УДК 62-50

© 1992 г. В.Я. Джафаров

МНОГОЗНАЧНЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача минимизации терминального функционала на траекториях управляемой системы, которая описывается дифференциальным включением. Приводится соотношение, характеризующее функцию оптимального результата. Определяется многозначный синтез в виде дифференциального включения, все решения которого являются оптимальными траекториями. Указывается способ аппроксимации оптимальных траекторий.

Рассмотрим управляемую систему, поведение которой описывается дифференциальным включением

$$x^{\cdot}\in F(t,x),\quad x\in R^n,\quad t\in T=[0,\theta] \tag{1}$$

Предположим, что

1°. $F(t,x)$ – выпуклый компакт при всех $(t,x)\in T\times R^n$.

2°. Многозначное отображение $(t,x)\to F(t,x)$ непрерывно по (t,x) и удовлетворяет локальному условию Липшица по x, т.е.

$$\alpha(F(\tau,y),F(t,x))\to 0 \quad \text{при} \quad (\tau,y)\to(t,x)$$

$$\alpha(F(t,x_1),F(t,x_2))\leqslant\lambda(L)\,\|x_1-x_2\|;\quad (t_i,x_i)\in L,\quad i=1,2$$

где $L\subset T\times R^n$ – любая ограниченная область, $\|\cdot\|$ – евклидова норма, $\lambda(L)$ – постоянная, $\alpha(\cdot,\cdot)$ – хаусдорфово расстояние.

3°. Существует постоянная $c>0$, такая, что

$$\max\{\|f\|:\ f\in F(t,x)\}\leqslant c(1+\|x\|)$$

В дальнейшем будем полагать, что условия 1°–3° выполнены.

Под решением системы (1) понимается абсолютно-непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду.

Пусть на решениях системы (1) требуется минимизировать функционал

$$\sigma=\sigma(x(\theta)) \tag{2}$$

где σ: $R^n\to R^1$ – функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица. Через $X_1(t_*,x_*)$ обозначим множество всех решений уравнения (1) с начальным условием $x(t_*)=x_*$. Пусть $f\in R^n$. Полагаем

$$c(t_*,x_*)=\min\{\sigma(x(\theta)):\ x(\cdot)\in X_1(t_*,x_*)\}$$

$$\partial_*c(t,x)\,|\,(f)=\liminf_{\delta\to 0+}[c(t+\delta,x+\delta f)-c(t,x)]\,\delta^{-1}$$

$$F_0(t,x)=\{f_*\in F(t,x):\ \min_{f\in F(t,x)}\partial_*c(t,x)\,|\,(f)=\partial_*c(t,x)\,|\,(f_*)\}$$

$$S=\{(t,x)\in T\times R^n:\ F_0(t,x)\ \text{не выпукло}\}$$

Функция $c(t,x)$ называется функцией оптимального результата (ФОР) для задачи (1), (2). Траектория $x_0(\cdot)\in X_1(t_*,x_*)$ называется оптимальной для начальной позиции (t_*,x_*), если $c(t_*,x_*)=\sigma(x_0(\theta))$. Можно показать, что функция $c(t,x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по (t,x), т.е.

$$\|c(t_1,x_1)-c(t_2,x_2)\|\leqslant\lambda(L)[\,|t_1-t_2|+\|x_1-x_2\|\,],\quad (t_i,x_i)\in L,\quad i=1,2$$

где $L\subset T\times R^n$ – любая ограниченная область, $\lambda(L)$ – постоянная. Поэтому число $\partial_*c(t,x)|(f)$ всегда конечно.

Через Lip обозначим множество всех удовлетворяющих локальному условию Липшица функций ω: $T\times R^n\to R^1$. Используя известные результаты [1–5], можно показать, что справедлива

Теорема 1. Для того чтобы функция $c(\cdot)\in$ Lip была ФОР для задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\min_{f\in F(t,x)}\partial_*c(t,x)\,|\,(f)=0,\qquad c(\theta,x)=\sigma(x),\quad \forall(t,x)\in[0,\theta)\times R^n \tag{3}$$

Соотношение (3) заменяет уравнение Беллмана для задачи (1), (2).

