

УДК 539.375

© 1992 г. Р.В. Гольдштейн, А.Б. Мосолов

## ФРАКТАЛЬНЫЕ ТРЕЩИНЫ

Предпринимается попытка учесть влияние нерегулярной структуры поверхности реальной трещины при описании процессов разрушения. Поверхность трещины моделируется при помощи фрактального множества дробной размерности. С использованием самоподобия фрактала предлагается иерархический процесс переноса с масштаба на масштаб упругой энергии, высвобождающейся при продвижении носика трещины. Анализ этого процесса позволяет получить асимптотические выражения для описания поведения напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины. Показано, что фрактальная геометрия трещины приводит к изменению сингулярного поведения полей напряжений в вершине трещины и возникновению аномального размерно зависящего множителя в выражении для коэффициента интенсивности напряжений. Аналогичные результаты получены и для ветвящихся фрактальных трещин. Анализируется распространение фрактальной трещины в хрупком материале с позиций критерия Гриффитса.

Поверхность излома или трещины, формирующаяся при разрушении большинства реальных материалов, весьма нерегулярна и характеризуется наличием неровностей (пиков, долин, зазубрин и т.д.) самых различных размеров. Поэтому реальная трещина на мезомасштабе мало похожа на идеальные трещины с гладкими берегами, рассматриваемые обычно в теории разрушения. Ясно, что сложная структура поверхности разрушения, вносящая существенный вклад в процесс распространения трещин, должна учитываться при его описании. В последние годы была обнаружена важная особенность структуры поверхности трещин. Было установлено [1, 2] статистическое самоподобие микрорельефа поверхности разрушения.

Учитывая самоподобие микрорельефа поверхности трещин для моделирования их структуры, естественно воспользоваться фрактальными поверхностями. Модели трещин на основе фрактальных множеств были предложены в работах [2–6], где также обсуждались экспериментальные методы определения фрактальной размерности трещин.

Используя для моделирования трещин фрактальные поверхности (или фрактальные кривые в плоском случае), следует помнить, что с математической точки зрения фрактал бесконечно извилист, а фрактальная поверхность (линия) имеет бесконечную площадь (длину). Извилистость реальной трещины (как и ее площадь), разумеется, конечны, поэтому существует естественный нижний предел  $\delta$  применимости фрактальной модели. Масштаб  $\delta$  связан обычно с микроструктурой среды. Для металлов, например, это может быть размер зерна, или субзерна.

Ясно также, должен существовать и верхний предел  $L$  применимости фрактальной модели. Этот масштаб может быть связан с геометрическими размерами тела, размером трещины, характерным масштабом неоднородности внешних полей и т.д. Таким образом, фрактальная модель применима для мезомасштабов  $l$ , удовлетворяющих условию  $\delta \ll l \ll L$  (оставим пока в стороне вопрос о возможной мультифрактальной структуре трещины).

Причины и закономерности формирования фрактальной геометрии при разрушении в настоящее время изучены недостаточно, хотя имеются работы, в которых предложены модели, приводящие к фрактальной структуре поверхности трещин или очагов множественного разрушения [6–10]. Ниже эти вопросы не рассматриваются, а основное внимание сосредоточено на следствиях, к которым приводит фрактальность поверхности трещины. Нужно, однако, помнить, что структура поверхности разрушения, ее геометрические характеристики и, в частности, фрактальная размерность  $D$  существенно зависят от механизма разрушения. Особое значение это имеет для интерпретации экспериментальных результатов, поскольку в отличие от многих параметров, встречающихся в механике разрушения, фрактальная размерность разрушения (трещины)  $D$  зависит не только и не столько от вида материала, сколько от характера процесса разрушения.

1. Ограничимся случаем хрупкого разрушения и будем сначала интересоваться развитием трещин в двумерной геометрии (плоские задачи). Рост трещины в твердом теле носит в значительной мере стохастический характер и, следовательно, моделируется

стохастическим фракталом, поэтому наибольший интерес для описания процесса разрушения представляют величины, полученные в результате осреднения по реализациям. К числу таких характеристик относятся, например, асимптотики полей перемещений и напряжений в окрестности кончика трещины и вид функциональной зависимости коэффициента интенсивности напряжений от геометрических размеров трещины.

Интересуясь только "осредненными" характеристиками, можно в качестве модели трещины, выбираемой для анализа, взять какую-либо "типичную" реализацию стохастического фрактала. Условимся рассматривать в качестве такой реализации регулярный геометрический фрактал с соответствующими характеристиками (размерностью, связностью и т.д.).

Итак, предположим, что под действием приложенных нагрузок в рассматриваемом теле распространяется трещина, представляющая собой регулярный геометрический фрактал размерности  $D$  (с собственной топологической размерностью  $d = 1$ ). В качестве примера на фиг. 1 показана фрактальная трещина, имеющая вид классической фрактальной кривой Кох ( $D = \ln 4 / \ln 3$ ).

Разумеется, фрактальная размерность  $D$  далеко не полностью характеризует геометрию трещины, поэтому будем дополнительно считать, что фрактальная трещина выглядит как извилистая линия (без ветвлений), расположенная "в среднем" вдоль оси  $X$ , а силы приложены в направлении  $Y$ . На макромасштабе, следовательно, разрушение происходит "в среднем" по типу I (нормальный разрыв) и управляется уровнем макрокоэффициента интенсивности напряжения  $K_I$ . Именно в этом смысле — осреднения по возможным реализациям траектории трещины — следует понимать полученные ниже результаты.

