УДК 531.36

© 1992 г. А.В. Степанов

КРИТЕРИЙ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ОДНОРОДНОГО ПОЛИНОМА В КОНУСЕ

Предлагается критерий знакоопределенности полинома степени m в конусе $K\{\alpha_{10},\ldots,\alpha_{n0}\}$ пространства R^n, а также метод исследования таких свойств, основанный на некоторых результатах Т.К. Сиразетдинова. Это позволяет упростить решение задачи устойчивости систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями.

1. Постановка задачи. В некоторых задачах устойчивости, (например, в задачах экономики, устойчивости в биологических сообществах и т.п.) нет необходимости применять функции со свойствами знакоопределенности во всем пространстве R^n. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих такие процессы, некоторое множество $K \subset R^n$ положительно инвариантно. Траектории системы с начальными данными из K с течением времени не покидают его пределов. Такое множество называют конусом, если оно замкнуто и все его элементы обладают свойствами: 1) для любого $x \in K$ следует, что $-x \notin K$ ($x \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ – нуль), 2) для любых $\alpha, \beta > 0$ и произвольных $u, v \in K$ следует, что $\alpha u + \beta v \in K$.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда конус совпадает с координатным углом. Используем обозначения [1] $K\{\alpha_{10},\ldots,\alpha_{n0}\}$, $\alpha_{i0} \in N_0 = \{-1, 1\}$. Здесь $\{\alpha_{i0}\}$, $(i = 1,\ldots,n)$ – базис конуса K. В этом случае

$$\alpha_{i0} = \operatorname{sign} x_i \, (x_i \neq 0), \qquad i = 1,\ldots,n; \qquad \alpha_{i0}x_i \geqslant 0$$

Если задача связана с рассмотрением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, траектории которой с течением времени не покидают пределов конуса, то при решении задачи устойчивости такой системы нет необходимости использовать в качестве функции Ляпунова функцию, знакоопределенную во всем пространстве. Достаточно, чтобы она обладала этим свойством лишь в конусе K.

Таким образом, возникает проблема исследования свойств знакоопределенности различных функций, в частности однородных полиномов – форм в некотором конусе K пространства R^n.

2. Необходимые и достаточные условия знакоопределенности формы некоторого m-го порядка в конусе. Рассмотрим следующую задачу. Пусть в некоторой области

$$G = \{x: 0 \leqslant \|x\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < \infty, \quad x \in R^n\}$$

задана функция

$$W(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m} x_{i_1} \ldots x_{i_m}$$

$$a_{i_1\ldots i_m} = a_{i_m\ldots i_{m-1}} = \ldots = a_{i_2\ldots i_m i_1} = \text{conts}$$

как форма m-го порядка (m – целое, положительное число).

Исследуем свойства знакоопределенности функции в конусе $K\{\alpha_{10},\ldots,\alpha_{n0}\}$.

Для определенности, а также с целью упрощения выкладок будем исследовать свойства положительной определенности W в первом координатном углу $x \geqslant 0$. Для этого осуществим замену переменных $x_i = u_i^2$ $(i = 1,\ldots,n)$ и получим некоторую функцию $\Omega(u)$ порядка $2m$, свойства знакоопределнности которой во всем пространстве переменных $u_1,\ldots,u_n$ совпадают со свойствами знакоопределенности формы $W(x)$ в конусе $x \geqslant 0$, Функции W и Ω непрерывны относительно аргументов x и u соответственно и обладают свойством однородности. Поэтому, исходя из теоремы Вейерштрасса о свойствах непрерывных функций, будем исследовать только функцию $\Omega(u)$, причем на сфере S единичного радиуса. Для этого построим функцию Лагранжа

$$L(u) = \Omega(u) + m\lambda(1 - u_1^2 - \ldots - u_n^2)$$

и исследуем ее на абсолютный экстремум. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\partial L(u)/\partial u_i = \partial\Omega(u)/\partial u_i - 2m\lambda u_i = 0, \qquad i = 1,\ldots,n \\ &u_1^2 + \ldots + u_n^2 = 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим [2] Q_{rn} – множество всех строго возрастающих последовательностей $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)$, составленных из r чисел множества $N = \{1, \ldots, n\}$. Тогда систему (2.1) можно преобразовать к виду

