Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. А.Л. Куницын, А.А. Туякбаев

УСТОЙЧИВОСТЬ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РЕЗОНАНСЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача устойчивости положения равновесия многомерной автономной гамильтоновой системы в критическом случае простых чисто мнимых корней, когда квадратичная часть гамильтониана не является знакоопределенной, а корни удовлетворяют одновременно двум (или более) резонансным соотношениям четвертого порядка [1]. Рассматриваются случаи как независимых, так и взаимодействующих резонансов. Формулируются условия устойчивости и неустойчивости соответствующей нормализованной системы, содержащей члены до третьего порядка включительно.

Рассмотрим задачу об устойчивости точки покоя автономной гамильтоновой системы уравнений, задаваемой функцией Гамильтона $H(x, y) = H_2 + H_3 + \ldots$, где H_l – формы l-го порядка переменных $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$ в предположении, что форма не является знакоопределенной, а все собственные значения ее матрицы чисто мнимые и различные. Как известно [1, 2], наиболее интересны резонансные случаи (при отсутствии резонансов имеет место полная устойчивость по Биркгофу [2]), в которых может иметь место неустойчивость, вызываемая нелинейными членами соответствующих дифференциальных уравнений.

Будем рассматривать неизученный случай двукратного резонанса четвертого порядка, определяемый наличием двух целочисленных соотношений между собственными значениями $\pm\lambda_s$ ($s = 1, \ldots, N$) вида

$$\Sigma p_\alpha \lambda_\alpha = 0, \quad \Sigma p_\beta \lambda_\beta = 0$$
$$\Sigma |p_\alpha| = \Sigma |p_\beta| = 4 \quad n < N \tag{1}$$

(p_α, p_β – взаимно простые числа) либо вида

$$p_{11}\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_m\lambda_m = 0, \qquad p_{21}\lambda_1 + \Sigma p_\beta \lambda_\beta = 0$$
$$|p_{11}| + |p_2| + \ldots + |p_m| = |p_{21}| + \Sigma |p_\beta| = 4 \tag{2}$$

Здесь и всюду далее суммирование по индексу α ведется от $\alpha = 1$ до $\alpha = m$, по β – от $\beta = m + 1$ до $\beta = n$, по γ – от $\gamma = n + 1$ до $\gamma = N$.

Будем также полагать, что из соотношений (1) и (2) не вытекает других резонансов того же порядка.

Говорят, что в случае (1) резонансы независимы, а в случае (2) имеет место взаимодействие резонансов. Кроме того, будем резонанс называть слабым, если в отсутствие других резонансов он сохраняет устойчивость модельной системы (т.е. системы, получаемой при отбрасывании членов в H выше четвертого порядка). В противном случае будем называть резонанс сильным [4, 5].

Рассмотрим случай независимых резонансов (1). Используя известную процедуру нормализации [1–3], получим следующую нормализованную (до членов четвертого порядка включительно) форму гамильтониана в полярных координатах r_j, θ_j:

$$H = \Sigma \lambda_j r_j + H_4, \quad H_4 = 2\sum_{\nu=1}^{2} A_\nu \sqrt{R_\nu}\cos\Psi_\nu + \Sigma A^{ij} r_i r_j$$
$$R_1 = \Pi r_\alpha^{|p_\alpha|}, \quad R_2 = \Pi r_\beta^{|p_\beta|}, \quad \Psi_1 = \Sigma p_\alpha \theta_\alpha, \quad \Psi_2 = \Sigma p_\beta \theta_\beta \tag{3}$$

Здесь и всюду далее индексы i и j пробегают все значения от 1 до N, а индексы α, β, γ – те же значения, что и в (1) и (2).

Модельная система, соответствующая гамильтониану (3), будет иметь вид

$$\dot r_\alpha = -2p_\alpha A_1 \sqrt{R_1}\sin\Psi_1, \quad \dot r_\beta = -2p_\beta A_2 \sqrt{R_2}\sin\Psi_2, \quad \dot r_\gamma = 0 \tag{4}$$

$$\dot{\psi}_1 = -A_1\sqrt{R_1}\,\Sigma p_\alpha^2/r_\alpha \cos\Psi_1 - 2\Sigma A^{\alpha j} p_\alpha r_j$$

$$\dot{\psi}_2 = -A_2\sqrt{R_2}\,\Sigma p_\beta^2/r_\beta \cos\Psi_2 - 2\Sigma A^{\beta j} p_\beta r_j$$

Покажем, что для системы (4) в случае (1) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если среди резонансов (1) есть хотя бы один сильный, то тривиальное решение системы (4) неустойчиво.