В случае трещины с гладкими берегами считается, что при продвижении кончика трещины на некоторую величину  $\Delta l$  высвобождающаяся упругая энергия "сбрасывается" в кончик трещины и там диссипирует, расходуясь на образование новой поверхности разрыва. Для фрактальной трещины процесс диссипации упругой энергии выглядит более сложно и интересно, поскольку фрактал обладает многомасштабной иерархической структурой.

Учитывая иерархическое устройство фрактальной трещины, будем считать, что процесс разрушения (продвижения кончика трещины) сопровождается каскадным переносом высвобожденной упругой энергии с больших масштабов на меньшие и, наконец, на микромасштаб, где энергия диссипирует, расходуясь на образование новой поверхности разрыва. Будем полагать пока, что каскадный процесс происходит с сохранением энергии.

Опишем процесс переноса энергии более подробно. Сначала рассмотрим развитие трещины на макромасштабе  $l \gg \delta$ , но все же малом по сравнению с макроразмером  $L$  ( $l \ll L$ ).

При продвижении кончика трещины на макромасштабе  $l$  на величину  $\Delta l$  высвобождается упругая энергия

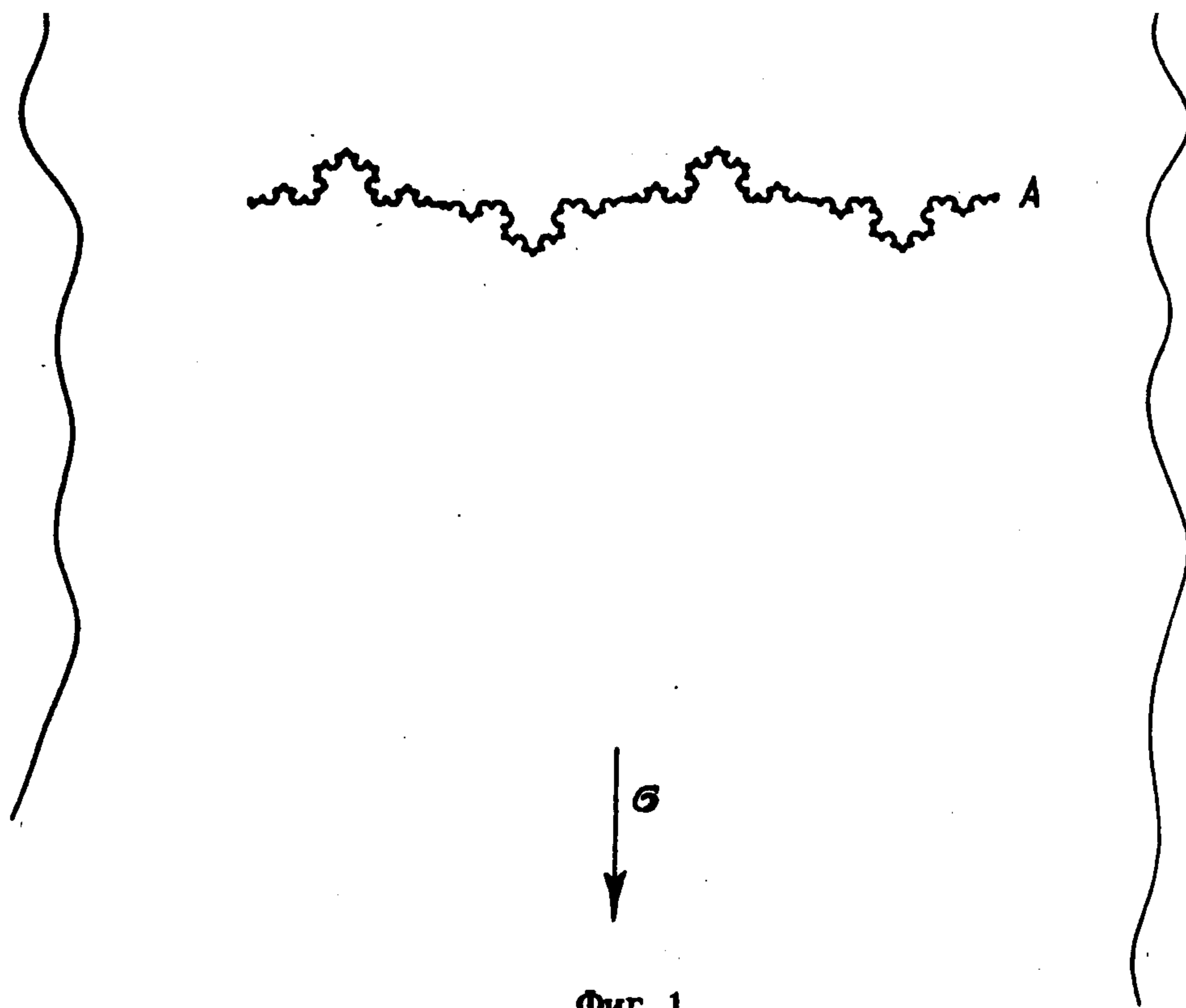
$$\Delta U = G_0 \Delta l \quad (1.1)$$

Удельную плотность высвобожденной энергии  $G_0 = \Delta U / \Delta l$  при  $\Delta l \rightarrow 0$  можно представить в виде  $\Gamma$ -интеграла по контуру  $\gamma$ , представляющему собой окружность радиуса  $r_0 \ll l$  с центром в кончике трещины [11–14]:

$$G_0 = \int_{\gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) ds \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.2)$$

Здесь  $W$  — работа напряжений на соответствующих деформациях (рассчитанная на единицу объема),  $n_i$  — внешняя единичная нормаль к контуру  $\gamma$ ,  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$  — напряжения и перемещения соответственно.

