

УДК 533.6.011+535.23

© 1992 г. И.Г. Брыкина, В.В. Русаков, В.Г. Щербак

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ К ПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

В рамках модели гиперзвукового вязкого ударного слоя исследуется стационарное трехмерное обтекание затупленных тел потоком однородного газа. Интегральным методом последовательных приближений получены аналитические формулы для распределения на боковой поверхности величины теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения. Показано, что при умеренных и больших числах Рейнольдса распределение относительного теплового потока слабо зависит от числа Рейнольдса и других газодинамических параметров течения. Точность полученных формул оценивается путем сравнения с результатами численных решений уравнений трехмерного вязкого ударного слоя для тел различной формы.

Аналогичные формулы были получены [1] для окрестности плоскости симметрии пространственных тел. Отметим, что в отличие от формул для относительных тепловых потоков, предложенных в теории пограничного слоя (например, [2, 3]), предлагаемые формулы не требуют знания параметров течения на внешней границе пограничного слоя (т.е. расчета трехмерного невязкого течения) и расчета невязких линий тока на поверхности. Они зависят только от геометрических характеристик обтекаемого тела.

Пусть поверхность обтекаемого тела задана в декартовой системе координат уравнением  $z = f(x, y)$ , вектор скорости набегающего потока  $V_\infty$  совпадает по направлению с осью  $z$ , начало координат помещено в точку торможения потока, а оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскостях главных кривизн поверхности в этой точке. Выберем систему криволинейных неортогональных координат  $\{x^i\}$ , нормально связанную с обтекаемой поверхностью:  $x^3$  — расстояние по нормали к поверхности, а в качестве двух других, выбранных на поверхности, используются декартовы координаты точки пересечения этой нормали с поверхностью:  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $z = f(x^1, x^2)$ . Для уравнений трехмерного гиперзвукового вязкого ударного слоя в системе координат  $\{x^i\}$  [4] численные расчеты показали, что при  $Re \geq 100$  для определения теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке, можно использовать в качестве граничных условий условия прилипания на теле и обычные соотношения Рэнкина — Гюгонио. Распределения относительного теплового потока вдоль поверхности тела будут такими же, как и при учете эффектов скольжения на теле и использовании модифицированных соотношений Рэнкина — Гюгонио на ударной волне.

В случае, когда уравнения для управляющих функций решались в локально-автономном приближении, была получена [5] в первом приближении метода последовательных приближений [6] простая формула для относительного теплового потока. При этом начальное приближение для давления задавалось по формуле Ньютона, что может в некоторых случаях приводить к значительным ошибкам в определении тепловых потоков. Если учесть отличие распределения давления от ньютоновского, т.е. определять начальное приближение для давления из уравнения импульсов в проекции на нормаль к поверхности, то в первом приближении метода последовательных приближений можно получить следующую формулу для величины относительного теплового потока:

$$\frac{q}{q_0} = \cos^{3/2} \alpha \sqrt{\frac{H}{H_0 \lambda}}, \quad \lambda = 1 + \frac{4}{15} \frac{f_{xx} f_x^2 + 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_y^2}{\cos^3 \alpha H} \quad (1)$$

Здесь  $H$  — средняя кривизна поверхности в рассматриваемой точке, равная полусумме главных кривизн поверхности в этой точке:

$$H = \frac{f_{xx}(1+f_y) + f_{yy}(1+f_x) - 2f_{xy}f_xf_y}{2[1+f_x^2+f_y^2]^{3/2}} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = (1+f_x^2+f_y^2)^{-1/2}$$

Нулевой индекс соответствует точке торможения потока, множитель  $\lambda$  характеризует отличие распределения давления от Ньютоновского,  $\alpha$  — угол между направлением скорости набегающего потока и вектором нормали к поверхности.

В силу того что при выводе формулы (1) использовалось локально-автомодельное приближение, она может оказаться недостаточно точной для некоторых тел.

Более точные результаты могут быть получены при использовании комбинированного подхода, состоящего в применении осесимметричной аналогии [7] и формулы для относительного теплового потока на поверхности осесимметричного тела [1], полученной без использования локально-автомодельного приближения.

Было установлено [7] соотношение подобия, выражающее тепловой поток на боковой поверхности пространственного тела (ПТ) через его значение на поверхности некоторого эквивалентного осесимметричного тела (ЭОТ). Форма последнего определяется только геометрическими характеристиками и не зависит от газодинамических параметров течения. При умеренных и больших числах Рейнольдса ( $Re \gtrsim 100$ ) это соотношение подобия можно записать следующим образом.