$$2mu_{i_s}\Big(\frac{1}{m}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m}u_{i_1}^2\ldots u_{i_m}^2+\ldots+\frac{m-1}{m}u_{i_s}^{2m-4}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m}u_{i_1}^2\ldots u_{i_m}^2+$$
$$+a_{i_s\ldots i_s}u_{i_s}^{2m-2}-\lambda\Big)=0,\quad i_s=1,\ldots,n \tag{2.2}$$
$$i_l\neq i_s\ (l=1,\ldots,m);\quad u_1^2+\ldots+u_n^2=1$$

Приравняем в первых n уравнениях системы (2.2) каждый из сомножителей к нулю и, при учете уравнения связи, получим совокупность систем нелинейных алгебраических уравнений. Вместе с тем по теореме Эйлера об однородных функциях будем иметь

$$\Omega(u)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Omega(u)}{\partial u_i}u_i$$

а так как из уравнений (2.1) следует, что $\partial\Omega(u)/\partial u_i = 2m\lambda u_i$, то получим, что в точках экстремума на сфере S функция $\Omega(u) = \lambda$.

Таким образом, функция $\Omega(u)$ положительно определена, если система (2.2) при $\lambda \leqslant 0$ не имеет ненулевых решений; тем самым и системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m}^{(\sigma)}x_{i_1}\ldots x_{i_m}=\lambda,\qquad i_s\in\sigma$$
$$s=1,\ldots,m;\qquad \sigma\in Q_{rn} \tag{2.3}$$
$$x_\gamma=0,\qquad \gamma=N\backslash\sigma,\qquad x_\gamma\in R^{n-r},\qquad r=1,\ldots,n$$

($a_{i_1\ldots i_m}^{(\sigma)}$ – коэффициенты формы $W(x)$ с индексами из σ) при $\lambda \leqslant 0$ также не должны иметь ненулевых решений, целиком принадлежащих конусу $x \geqslant 0$. Верно и обратное. Для случая отрицательной определенности необходимо, чтобы $\lambda \geqslant 0$, а в конусе $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ необходимо предварительно осуществить замену переменных $y_i = \alpha_{i0}x_i$ и повторить предыдущие рассуждения.

Таким образом, сформулируем теорему.

Теорема 1. Для того, чтобы форма $W(x)$ порядка $m \geqslant 2$ ($m \in Z_+$) была положительно (отрицательно) определена в конусе $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ пространства R^n, необходимо и достаточно, чтобы системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m}^{(\sigma)}x_{i_1}\ldots x_{i_m}=\alpha_{i_s0}\lambda$$
$$i_s\in\sigma,\quad s=1,\ldots,m;\quad \sigma\in Q_{rn} \tag{2.4}$$
$$x_\gamma=0,\quad \gamma=N\backslash\sigma,\quad x_\gamma\in R^{n-r},\quad r=1,\ldots,n$$

при $\lambda \leqslant 0$ ($\lambda \geqslant 0$) не имели ненулевых решений, целиком принадлежащих конусу.

3. Критерий знакоопределенности. Плоский случай. Так как $\Omega(u)$ – форма четного порядка, то можно воспользоваться результатами [5]. Осуществим преобразование

$$z_1=u_1^m,\quad z_2=u_1^{m-1}u_2,\ \ldots,\ z_l=u_n^m$$

в результате чего функция Ω преобразуется в квадратичную форму

$$V(z)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}v_{ij}z_iz_j,\quad v_{ij}=v_{ji}=\mathrm{const}$$

Очевидно, что векторы $z = \mathrm{col}(z_1, \ldots, z_l)$ линейно независимы и образуют пространство размерности l, которое обозначим Z_l. Таким образом

$$\forall u\in G^*\subseteq R^n,\qquad \exists z\in Z_l:\ \Omega(u)=V(z)$$

и при этом свойства знакоопределенности $V(z)$ влекут знакоопределенность функции $W(x)$ в конусе K. Задача исследования W может быть сведена к более простой.