Поскольку в макромасштабе трещина в среднем моделируется трещиной — разрезом



Фиг. 1

нормального разрыва, то упругое поле вблизи ее концов характеризуется осредненным коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  и асимптотической обычной зависимостью от расстояния  $r$  от соответствующего конца трещины, когда смещения  $\sim r^{1/2}$ , а напряжения  $\sim r^{-1/2}$ .

Предположим, что в окрестности кончика фрактальной трещины справедливы следующие более общие асимптотические зависимости:

$$u_i \sim K_I r^{1-\alpha} \varphi_i(\theta), \quad \sigma_{ij} \sim K_I r^{-\alpha} f_{ij}(\theta) \quad (1.3)$$

где  $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений,  $r$  — расстояние от кончика трещины. Разумеется, формулы (1.3) предполагаются справедливыми только во фрактальной области  $\delta \ll r \ll L$ . Показатель степени  $\alpha$  будем пока считать неизвестным. Во фрактальном случае показатель  $\alpha$  должен зависеть от размерности трещины.

Подставляя соотношения (1.3) в (1.2), получим

$$G_0 \sim E^{-1} K_I^2 l^{1-2\alpha} \quad (1.4)$$

Вычислим теперь величину высвобождаемой упругой энергии, рассматривая трещину на  $n$ -м микромасштабе  $l_n = l/p^n$ , где  $p$  — масштабный параметр, определяющий изменение размеров фрагментов трещины при масштабировании.

Будем считать, что и на  $n$ -м микромасштабе осредненно трещину можно моделировать совокупностью элементов трещин нормального разрыва. Если на макромасштабе  $l$  кончик трещины продвигается на  $\Delta l$ , то на масштабе  $l_n$  каждый фрагмент трещины увеличивается на величину  $\Delta l_n = \Delta l/p^n$ . Пусть  $B_n$  — число элементов трещины масштаба  $l_n$ , тогда вместо соотношения (1.1) можем написать

$$\Delta U = B_n G_n \Delta l_n$$

где  $G_n$  — плотность высвобождаемой упругой энергии на  $n$ -м микромасштабе  $l_n$ .

Следовательно, каскадный процесс переноса упругой энергии описывается цепочкой равенств

$$\Delta U = G_0 \Delta l = B_1 G_1 \Delta l_1 = \dots = B_n G_n \Delta l_n = \dots$$

где учтено, что при переходе от масштаба  $l_{n+1}$  к масштабу  $l_n$  высвобождаемая энергия сохраняется. Закон сохранения энергии имеет очевидный вид

$$B_n G_n \Delta l_n = B_{n+1} G_{n+1} \Delta l_{n+1} \quad (1.5)$$

Предположим теперь, что  $G_n = G(l_n)$ , тогда закон сохранения энергии (1.5) позволяет получить для функции  $G$  следующее ренормгрупповое уравнение:

$$G(l_n) = \frac{B_{n+1}}{B_n} \frac{\Delta l_{n+1}}{\Delta l_n} G\left(\frac{l_{n+1}}{l_n} l_n\right) \quad (1.6)$$

или

$$G(l_n) = \frac{1}{p} \frac{B_{n+1}}{B_n} G\left(\frac{l_n}{p}\right) \quad (1.7)$$

Разыскивая решение уравнения (1.7) в виде

$$G(l_n) \sim l_n^x \quad (1.8)$$

и не делая различие между фрактальной размерностью  $D$  и размерностью самоподобия  $D_s$  [1], получим

$$x = D - 1 \quad (1.9)$$

Для трещины в виде кривой Кох (см. фиг. 1) очевидно, что  $p = 3$ ,  $B_{n+1}/B_n = 4$ , поэтому ренормгрупповое уравнение имеет вид

