициенты жесткости, вязкости и присоединенные массы устремляются к бесконечности. При определенных условиях решения исходных уравнений стремятся к решениям предельной задачи со связями. Для интегрируемых связей предельные уравнения совпадают с обычными уравнениями со множителями связей. В случае неинтегрируемых связей ответ существенно зависит от способа их реализации. Обсуждаются обобщенные модели динамики систем с неинтегрируемыми связями и свойства предельных уравнений движения.

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – обобщенные координаты механической системы, T – ее кинетическая энергия, $F_1, \ldots, F_n$ – обобщенные силы. Если система является "свободной" (т.е. координаты x и скорости $x^{\cdot}$ не связаны каким-либо нетривиальным соотношением), то ее движения описываются уравнениями Лагранжа

$$[T] = F \tag{1.1}$$

где $[f]$ – вариационная производная $(\partial f/\partial x^{\cdot})^{\cdot} - \partial f/\partial x$.