Пусть поверхность тела задана в цилиндрической системе координат  $r, z, \varphi$  уравнением  $r = r(z, \varphi)$ , где ось  $z$  проходит через точку торможения и направлена вдоль вектора скорости набегающего потока  $V_\infty$ . Тогда тепловой поток  $q$  на поверхности ПТ вдоль фиксированного меридионального сечения  $\varphi = \varphi_*$  можно определить соотношением

$$q = \sqrt{H/H^0} q^0 \quad (3)$$

Здесь  $q^0$  — тепловой поток на поверхность ЭОТ, форма которого задается соотношением

$$r^0(z) = \int_0^z r_z (1 + (r_\varphi/r)^2)^{-1/2} dz \Big|_{\varphi = \varphi_*} \quad (4)$$

$H$  — средняя кривизна поверхности ПТ в рассматриваемой точке,  $H^0$  — средняя кривизна поверхности ЭОТ в данной точке.

ЭОТ строилось таким образом, чтобы угол между нормалью к его образующей и направлением набегающего потока  $\alpha^0$  изменялся вдоль образующей так же, как угол  $\alpha$  (между нормалью к поверхности ПТ и скоростью  $V_\infty$ ) вдоль выбранного меридионального сечения, т.е.  $\alpha^0 = \alpha$ .

В цилиндрической системе координат имеем

$$H = \frac{r_{zz}r(r^2+r_\varphi^2) + (1+r_z^2)(r_{\varphi\varphi}r - 2r_\varphi^2 - r^2) - 2r_zr_\varphi(r_{z\varphi}r - r_zr_\varphi)}{2[r^2(1+r_z^2) + r_\varphi^2]^{3/2}} \quad (5)$$

$$H^0 = \frac{r^0(r^0)_{zz} - (1+(r_z^0)^2)}{2r^0(1+(r_z^0)^2)^{3/2}}$$

В точке торможения соотношение (3) принимает вид

$$q_0 = \sqrt{\frac{1+k}{2}} q_0^0 \quad (6)$$

Здесь  $k$  — отношение главных кривизн поверхности в критической точке,  $q_0^0$  — тепловой поток в критической точке осесимметричного тела, например, сферы.

Для распределения относительного теплового потока вдоль поверхности осесимметричного тела была получена [1] приближенная формула

$$\frac{q^0}{q_0^0} = \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha r^0}{2I}, \quad I = \lambda^0 \left[ \int_0^s \frac{\cos^2 \alpha \sin \alpha r^{0^2}}{\lambda^0} ds \right]^{1/2} \quad (7)$$

$$\lambda^0 = 1 + \frac{4}{15} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{R^0 H^0}, \quad R^0 = \frac{(1 + (r^0)_z^2)^{3/2}}{(r^0)_{zz}}$$

Здесь  $s$  — длина дуги вдоль образующей, измеряемая от точки торможения,  $R^0$  — радиус кривизны образующей.

Учитывая соотношения (3), (6) и (7), можем получить следующее соотношение для величины относительного теплового потока вдоль меридионального сечения ПТ:

$$\frac{q}{q_0} = \frac{H^{1/2} \cos^2 \alpha \sin \alpha r^0}{[2(1+k)H^0]^{1/2} I} \quad (8)$$

Эта формула носит инвариантный характер и не зависит от выбора системы координат. Если поверхность тела задана в цилиндрической системе координат, то величина  $r^0$ , задающая форму ЭОТ, находится по формуле (4), а величины  $H$ ,  $H^0$ ,  $\lambda^0$  — из (5), (7). Если же поверхность тела задана в декартовой системе координат  $x, y, z$ , то для радиуса  $r^0$  ЭОТ, соответствующего выбранному меридиональному сечению  $y = cx$ , получается параметрическое выражение

$$r^0(x) = \int_0^x [f_x(x, cx) + cf_y(x, cx)] [f_x^2(x, cx) + f_y^2(x, cx)]^{-1/2} dx \quad (9)$$

$$z(x) = f(x, cx)$$

В декартовой системе координат  $H$  определяется из (2),  $H^0$  и  $\lambda^0$  — по формулам (5) и (7), где надо положить