$$G(l_n) = 4/3 G(1/3 l_n)$$

Можно проверить, что в этом случае

$$G(l_n) \sim l_n^{D-1}, \quad D = \ln 4 / \ln 3$$

Учитывая соотношения (1.8) и (1.9), имеем

$$G_0 = G(l) \sim l^{D-1} \quad (1.10)$$

Сравнивая соотношения (1.4) и (1.10), получим

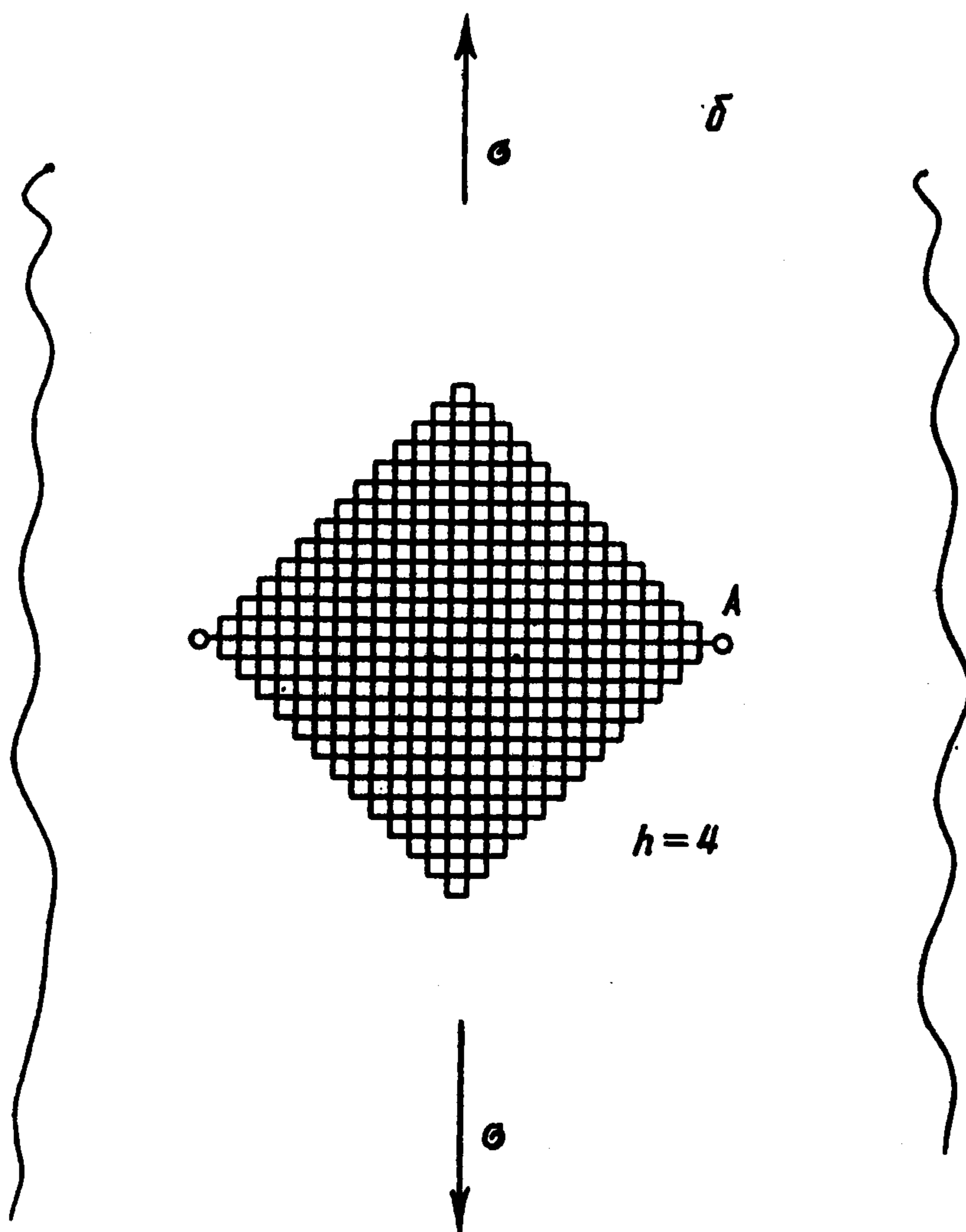
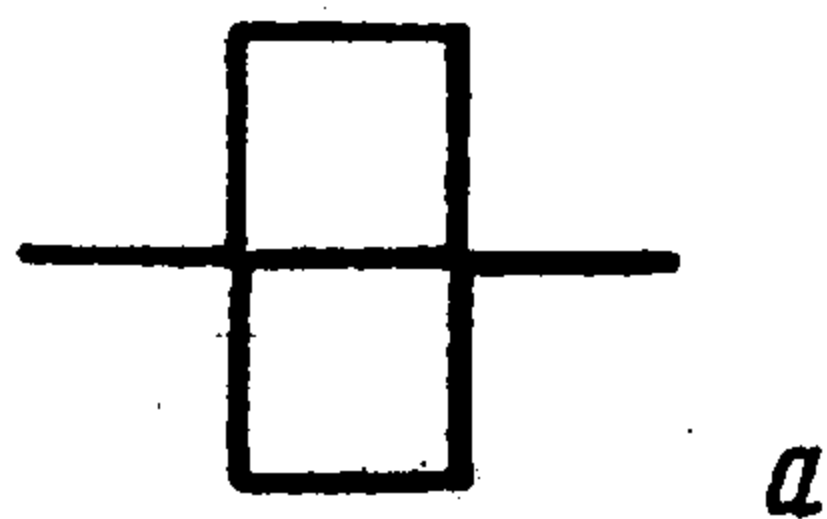
$$\alpha = (2 - D)/2 \quad (1.11)$$

Следовательно, фрактальная геометрия трещины вносит существенные изменения в асимптотику упругих полей в окрестности ее кончика.

Для нефрактальной трещины, когда  $D = 1$ , получается, как и следовало ожидать,  $\alpha = 1/2$ . Если траекторию трещины моделировать при помощи броуновского случайного процесса ( $D = 1,5$ ), то  $\alpha = 0,25$ .

Интересный результат получается для фрактальной трещины (точнее, фрактального разреза), порожденной фракталом с генератором, показанным на фиг. 2, а. Можно убедиться, что такой фрактал имеет размерность  $D = 2$  и всюду плотно заполняет квадрат, изображенный на фиг. 2, б. Таким образом, в вершине  $A$  имеется как бы угловой вырез, однако напряжения в этой точке несингулярны ( $\alpha = 0$ ). Последнее связано с тем, что материал внутри квадрата хотя и является "полностью разрушенным", но не полностью разгружен, и этого оказывается достаточно для "подавления" сингулярности в угловой точке  $A$ .

Аналогичные результаты получаются и в случае, когда траектория трещины на мезомасштабе выглядит полностью хаотичной и может быть смоделирована при помощи



Фиг. 2

случайного процесса типа белого шума. В этом случае, как известно,  $D = 2$ , и поэтому напряжения в окрестности такой трещины несингулярны, а перемещения  $\Delta u \sim r$ .