Пусть сильному резонансу соответствуют переменные r_α в (4). Тогда, полагая все $r_\beta = 0$, придем к системе уравнений, описывающих ситуацию с одним резонансом, который, согласно сделанному предположению, приводит к неустойчивости.

Заметим, что условие теоремы 1 остается справедливым для любого числа резонансов.

Рассмотрим теперь случай, когда оба резонанса (1) слабые. При этом необходимо различать два вида слабых резонансов, а именно: а) слабость резонанса обусловлена переменной знака среди компонент резонансного вектора $P = (p_1, \ldots, p_m)$; б) все p_α и p_β одного знака, а слабость каждого резонанса обусловлена неравенствами [3, 6]

$$|A_\nu| < |S_\nu| \quad (\nu = 1, 2) \tag{5}$$

$$S_1 = \frac{1}{2P_1}\sum_{\alpha,\delta=1}^{m} A^{\alpha\delta} p_\alpha p_\delta, \quad S_2 = \frac{1}{2P_2}\sum_{\beta,\sigma=m+1}^{n} A^{\beta\sigma} p_\beta p_\sigma \tag{6}$$

$$P_1 = \Pi p_\alpha^{p_\alpha/2}, \quad P_2 = \Pi p_\beta^{p_\beta/2}$$

В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если оба независимых резонанса (1) слабые и по крайней мере один из них слабый в смысле *а*, то тривиальное решение модельной системы устойчиво.

Рассмотрим вначале случай, когда оба резонанса (1) слабые в смысле *а*, т.е. перемена знака имеет место как среди компонент $p_1, \ldots, p_m$, так и среди $p_{m+1}, \ldots, p_n$. Тогда система обладает интегралом

$$\Phi = \Sigma\gamma_\alpha r_\alpha + \Sigma\gamma_\beta r_\beta + \Sigma r_\gamma$$

(γ_α, γ_β – некоторые постоянные), который является знакоопределенным при условии теоремы. Действительно, требование тождественного обращения в нуль производной $\dot{\Phi}$ для системы (4) приводит к уравнениям

$$\Sigma\gamma_\alpha p_\alpha = 0, \qquad \Sigma\gamma_\beta p_\beta = 0$$

которые всегда имеют строго положительное решение относительно γ_α, γ_β, если есть перемена знака среди чисел $p_1, \ldots, p_m$ и среди $p_{m+1}, \ldots, p_n$.

Пусть теперь только один из резонансов (1) слабый в смысле *а* (не нарушая общности, будем считать, что этим свойством обладает первый из них, а для второго, следовательно, имеем $|A_2| < |S_2|$). В этом случае система (4) имеет следующие интегралы:

$$\Phi = \Sigma\gamma_\alpha r_\alpha + \Sigma r_\gamma, \quad I_\beta = r_\beta - (p_\beta/p_{m+1}) r_{m+1}, \quad H_* = H_4$$

из которых построим интеграл

$$G = \Phi^4 + I_2^4 + \ldots + I_n^4 + H_*^2$$

являющийся знакоопределенным. Действительно, поскольку при $r_\alpha = r_\gamma = 0$ и $r_\beta = (p_\beta/p_{m+1}) r_{m+1}$ имеем $\Phi = I_\beta = 0$, то

$$H_4 = 2(A_2\cos\Psi_2 + S_2)(r_{m+1}^2/p_{m+1}^2) P_2$$

откуда, учитывая неравенство $|A_2| < |S_2|$ убеждаемся, что G – определенно-положительная функция.

Более сложен случай, когда оба резонанса (1) слабые в смысле *б*, т.е. для каждого из них выполняется неравенство (5). Введем обозначения

$$S' = \Sigma A^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \quad S_1' = \frac{S'}{2P_1}, \quad S_2' = \frac{S'}{2P_2} \tag{7}$$

и рассмотрим следующие варианты знаков у величин (6) и (7).

1°. S_1, S_2, S' одного знака.

2°. S_1, S_2 одного знака, а знак S' им противоположен.

3°. S_1, S_2 разных знаков.

В первом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Если модельная система (4) имеет два слабых в смысле *б* независимых резонанса, а среди величин S_1, S_2, S' нет перемены знака, то тривиальное решение системы (4) устойчиво.