$$r_z^0 = (f_x^2 + f_y^2)^{-1/2}$$

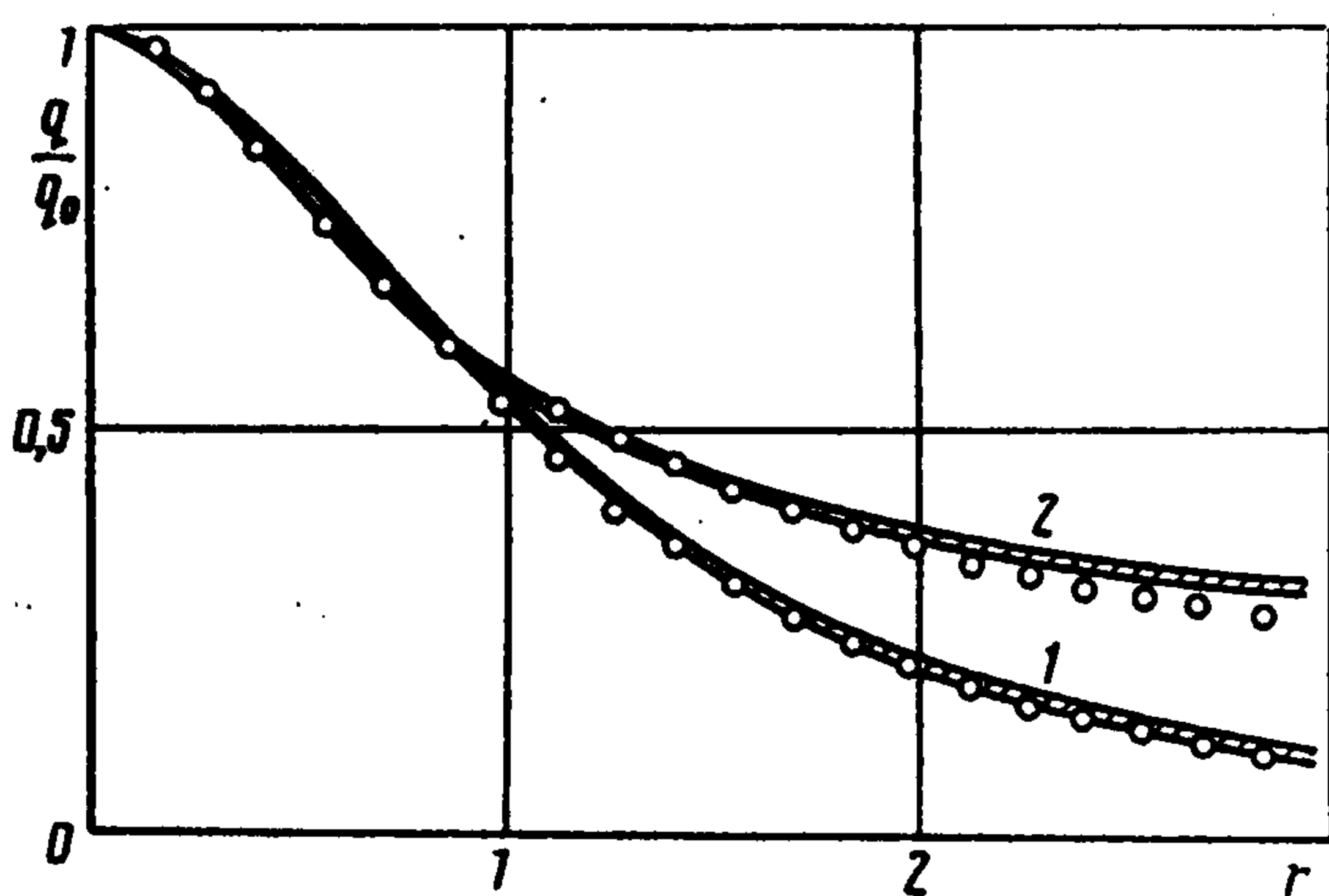
$$r_{zz}^0 = \frac{f_x(f_{xx} + cf_{yy}) + f_y(f_{xy} + cf_{yy})}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}(f_x + cf_y)}$$

Формула (8) предполагает интегрирование вдоль поверхности ЭОТ, форма которого заранее не известна и которую надо сначала рассчитать. При проведении расчетов удобнее проводить интегрирование по заранее известной координате. Учитывая, что  $\alpha = \alpha^0$ , и переходя от интегрирования по  $s$  к интегрированию по  $z$ , можно получить более удобный для практического использования вид формулы (8)