Отметим, что изложенный подход дает только достаточные условия знакоопределенности. Так, например, если $W(x)$ – форма третьего порядка

$$W(x)=a_{30}x_1^3+a_{21}x_1^2x_2+a_{12}x_1x_2^2+a_{03}x_2^3$$

$x = \mathrm{col}(x_1, x_2)$, то используя теорему 1, можно получить, что для положительной (отрицательной) определенности в некотором конусе $K\{\alpha_{10}, \alpha_{20}\}$ пространства R^2 необходимо и достаточно, чтобы в этой области системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{30}x_1^2 + {}^2/_3 a_{21}x_1x_2 + {}^1/_3 a_{12}x_2^2 = \alpha_{10}\lambda \\ {}^1/_3 a_{21}x_1^2 + {}^2/_3 a_{12}x_1x_2 + a_{03}x_2^2 = \alpha_{20}\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ a_{03}x_2^2 = \alpha_{20}\lambda \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ a_{30}x_1^2 = \alpha_{10}\lambda \end{cases}$$

(a_{ml} = const – коэффициенты формы $W(x)$) не имели ненулевых решений при всех $\lambda \leqslant 0$ ($\lambda \geqslant 0$). Пользуясь изложенным методом, аналогичные условия, например в первом квадранте, сводятся к положительности (отрицательности) всех коэффициентов формы W.

Аналогично формулируются условия знакоопределенности формы четвертого порядка.

Отметим, что были получены ([6] и др.) условия знакоопределенности формы четвертого порядот двух переменных всюду в R^2. Однако, как можно видеть, в ряде задач совсем не обязательно, чтобы функция обладала такими свойствами во всем пространстве переменных.

Рассмотрим следующий пример. Пусть дана функция

$$g(x,y) = \frac{1}{32}x^4 + xy^3 + y^4$$

Она знакопеременна во всем пространстве R^2 переменных x и y и соответственно положительно определена в первом координатном углу. Вместе с тем и соответствующие подсистемы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{32}x^3 + \dfrac{1}{4}xy^2 = \lambda \\ \dfrac{3}{4}xy^2 + y^3 = \lambda \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = \lambda \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 = \lambda \end{cases}$$

при $\lambda \leqslant 0$ не имеют отличных от нулевого решений, целиком принадлежищх конусу $x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

Можно сформулировать условия знакоопределенности формы порядка m от двух переменных в некотором конусе $K\{\alpha_{10}, \alpha_{20}\}$ пространства R^2 следующим образом.

Для положительной (отрицательной) определенности формы некоторого m-го порядка $\Phi(x_1, x_2) = A_{m0}x_1^m + A_{m-1,1}x_1^{m-1}x_2 + \ldots + A_{0m}x_2^m$ в конусе $K\{\alpha_{10}, \alpha_{20}\}$ пространства R^2 необходимо и достаточно, чтобы системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_{m0}x_1^{m-1} + \dfrac{m-1}{m}A_{m-1,1}x_1^{m-2}x_2 + \ldots + \dfrac{m-l}{m}A_{m-l,l}x_1^{m-l-1}x_2^l + \ldots \\ \ldots + \dfrac{1}{m}A_{1,m-1}x_2^{m-1} = \alpha_{10}\lambda \\ \dfrac{1}{m}A_{m-1,1}x_1^{m-1} + \dfrac{2}{m}A_{m-2,2}x_1^{m-2}x_2 + \ldots + \dfrac{l}{m}A_{m-l,l}x_1^{m-l}x_2^l + \ldots + A_{0m}x_2^{m-1} = \alpha_{20}\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ A_{0m}x_2^{m-1} = \alpha_{20}\lambda \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ A_{m0}x_1^{m-1} = \alpha_{10}\lambda \end{cases}$$

не имели ненулевых решений в рассматриваемой области при всех $\lambda \leqslant 0$ ($\lambda \geqslant 0$).