Для раскрытия в кончике фрактальной трещины на основании соотношений (1.3), (1.11) получим асимптотическую формулу

$$\Delta u \sim r^{D/2}$$

2. Асимптотики (1.3) при условии (1.11) и соображения размерности позволяют заключить, что для фрактальной трещины имеется следующая зависимость коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  от геометрических размеров трещины:

$$K_I \sim \sigma l^\alpha, \quad \alpha = 1 - D/2 \quad (2.1)$$

Этот результат можно получить и более простым путем на основе гриффитсовского анализа хрупкого разрушения.

Следуя критерию Гриффитса будем считать, что в равновесном случае при увеличении размера трещины на  $\Delta l$  величина высвобождающейся упругой энергии  $\Delta U_e$  компенсируется приращением поверхностной энергии  $\Delta U_s$ , вновь образуемого разреза, т.е.

$$\Delta U_e = \Delta U_s \quad (2.2)$$

Очевидно, что

$$\Delta U_e \sim \frac{1}{2} E^{-1} \sigma^2 l \Delta l, \quad \Delta U_s = \gamma \Delta s$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\gamma$  – коэффициент поверхностной энергии,  $\Delta s$  – приращение длины трещины.

Во фрактальном случае "истинная" длина трещины  $s$  связана с ее геометрическим размером  $l$  масштабным (скейлинговым) соотношением  $s \sim (l/\epsilon)^D \epsilon$ , где  $\epsilon$  – масштаб измерения. Поэтому

$$\Delta s \sim (l/\epsilon)^{D-1} \Delta l \quad (2.3)$$

Следовательно, в равновесном случае из (2.2) и (2.3) получаем

$$\sigma^2 l (l/\epsilon)^{1-D} \sim E \gamma \quad (2.4)$$

Используя определение коэффициента интенсивности напряжений, получим для фрактальной трещины снова зависимость типа (2.1).

Обозначая  $K_I^0 \sim \sigma \sqrt{l}$  коэффициент интенсивности напряжений для обычного одномерного разреза размера  $l$ , с точностью до мультипликативной постоянной порядка единицы получим из (2.4)

$$K_I^f \sim K_I^0 (l/\epsilon)^{(1-D)/2} \quad (2.5)$$

Таким образом, при учете фрактальной геометрии поверхности трещины в выражении для коэффициента интенсивности напряжений возникает необычный масштабный фактор, описываемый формулой (2.5). При возрастании  $D$  (грубо говоря, при увеличении извилистости трещины) коэффициент интенсивности напряжений убывает, причем  $\ln K_I^f$  линейно зависит от  $D - 1$ . Последнее хорошо согласуется с результатами эксперимента [4].

Заметим, что при  $D = 2$  поле напряжений в окрестности дефекта несингулярно, следовательно, существенно изменяются асимптотики поля  $\sigma_{ij}$  – в них исчезают сингулярные слагаемые, ответственные за появление коэффициентов интенсивности напряжений. Иными словами, фрактальная трещина размерности 2 "в среднем" выглядит как полость или каверна, а поле напряжений в окрестности дефекта описывается при помощи "обычного" коэффициента концентрации напряжений.

Полученные результаты переносятся на случай трещин в трехмерных телах. Следует только помнить, что в трехмерном случае можно рассматривать различные модели трещин с фрактальной геометрией. Например, можно представить себе приблизительно дискообразную в плане трещину размера  $R$ , поверхности которой будут фракталами размерности  $2 < D < 3$ . Используя критерий Гриффитса, можно получить, что в этом случае

$$K_I \sim \sigma R^{(3-D)/2}$$

Другая фрактальная модель получается, если считать поверхности трещины гладкими, а фронт трещины – фрактальной кривой размерности  $1 < D < 2$ . Для такой модели

$$K_I \sim \sigma R^{(2-D)/2}$$

Соотношения (2.4), (2.5) используем для формулировки силового критерия предельного равновесия фрактальной трещины. Запишем его в форме

$$K_I^f = K_{Ic}^f \quad (2.6)$$

где  $K_{Ic}^f$  – критическое значение коэффициента интенсивности, характеризующее сопротивление материала росту трещины масштаба  $l$ . Примем, исходя из (2.4), (2.5), что

$$K_{Ic}^f = K_{Ic} l^{(D-1)/2} \quad (2.7)$$

Здесь  $K_{Ic}$  – трещиностойкость материала в макромасштабе.

Заметим, что обычно в теории трещин величина  $K_{Ic}$  считается постоянной материала, не зависящей от длины трещины. Эксперименты на образцах с макротрещинами подтверждают для ряда ма-

териалов (в частности, хрупких и квазихрупких) справедливость этого предположения. В то же время присутствие в материалах структурных масштабов приводит к тому, что для трещин разных масштабов величина  $K_{Ic}$  может оказаться разной. Однако размерность  $K_{Ic}$  при этом сохраняется ( $[K_{Ic}] = [F] \cdot [L]^{-3/2}$ ). Для фрактальной трещины картина иная. Параметр  $K_{Ic}^f$  при изменении  $D$  изменяет не только численное значение, но и размерность. Фрактальную трещиностойкость материала характеризует, таким образом, не число, а зависимость (2.7).

Поясним, как в соответствии с (2.7) может происходить переход к обычному описанию макротрещиностойкости с параметром  $K_{Ic}$ . Поскольку  $D > 1$ , фрактальная трещина может устойчиво распространяться при возрастании длины и коэффициента интенсивности напряжений (разумеется, в определенном диапазоне). Следует помнить, что соотношение (2.7) справедливо лишь на мезомасштабе, определяемом областью применимости фрактальной модели. При переходе с масштаба на масштаб (в частности, с мезомасштаба на макромасштаб экспериментов) нужно учитывать, что механизмы разрушения также могут иметь характерный масштаб применимости.