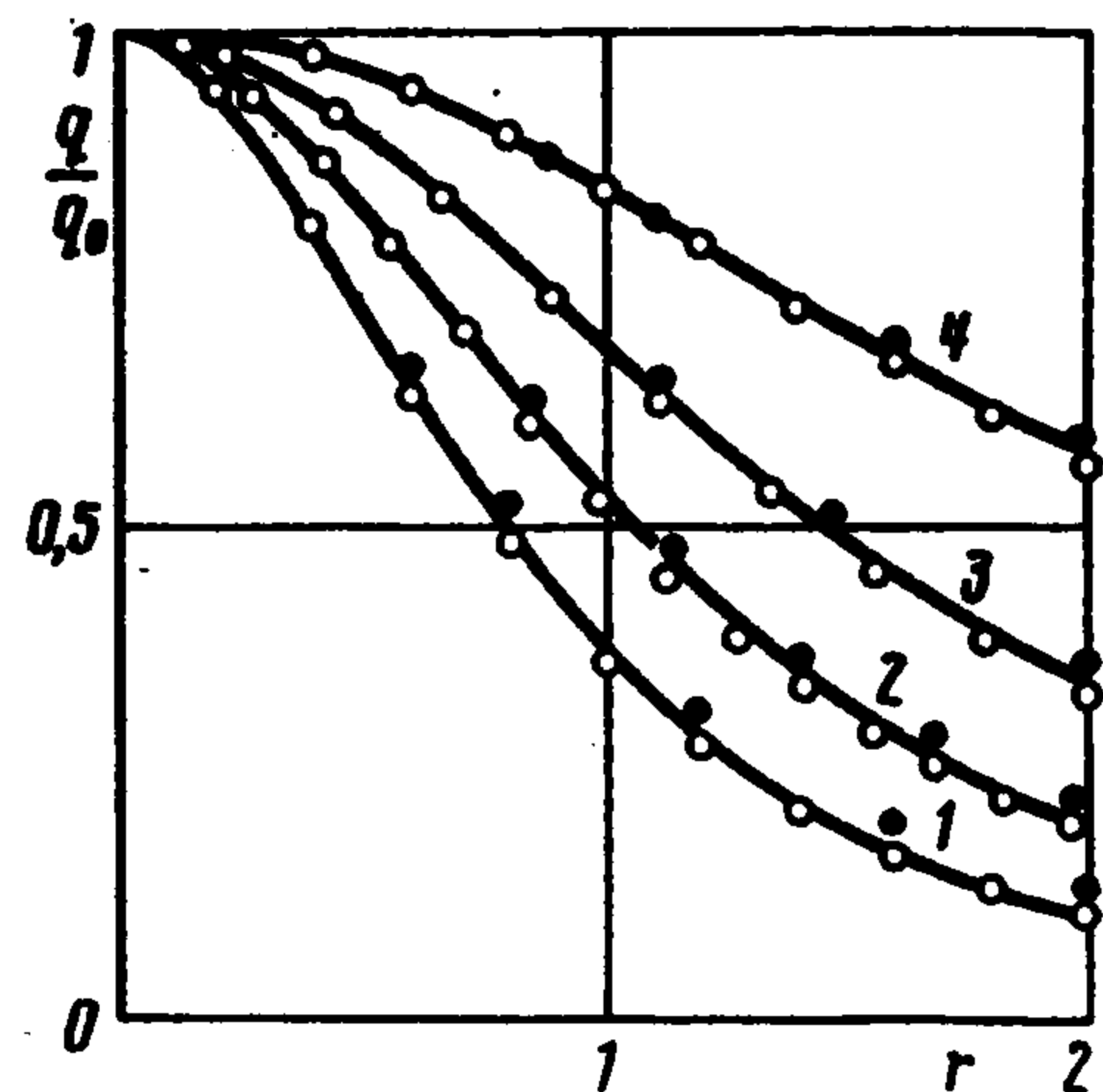
$$\frac{q}{q_0} = \frac{1}{\lambda^0} H^{1/2} \cos^2 \alpha \sin \alpha r^0 \left[ 2(1+k)H^0 \int_0^z \frac{\cos^2 \alpha (r^0)^2}{\lambda^0} dz \right]^{-1/2} \quad (10)$$

Из полученных приближенных соотношений для  $q/q_0$  следует, что при умеренных и больших числах Рейнольдса ( $Re \geq 100$ ) величина относительного теплового потока на боковой поверхности тела перестает зависеть от числа  $Re$  (при низких числах  $Re$  такая зависимость существенна), а также от температуры поверхности  $T_w$  и отношения удельных теплоемкостей  $\gamma$  и определяется только геометрическими свойствами поверхности.