Можно убедиться, что в этом случае система (4) имеет следующие интегралы:

$$I_\delta = r_\delta - \frac{p_\delta}{p_1} r_1, \quad I_\sigma = r_\sigma - \frac{p_\sigma r_{m+1}}{p_{m+1}}, \quad \Phi = \Sigma r_\gamma, \quad H_* = H_4$$

$$(\delta = 2, \ldots, m; \ \sigma = m+2, \ldots, n)$$

из которых можно построить знакоопределенный интеграл в виде

$$G = \Sigma I_\delta^4 + \Sigma I_\sigma^4 + H_*^2 \tag{8}$$

Действительно, пусть

$$r_\alpha = (p_\alpha/p_1) r_1, \quad r_\beta = (p_\beta/p_{m+1}) r_{m+1}, \quad r_\gamma = 0$$

Тогда имеем $I_\delta = I_\sigma = \Phi = 0$ и

$$\begin{aligned} H_* &= 2(A_1 \cos\Psi_1 + S_1)(r_1^2/p_1^2) P_1 + 2S'(r_1 r_{m+1}/p_1 p_{m+1}) + \\ &+ 2(A_2 \cos\Psi_2 + S_2)(r_{m+1}^2/p_{m+1}^2) P_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, при условии теоремы 3 форма (9) не обращается в нуль нигде, кроме начала координат.

Рассмотрим второй случай, когда S_1 и S_2 имеют один знак, а знак S' им противоположен. При этом возможны два подслучая:

$$1) \ S_1 S_2 \geqslant S_1' S_2'; \quad 2) \ S_1 S_2 < S_1' S_2' \tag{10}$$

Теорема 4. Пусть в системе (4) имеется два слабых резонанса в смысле *б* и $S_1 S_2 > 0$, $S_1 S' < 0$. Тогда необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения системы (4) при первом условии (10) является выполнение неравенства

$$|S_1 - A_1|/|S_1'| > |S_2'|/|S_2 - A_2| \tag{11}$$

Достаточность докажем при помощи интегралов теоремы 3. Для этого выражение (9) перепишем в виде

$$H_* = [2(A_2 \cos\Psi_2 + S_2) \frac{p_1^2 r_{m+1}^2}{p_{m+1}^2 r_1^2} P_2 + 2S' \frac{p_1 r_{m+1}}{p_{m+1} r_1} +$$

$$+ 2(A_1 \cos\Psi_1 + S_1) P_1] \frac{r_1^2}{p_1^2}$$

При выполнении условия (11) дискриминант уравнения $H_* = 0$ относительно $p_1 r_{m+1}/(p_{m+1} r_1)$ отрицателен, откуда и вытекает знакоопределенность интеграла (8).

Для доказательства необходимости рассмотрим неравенство, противоположное (11) (заметим, что это всегда имеет место, если первое условие (10) выполняется со знаком равенства). Тогда можно проверить, что система (4) имеет частное решение вида

$$r_\alpha = p_\alpha b(t), \quad r_\beta = p_\beta A_1 P_1 \sin\Psi_1^* / (P_2 A_2 \sin\Psi_2^*)$$

$$b(t) > 0, \quad \dot{b}(t) > 0, \quad \Psi_1^* = \text{const}, \quad \Psi_2^* = \text{const}$$

что и доказывает неустойчивость.

Совершенно аналогично доказывается неустойчивость в системе (4) в случае второго условия (10) при выполнении неравенства

$$|S_1 + A_1|/|S_1'| > |S_2'|/|S_2 + A_2|$$

Полное рассмотрение этого подслучая, так же как и случая разных знаков S_1 и S_2, требует разработки методов, отличных от изложенных.

Рассмотрим теперь случай взаимодействия резонансов, зацепленных по одной частоте, так что имеет место соотношение (2). Модельная система при этом примет вид (здесь и всюду далее индекс δ пробегает все натуральные значения от 2 до m)

$$\dot{r}_1 = -2p_{11} A_1 \sqrt{R_1} \sin\Psi_1 - 2p_{21} A_2 \sqrt{R_2} \sin\Psi_2$$

$$\dot{r}_\delta = -2p_\delta A_1 \sqrt{R_1} \sin\Psi_1, \quad \dot{r}_\beta = -2p_\beta A_2 \sqrt{R_2} \sin\Psi_2$$