Фрактальная размерность трещины  $D$  весьма существенно зависит от механизма разрушения, поэтому следует учитывать при переходе с масштаба на масштаб изменение размерности  $D$ . Иными словами, разрушение следует рассматривать как многоуровневый мультифрактальный процесс. Размерность разрушенной структуры (в нашем случае трещины) будет зависеть от масштаба:  $D = D(l)$ . Поскольку на макромасштабе  $L$  фрактальная трещина выглядит просто как одномерный разрез, естественно считать, что  $D(L) = 1$ .

Это, в частности, означает, что на макромасштабе, который обычно и доступен в экспериментах, зависимость (2.6) насыщается и выходит на некоторую асимптотику  $K_{Ic}^M$ , определяющую макротрещиностойкость материала. Можно ожидать, что представления о фрактальной трещиностойкости окажутся полезными, в частности, при анализе роста коротких трещин, закономерности которого не удастся описать, исходя из обычных представлений теории трещин в терминах параметра  $K_{Ic}$ . Этот вопрос, так же как и само критериальное соотношение (2.6), (2.7), требует специального экспериментального исследования.

Приведенные выше результаты получены в предположении, что при каскадном процессе переноса энергия сохраняется. Это ограничение может быть излишне жестким даже при идеально хрупком разрушении, поскольку, как известно, часть энергии рассеивается вследствие динамических эффектов на микроуровне. Тем более если разрушение не является идеально хрупким, всегда будет иметь место диссипация энергии при переходе от одного структурного уровня к другому.

Процессы диссипации энергии при переходе от одного структурного уровня к другому легко учесть, сохраняя предположение об автомодельности (самоподобии) процесса переноса, будем считать, что при переходе с масштаба  $l_{n+1}$  на масштаб  $l_n$  переносится лишь  $q$ -я доля энергии, а  $(1 - q)$ -я доля энергии теряется, расходуясь в различных диссипативных процессах, сопровождающих развитие трещины. Тогда закон сохранения энергии в каскадном процессе (1.6) нужно переписать в виде

$$qB_n G_n \Delta l_n = B_{n+1} G_{n+1} \Delta l_{n+1}, \quad q < 1 \quad (2.8)$$

Повторяя практически дословно все рассуждения, приведшие к решению (1.8), для закона сохранения энергии в виде (2.7) получим, что

$$G(l_n) \sim l_n^{D-1+\beta}, \quad \beta = -\ln q / \ln p > 0.$$

поэтому  $\alpha = \frac{1}{2}(2 - D - \beta)$ , показатель  $\beta$  как раз и учитывает влияние диссипативных процессов.

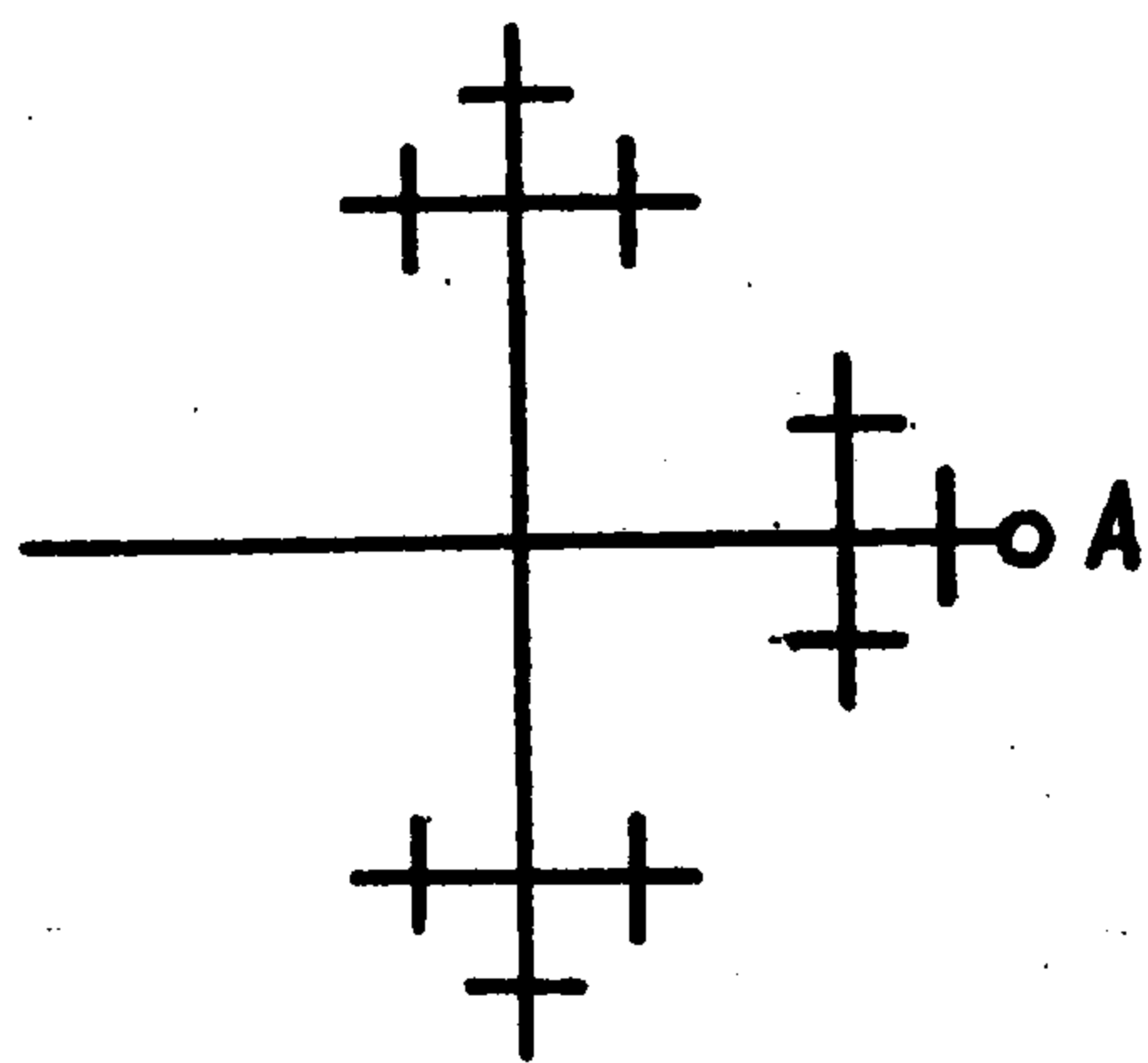
3. Кроме фрактальных трещин, представляющих собой извилистую фрактальную линию, имеется еще богатый и важный класс трещин, в описании которых с успехом могут быть использованы методы фрактальной геометрии. Речь идет о ветвящихся трещинах.