Теперь определим многозначный синтез для задачи (1), (2) и рассмотрим вопросы его существования.

Определение 1. Пусть $(t, x) \to G(t, x) \subset R^n$ – компактнозначное полунепрерывное сверху многозначное отображение. Назовем его многозначным синтезом для задачи управления (1), (2), если множество решений уравнения

$$x' \in G(t, x), \quad x(t_*) = x_*, \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times R^n \tag{4}$$

непусто и все решения уравнения (4) являются оптимальными траекториями для начальной позиции (t_*, x_*).

Будем полагать, что выполнено

Условие 1. Для ФОР $c(t, x)$ функция $(t, x) \to \partial_* c(t, x) | (f)$ полунепрерывна снизу в каждой точке $(t, x) \in [0, \theta) \times R^n$ для любого $f \in R^n$.

Условие 1 выполняется, например, если функция σ непрерывно-дифференцируема, а правая часть уравнения (1) имеет вид $F(t, x) = \mathrm{co}\{f(t, x, u): u \in P\}$, где co – выпуклая оболочка, P – компакт, функция f непрерывна по совокупности переменных и непрерывно дифференцируема по x.

При выполнении условия 1 многозначное отображение $(t, x) \to F_0(t, x)$ полунепрерывно сверху. Действительно, пусть $(t_k, x_k) \to (t_*, x_*)$, $f_k \to f_*$, $f_k \in F_0(t_k, x_k)$. Покажем, что $f_* \in F_0(t_*, x_*)$. По определению F_0 и в силу условий (3) имеем

$$\partial_* c(t_k, x_k) | (f_k) = 0 \tag{5}$$

При каждом (t, x) функция $f \to \partial_* c(t, x) | (f)$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому, учитывая условие 1, а также соотношения (3) и (5), имеем $\partial_* c(t_*, x_*) | (f_*) = 0$. Следовательно, $f_* \in$ $\in F_0(t_*, x_*)$.

Для ФОР $c(t, x)$ через $\partial c(t_*, x_*)$ обозначим множество субградиентов Кларка функции $c(t, x)$ в точке (t_*, x_*)

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1 и

$$\min_{z \in \partial c(t, x)} \max_{f \in F_0(t, x)} \langle z, (1, f) \rangle \leqslant 0, \quad \forall (t, x) \in [0, \theta) \times R^n \tag{6}$$

Тогда отображение $(t, x) \to \mathrm{co}\, F_0(t, x)$ является многозначным синтезом для задачи (1), (2).

Доказательство. При выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\partial_* c(t, x) | (f) = \min\{\langle z, (1, f) \rangle: z \in \partial c(t, x)\} \tag{7}$$

Пусть $(t_*, x_*) \in [0, \theta) \times R^n$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$x' \in \mathrm{co}\, F_0(t, x), \quad x(t_*) = x_* \tag{8}$$

Правая часть первого соотношения (8) выпукла, компактнозначна и полунепрерывна сверху по (t, x). Поэтому по известным теоремам существования ([4]), уравнение (8) имеет решение, удовлетворяющее условию $x(t_*) = x_*$. Для любого решения $x(t)$ уравнения (8) функция $\varphi(t) = c(t, x(t))$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому по теореме Радемахера она почти всюду дифференцируема. При почти всех $t \in [t_*, \theta]$, учитывая теорему о минимаксе, имеем

$$\varphi'(t) = \partial_* c(t, x(t)) | (x'(t)) \leqslant \max_{f \in \mathrm{co}\, F_0(t, x(t))} \partial_* c(t, x)) | (f) = \max_{f \in \mathrm{co}\, F_0(t, x(t))} \min_{z \in \partial c(t, x(t))} \langle z, (1, f) \rangle =$$

$$= \min_{z \in \partial c(t, x(t))} \max_{f \in F_0(t, x(t))} \langle z, (1, f) \rangle \leqslant 0$$

Следовательно, все траектории уравнения (8) являются оптимальными.