$$\dot{r}_\gamma = 0$$

$$\Psi_1^{\cdot} = -A_1\sqrt{R_1}(p_{11}^2/r_1 + \Sigma p_\delta^2/r_\delta)\cos\Psi_1 - A_2\sqrt{R_2}(p_{11}p_{21}/r_1)\cos\Psi_2 -$$
$$- 2p_{11}\Sigma A^{1j}r_j - 2\Sigma A^{\delta j}p_\delta r_j \qquad (12)$$
$$\Psi_2^{\cdot} = -A_2\sqrt{R_2}(p_{21}^2/r_1 + \Sigma p_\beta^2/r_\beta)\cos\Psi_2 -$$
$$- A_1\sqrt{R_1}(p_{11}p_{22}/r_1)\cos\Psi_1 - 2p_{21}\Sigma A^{1j}r_j - 2\Sigma A^{\beta j}p_\beta r_j$$
$$R_1 = r_1^{|p_{11}|}\Pi r_\delta^{|p_\delta|}, \quad R_2 = r_1^{|p_{21}|}\Pi r_\beta^{|p_\beta|}$$
$$\Psi_1 = p_{11}\theta_1 + \Sigma p_\delta\theta_\delta, \quad \Psi_2 = p_{21}\theta_1 + \Sigma p_\beta\theta_\beta$$

Теорема 5. Если среди резонансов (2) есть хотя бы один сильный, то тривиальное решение системы (12) неустойчиво.

Доказательство проводится точно так же, как в теореме 1, и распространяется на любое количество резонансов, имеющих только одну общую частоту.

При взаимодействии слабых резонансов, содержащих одну общую частоту, ситуация оказывается более сложной, чем при независимых резонансах. В этом случае достаточные условия устойчивости даются следующей теоремой.

Теорема 6. Если оба резонанса (2) слабые в смысле *а*, то тривиальное решение системы (12) устойчиво; если же один из резонансов например, первый слабый в смысле *а*, второй в смысле *б*, то тривиальное решение системы (12) устойчиво при наличии перемены знака среди чисел $p_2, \ldots$ $\ldots, p_m$ в первом резонансе.

Доказательство первой части теоремы проводится точно так же, как и в случае независимых резонансов (теорема 2).

Для доказательства устойчивости, когда второй резонанс слабый в смысле *б*, т.е. имеет место неравенство

$$|S_2| \equiv |(A^{11}p_{21}^2 + 2p_{21}\Sigma A^{1\beta}p_\beta + \Sigma A^{\beta\sigma}p_\beta p_\sigma)/P_2| > |A_2| \qquad (13)$$

воспользуемся интегралами системы (12)

$$\Phi = \Sigma\gamma_\delta r_\alpha^j \quad (\gamma_\delta > 0) \quad I_\beta = r_\beta - (p_\beta/p_{m+1})r_{m+1}$$
$$I_{\alpha\beta} = r_1 - (p_{11}/p_\delta)r_\delta - (p_{21}/p_\beta)r_\beta$$
$$H_* = 2\Sigma A_\nu\sqrt{R_\nu}\cos\Psi_\nu + \Sigma A^{ij}r_ir_j$$
$$\delta = 2, \ldots, m; \quad \beta = m+2, \ldots, n; \quad \nu = 1, 2; \quad i, j = 1, \ldots, N$$

Построим из них интеграл

$$G = \Sigma I_{\delta\beta}^4 + \Sigma I_\beta^4 + \Phi^4 + H_*^2,$$

при условии теоремы являющийся знакоопределенным. Действительно, если переменные меняются по закону $r_\alpha = 0$, $r_\beta = (p_\beta/p_{m+1})r_{m+1}$, $r_1 = (p_{21}/p_{m+1})r_{m+1}$, так что интегралы Φ, I_β, $I_{\delta\beta}$ тождественно обращаются в нуль, то согласно (13) будем иметь

$$H_* = (A_2\cos\Psi_2 + S_2)P_2r_{m+1}^2/p_{m+1}^2$$

и, следовательно, G – определенно-положительная функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
2. *Биркгоф Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
3. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 738–744.
4. *Куницын А.Л., Медведев С.В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 422–429.
5. *Куницын А.Л., Пережогин А.А.* Об устойчивости нейтральных систем при наличии многократного резонанса четвертого порядка // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 72–77.
6. *Хазин Л.Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 423–431.

Москва

Поступила в редакцию
17.VII.1991