Во многих случаях при решении задачи устойчивости систем дифференциальных уравнений оказывается более полезным и эффективным использование форм высокого порядка со свойствами знакоопределенности в некотором конусе $K \subset R^n$ вместо традиционно часто применяемых квадратичных форм. При этом сама методика значительно упрощается.

4. О монотонной устойчивости одного типа систем дифференциальных уравнений. Полученные выше результаты упрощают задачу исследования свойств монотонной устойчивости в некотором конусе $K \subset R^n$ одного типа систем дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями специального вида. Здесь имеются ввиду такие системы, у которых правые части представляют собой однородные полиномы некоторой степени.

Рассмотрим в некоторой области

$$G = \{(t, x):\ t \geqslant t_0,\ x \in R^n,\ 0 \leqslant \|x\| = \sqrt{(x,x)} < \infty\}$$

систему обыкновенных дифференциальных уравнений (m – некоторое целое число)

$$\dot{x}_s = -x_s R_s^{(m)}(x), \quad s = 1, \ldots, n$$
$$R_s^{(m)}(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_m=1}^{n} \overset{s}{\beta}_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1 \ldots i_m} \tag{4.1}$$

Определение. Система (4.1) монотонно устойчива в конусе $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ пространства R^n, если функция

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0} x_i(t)$$

строго монотонно убывает с течением времени t вдоль траекторий системы (4.1) с начальными данными из конуса.

Таким образом, на основании определения можно сформулировать следующий результат.

Теорема 2. Для монотонной устойчивости системы (4.1) в некотором конусе $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ пространства R^n достаточно, чтобы в этом конусе была положительно определена форма порядка $m+1$

$$W(x) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{s0} x_s \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_m=1}^{n} \overset{s}{\beta}_{i_1 \ldots i_m} x_{i_1 \ldots i_m}$$

Здесь $\overset{s}{\beta}_{i_1 \ldots i_m} = \mathrm{const}$ – коэффициенты системы (4.1).

Важно отметить, что при выполнении условий теоремы 2, монотонная устойчивость системы (4.1) в рассматриваемой части пространства R^n равносильна ее асимптотической устойчивости.

Пользуясь определением монотонной устойчивости, можно сформулировать и ряд других условий монотонной устойчивости системы (4.1) в некотором конусе K, вытекающих из различных соотношений коэффициентов $\overset{s}{\beta}_{i_1 \ldots i_m}$ и элементов базиса этого конуса. Например, такое утверждение: пусть коэффициенты системы (4.1) и элементы базиса некоторого конуса $K\{\alpha_{10}, \ldots$ $\ldots, \alpha_{n0}\}$ связаны соотношением

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{s}{\beta}_{i_1 \ldots i_m} \alpha_{s0} = 0 \quad (s \neq i_l,\ l = 1, \ldots, m)$$

и $\alpha_{s0} \overset{s}{\beta}_{s \ldots s} > 0$, если m – четное и $\overset{s}{\beta}_{s \ldots s} > 0$, если m – нечетное. Тогда система (4.1) монотонно устойчива в конусе $\{K\ \alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ пространства R^n.

Для доказательства утверждения достаточно умножить каждое s-е уравнение системы на α_{s0} и просуммировать их по s от 1 до n.

Из всего сказанного видно, что свойства устойчивости систем в конусе могут исследоваться путем проверки знакоопределенности формы, построенной из коэффициентов системы и элементов базиса рассматриваемого конуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Персидский С.К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5–11.
2. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232с.
3. *Рапопорт Л.Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе // ПММ, 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 674–679.
4. *Житников С.А.* К вопросу о знакоопределенности и знакопостоянстве квадратичных форм в некотором конусе // Дифференциальные уравнения и их приложения. Алма-Ата: КазГУ, 1979. С. 25–34.
5. *Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К.* Условия знакоопределенности четных форм и устойчивость в целом нелинейных однородных систем // ПММ. 1984. Вып. 3. С. 339–347.
6. *Иртегов В.Д., Новиков М.А.* Знакоопределенность форм четвертого порядка от двух переменных // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука, 1984. С. 87–93.

Керчь

Поступила в редакцию
23.VII.1991