Теорема 1 применима, вообще говоря, в случаях, когда поверхность невыпуклости S множества $F_0(t, x)$ будет сосредоточивающей поверхностью для системы $x' \in \mathrm{co}\, F_0(t, x)$ (в терминологии Айзекса [6]). Когда эта поверхность является рассеивающей, неравенство (6), вообще говоря, не будет выполняться.

Например, для системы

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad t \in [0, 1], \quad \sigma(x_1, x_2) = -(x_1)^2 \tag{9}$$

имеем $c(t, x) = -[K \pm \tfrac{1}{2}(t-1)^2]^2$, $K = K(t, x) = x_1 + (1-t)x_2$, где знак плюс берется при $K \geqslant 0$,– минус – при $K < 0$. Поэтому

$$F_0(t, x) = \left\| \begin{matrix} x_2 \\ \zeta \end{matrix} \right\|, \quad \zeta = \begin{cases} 1, & K > 0 \\ -1, & K < 0 \\ -1, 1, & K = 0 \end{cases}$$

Можно проверить, что для этого примера неравенство (6) нарушается на поверхности $K = 0$. Введем следующее

Условие 2. Для каждого $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ среди решений уравнения (8) существует решение $x(t)$, такое, что множество $\{t \in [t_*, \theta]: (t, x(t)) \in S\}$ имеет нулевую меру Лебега.

Можно проверить, что решение $x(t)$ уравнения (8), удовлетворяющее условию 2, является также решением уравнения $\dot{x} \in F_0(t, x)$ и все решения уравнения $\dot{x} \in F(t, x)$ являются оптимальными для всех начальных позиций (t_*, x_*). Поэтому справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда отображение $(t, x) \to F_0(t, x)$ является многозначным синтезом для задачи (1), (2).

Теорема 2 применима в случаях, когда S – рассеивающая поверхность. Для примера (9) условие 2 выполнено. Поэтому построенное отображение $(t, x) \to F_0(t, x)$ является многозначным синтезом.

Из теорем 1 и 2 видно, что по ФОР $c(t, x)$ для нахождения оптимальных траекторий представляет интерес задача аппроксимации решений уравнения $\dot{x} \in \mathrm{co}\, F_0(t, x)$. Укажем один способ такой аппроксимации. Пусть $(t_*, x_*) \in [0, \theta) \times R^n$, $\Delta = \{t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = \theta\}$ – разбиение отрезка $[t_*, \theta]$, $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{N-1}\}$, где ξ_i – n-мерный вектор при всех i. Обозначим

$$\operatorname{diam} \Delta = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i), \quad |\xi| = \max_i \|\xi_i\|$$

Рассмотрим пошаговое дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F_0(\tau_i, x(\tau_i) + \xi_i), \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \quad x(t_*) = x_* \tag{10}$$

Через $X_2(t_*, x_*)$ обозначим множество абсолютно-непрерывных функций $x(\cdot): [t_*, \theta] \to R^n$, таких, что

$$x(t) = \lim_{k \to \infty} x_k(t) \qquad (t \in [t_*, \theta])$$

где $x_k(t)$ – абсолютно-непрерывное решение уравнения (10) для последовательностей Δ_k, ξ^k, таких, что

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam} \Delta_k = \lim_{k \to \infty} |\xi^k| = 0$$

Справедливо утверждение: при всех $(t_*, x_*) \in [0, \theta) \times R^n$ пучок $X_2(t_*, x_*)$ совпадает с пучком всех решений уравнения (8). Поэтому все решения уравнения (8) аппроксимируются решениями пошагового дифференциального включения (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293–297.
2. *Субботин А.И., Субботина Н.Н.* Свойства потенциала дифференциальной игры // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 204–211.
3. *Berkovitz L.* Optimal feedback controls // SIAM J. Control and Optimiz. 1989. V. 27. № 5. P. 991–1006.
4. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
5. *Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н.* Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 1888–1894.
6. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.

Баку

Поступила в редакцию
28.III.1991