Аналогично тому, как это было сделано в разд. 2 для "извилистой" трещины, можно получить ренормгрупповое уравнение для плотности высвобождающейся энергии и в случае самоподобной (фрактальной) ветвящейся трещины. Рассмотрим в качестве примера модельную трещину, изображенную на фиг. 3.

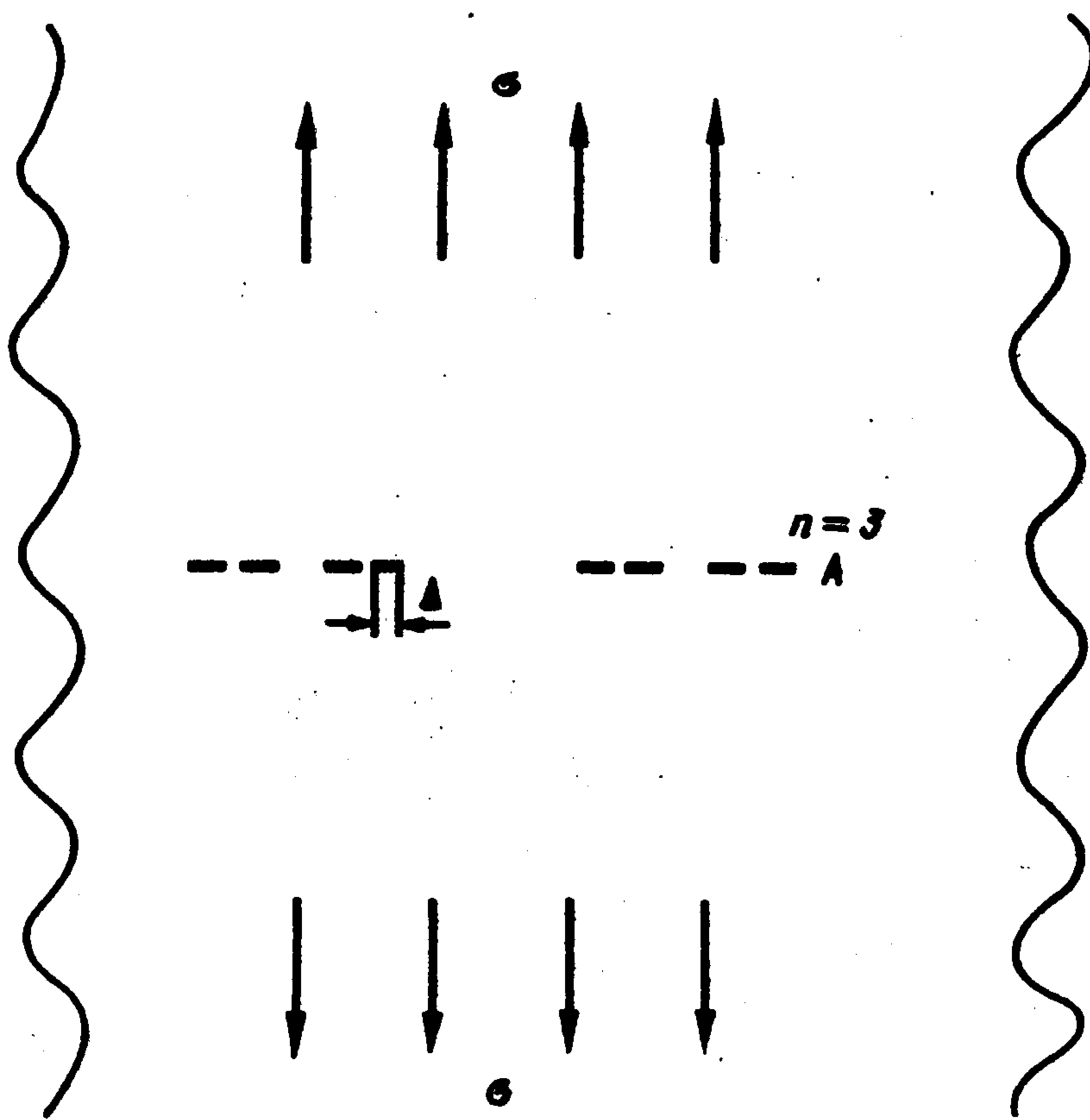
В этом случае уравнения, аналогичные (1.1)–(1.5), приводят к закону сохранения энергии в виде

$$B_n G_n \Delta l_n = B_{n+1} G_{n+1} \Delta l_{n+1},$$

где  $G_n$  — энергия, высвобождающаяся при продвижении трещин  $n$ -го уровня.