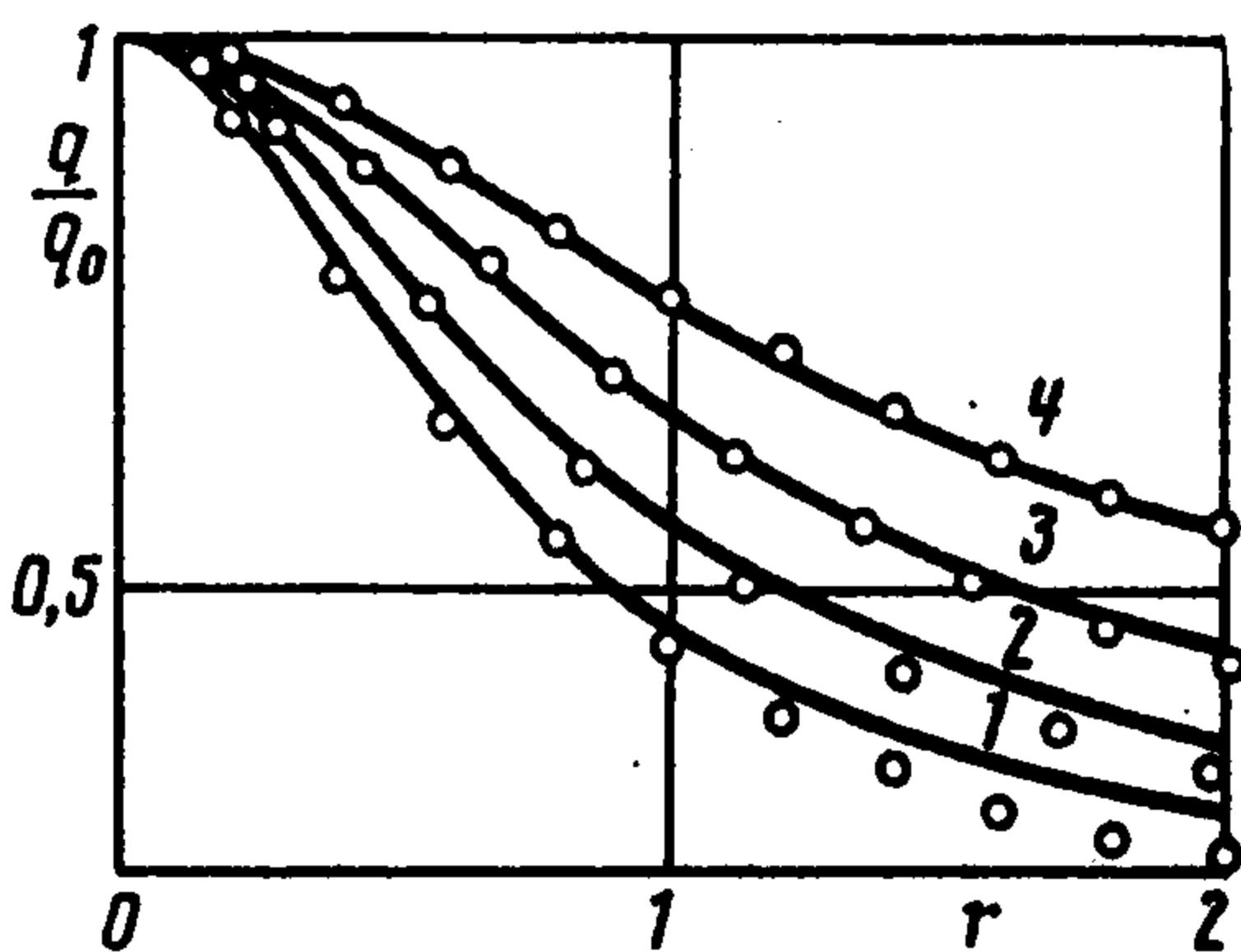
Это подтверждается и проведенными численными расчетами системы исходных уравнений. На фиг. 1 представлены результаты расчетов относительного теплового потока на боковой поверхности эллиптического параболоида с  $k = 0,4$  и гиперболоида



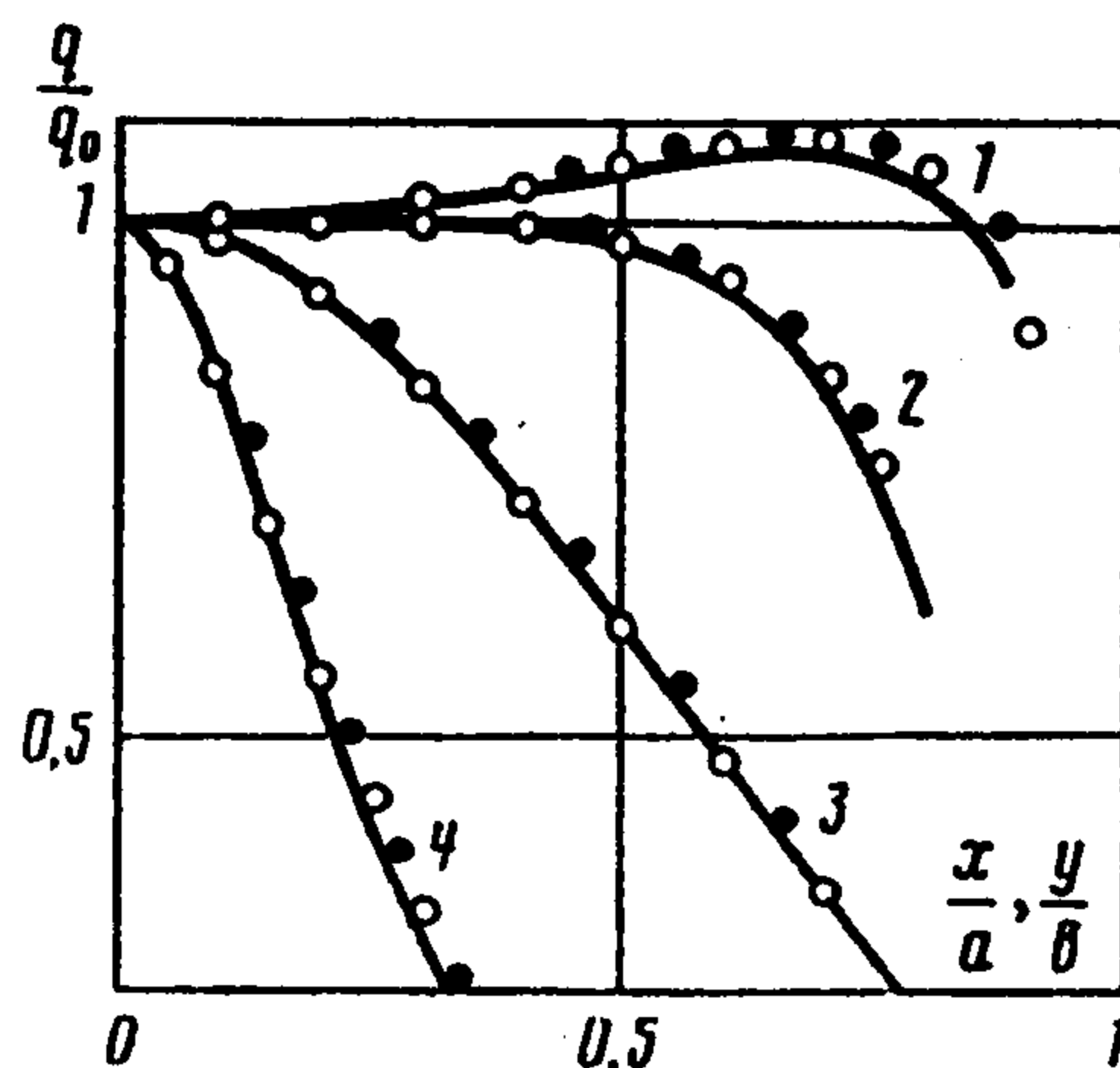
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

с углом полураствора  $40^\circ$  в плоскости  $y = 0$  и  $k = 0,5$ . Внутри полос 1 и 2 заключены все кривые распределения  $q/q_0$  вдоль меридиана  $\varphi = 45^\circ$  на поверхности параболоида и гиперboloида при изменении числа  $Re$  от  $10^2$  до  $5 \cdot 10^4$ ,  $T_w$  от 0,01 до 0,25,  $\gamma$  — от 1,15 до 1,667. Вдоль оси абсцисс откладывается  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от рассматриваемой точки поверхности до оси  $z$ .