Фиг. 3



Фиг. 4

Соответствующее ренормгрупповое уравнение для  $G_n = G(l_n)$  можно записать в виде

$$G(l_n) = \frac{B_{n+1}}{B_n} \frac{\Delta l_{n+1}}{\Delta l_n} G\left(\frac{l_{n+1}}{l_n} l_n\right) \quad (3.1)$$

В рассматриваемом случае (фиг. 3)

$$G(l_n) = 3/2 G(1/2 \cdot l_n)$$

Для фрактальной ветвящейся трещины окрестность вершины любой трещины масштаба  $l_n$  выглядит точно так же, как и окрестности вершины  $A$  всей трещины на масштабе  $l$ . Поэтому, если считать, что  $G(l) \sim l^{1-2\alpha}$ , то и  $G(l_n) \sim l_n^{1-2\alpha}$ . Подставляя такое выражение для  $G$  в ренормгрупповое уравнение (3.1), получим для  $\alpha$  то же, что и прежде, выражение  $\alpha = 1/2(2 - D)$ .

Интересный вырожденный пример "ветвящейся" трещины дает канторовская трещина, показанная на фиг. 4, а. Эту трещину можно рассматривать так же, как ансамбль микротрещин размера  $\Delta \sim 1/3^n$ , расположенных по закону канторова множества. В этом случае особенность в вершине "трещины" можно вычислить непосредственно.

Действительно, величина  $G$ , вычисленная на макроуровне в масштабе  $l$ , имеет вид

$$G \sim l^{1-2\alpha} \quad (3.2)$$

С другой стороны,

$$G \sim \sum_l G_l \quad (3.3)$$

где  $G_l$  — энергия, высвобождающаяся при продвижении  $l$ -й микротрещины масштаба  $\Delta$ . Соотношение (3.3) следует из того, что вне поверхностей трещин энергия не высвобождается (и не диссипирует), поскольку рассматриваемое тело считается упругим.

Используя для вычисления  $G_l$  упругое поле в вершине разреза, получим  $G_l \sim \Delta$ . Далее, учитывая, что  $\Delta \sim 1/3^n$ , имеем  $G \sim \sum \Delta \sim 2^n \Delta \sim (2/3)^n$ . Полагая  $l \sim 3^n$ , находим

$$G \sim l^{D-1}, \quad D = \ln 2 / \ln 3$$

Сравнивая соотношения (4.2) и (4.4), видим, что, как и следовало ожидать,  $\alpha = 1/2 \cdot (2 - D)$ .

**Замечание.** При описании процесса фрактального разрушения распространения фрактальной тре-

щины может быть использован подход, основанный на методе инвариантных Г-интегралов или Г-вычетов [11–14]. Следует, однако, иметь в виду, что Г-интеграл, определяемый обычно по формуле (1.2), во фрактальном случае перестает быть инвариантным. Связано это с наличием сингулярностей упругих полей на всех масштабах рассмотрения. Учитывая иерархическую структуру сингулярностей поля напряжений в случае фрактальных трещин, для определения и вычисления инвариантных Г-интегралов можно записать ренормгрупповое уравнение вида (3.1) аналогично тому, как это было сделано для плотности высвобождаемой энергии  $G$ . Фактически предложенный подход является одним из путей "восстановления" инвариантности Г-интеграла во фрактальном случае. Полученные при помощи такого подхода результаты не отличаются от приведенных выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1983. 468 p.
2. Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J. Fractal character of fracture surfaces of metals // Nature. 1984. V. 308. N 5961. P. 721–722.
3. Mecholsky J.J., Mackin T.J. Fractal analysis of fracture in Ocala chert // J. Mater. Sci. Lett. 1988. V. 7, N 11. P. 1145–1147.
4. Mu Z.Q., Lung C.W. Studies on the fractal dimension and fracture toughness of steel // J. Phys. D. 1988. V. 21. N 5. P. 848–850.
5. Bessendorf M.N. Stochastic and fractal analysis of fracture trajectories // Intern. J. Engng. Sci. 1987. V. 25. N 6. P. 667–672.
6. Лунг Ч. Фракталы и разрушение металлов с трещинами. Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 260–265.
7. Meaking P., Li G., Sander L.M., Louis E., Guinea F. A simple two-dimensional model for crack propagation. // J. Phys. A. 1989. V. 22. N 9. P. 1393–1403.
8. Xie Heping of fractal effect of irregularity of crack branching on the fracture toughness of brittle materials // Intern. J. Fracture. 1989. V. 41. N 4. P. 267–274.
9. Мосолов А.Б., Динариев О.Ю. Автомодельность и фрактальная геометрия разрушения // Проблемы прочности. 1988. № 1. С. 3–7.
10. Peng G., Tian D. The fractal nature of a fracture surface // J. Phys. A. 1990. V. 23. N 14. P. 3257–3261.
11. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде. // ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 476–488.
12. Черепанов Г.П. Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике // ПИИ. 1977. Т. 41. № 3. С. 399–412.
13. Черепанов Г.П. Invariant G-integrals. // Eng. Fract. Mech. 1981. V. 14. N 1. P. 39–58.
14. Черепанов Г.П. Вычисление инвариантных интегралов в особых точках // Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990. С. 351–364.

Москва

Поступила в редакцию  
5. V. 1991