Для оценки точности полученных формул (1), (8) проводилось систематическое сравнение расчетов с результатами численного решения системы уравнений трехмерного тонкого вязкого ударного слоя. Использовался конечно-разностный метод четвертого порядка точности аппроксимации в поперечном направлении и второго — в направлениях, касательных к поверхности [8]. Сравнение приближенных и точных значений тепловых потоков проводилось для трехосных эллипсоидов, эллиптических параболоидов и гиперboloидов, соотношение осей эллиптического поперечного сечения тела менялось от 1:1 до 1:4. Сравнение проводилось в широком диапазоне изменения газодинамических параметров течения:  $\gamma = 1,1 \dots 1,667$ ,  $T_w = 0,01 \dots 0,5$ ,  $Re = 10^2 \dots 5 \cdot 10^4$ . Некоторые результаты сравнения приведены на фиг. 1–4. Темные и светлые точки соответствуют расчету по формулам (1) и (10) соответственно, линии на фиг. 2–4 — численному решению.

На фиг. 1 сравнение аналитических и численных результатов проводится для меридионального сечения  $\varphi = 45^\circ$  параболоида и гиперboloида. На фиг. 2 представлены распределения относительного теплового потока вдоль различных меридиональных сечений на поверхности эллиптического параболоида с  $k = 0,4$ . Кривые 1–4 соответствуют значениям  $\varphi = 0, 45, 63,4, 90^\circ$ . На фиг. 3 аналогичные результаты приводятся для эллиптического гиперboloида с углом полураствора  $40^\circ$  в плоскости  $y = 0$  и  $k = 0,5$ . Значения газодинамических параметров обтекания при проведении численных расчетов следующие: фиг. 2 —  $Re = 10^3$ ; фиг. 3 —  $Re = 10^4$ ;  $T_w = 0,1$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $Pr = 0,71$ .

Распределения тепловых потоков по поверхности различных эллипсоидов  $[x^2/a^2 + y^2/b^2 + (z/c - 1)^2 = 1]$  показаны на фиг. 4. Линии 1, и 2 соответствуют плоскостям симметрии  $y = 0$  и  $x = 0$  эллипсоидов с соотношением осей 3:2:1, а линии 3, 4 — соответственно эллипсоида 0,7:0,3:1. Численные расчеты проводились при  $Re = 5 \cdot 10^4$ ,  $T_w = 0,15$ ,  $\gamma = 1,4$ .

Кроме хорошего совпадения аналитических и численных решений, из анализа приведенных результатов можно сделать следующий вывод. Для сильно сплюснутых тел, таких, как эллипсоид, когда его поперечная ось значительно больше продольной, теп-

ловой поток при удалении от критической точки начинает увеличиваться. Для таких сплюснутых тел максимальное значение теплового потока достигается не в критической точке, а на существенном удалении от нее, что объясняется (как и в случае обтекания тел под углом атаки) значительным уменьшением радиуса продольной кривизны при удалении от критической точки.

Проведенные сравнения аналитических и численных решений демонстрируют вполне удовлетворительную точность предложенных формул, выражающих относительный тепловой поток на поверхности пространственного тела в зависимости от его геометрических характеристик.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Приближенные формулы для тепловых потоков к идеальнокаталитической поверхности в окрестности плоскости симметрии // ПММ. 1989. Т. 53. № 6. С. 956–962.
2. *Авдеевский В.С.* Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 2. С. 11–16.
3. *Брыкина И.Г., Гершбейн Э.А., Пейгин С.В.* Исследование пространственного пограничного слоя на затупленных телах с проницаемой поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 49–58.
4. *Шевелев Ю.Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 223 с.
5. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Аналитическое и численное исследование пространственного вязкого ударного слоя на затупленных телах // ПМТФ. 1991. № 4. С. 81–88.
6. *Ковач Э.А., Турский Г.А.* Применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. № 1. С. 61–64.
7. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Метод определения тепловых потоков и трения в трехмерных задачах гиперзвукового обтекания с помощью двумерных решений // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 62–66.
8. *Петухов И.В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 304–325.

Москва

Поступила в редакцию  
24.X.1991