Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 533.6.011+535.23

© 1992 г. М.А. Аргучинцева, Н.Н. Пилюгин

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ ТЕПЛООБМЕНЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ, ДВИЖУЩИХСЯ С ГИПЕРЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

Создание многоразовых гиперзвуковых летательных аппаратов [70, 77] выдвигает задачу исследования оптимальных по тепловому нагреву и другим характеристикам пространственных конфигураций, что позволяет снизить вес необходимой теплозащиты. Задача оптимизации веса теплозащиты зависит от многих параметров и до сих пор не решена в строгой математической постановке. Поэтому были рассмотрены приближенные постановки задач оптимизации, решение которых позволило найти осесимметричные оптимальные формы тел с минимальными конвективными [43, 61, 73] и лучистыми [35–37, 58, 60] тепловыми потоками.

Из опыта решения вариационных задач о теле с минимальным сопротивлением [29–31, 51–53, 62] известно, что переход к существенно трехмерным конфигурациям позволяет достигнуть снижения сопротивления по сравнению с осесимметричными телами. Аналогичное положение, по-видимому, должно иметь место и при оптимизации формы тела по тепловому потоку.

В данной работе впервые поставлены вариационные задачи для нахождения оптимальной формы пространственных тел, обладающих минимальным суммарным тепловым нагревом при движении по траектории входа. В работах других авторов [21, 29–31, 48, 51–53, 62] ранее рассматривались задачи определения пространственных оптимальных аэродинамических форм с точки зрения минимума волнового или полного сопротивления. Выполнен краткий обзор работ, посвященных определению конвективного и радиационного нагрева пространственных тел, и приведены основные формулы для волнового сопротивления, сопротивления трения, конвективных и лучистых потоков к пространственным телам, движущимся в плотных слоях атмосфер планет. Приведенные формулы явно зависят от условий входа в атмосферу планеты и от геометрии тела, что позволяет поставить вариационные задачи об определении пространственной формы тела из условия минимума суммарного (конвективного и радиационного) нагрева поверхности вдоль траектории движения.

1. Постановка вариационных задач по выбору оптимальной формы пространственных тел, обладающих минимальным суммарным теплообменом. Рассмотрим движение трехмерного тела в атмосфере планеты по плоской траектории с гиперзвуковой скоростью под действием подъемной силы, лобового сопротивления, силы тяжести и центробежной силы. Влиянием реактивной силы за счет уноса массы пренебрегаем. Тогда условия равновесия сил по касательной и нормали к траектории записываются в виде [50]:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 C_D S + M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\gamma \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 C_L S_w + Mv\left(\frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\right) = Mg\cos\gamma \tag{1.2}$$

Здесь M, v, S, S_w – соответственно масса, скорость, характерная площадь и площадь смачиваемой поверхности тела; ρ – плотность газа на высоте z_*; t – время; g – ускорение силы тяжести; γ – угол входа в атмосферу планеты; Φ – угловая дальность; C_D, C_L – коэффициенты полного сопротивления и подъемной силы.

Уравнения (1.1), (1.2) нельзя решить аналитически. Существует широкий класс задач [50], для которых оправданы упрощения уравнений (1.1), (1.2).

Рассмотрим случай невертикального входа в атмосферу с пренебрежимо малой центробежной силой. Для углов входа в атмосферу Земли $\gamma > 10^\circ$ центробежные силы можно не учитывать при гиперзвуковых скоростях входа [50], тогда уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\rho g v K_1}{2\beta}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\rho g v^2}{2\beta}, \quad \frac{dz}{dt} = -v\sin\gamma,$$
$$\beta = \frac{Mg}{C_D S}, \quad K_1 = K\frac{S_w}{S}, \quad K = \frac{C_L}{C_D}, \tag{1.3}$$

где β – баллистический фактор, K – аэродинамическое качество. Из уравнений (1.3) получим:

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = K_1^{-1}\frac{d\gamma}{dt}, \quad \gamma = \gamma(z_*). \tag{1.4}$$

Для изотермической атмосферы $\rho = \rho_0 \exp(-\lambda z_*)$, где ρ_0 – плотность атмосферы на уровне поверхности планеты; λ^{-1} – шкала высот для плотности.

Уравнения (1.3) решаются при начальных условиях: $t = 0$, $z_* = z_0$, $v = v_0$, $\gamma = \gamma_0$. Интегрируя (1.4), можно найти

$$v = v_0 \exp\{-K^{-1}[\gamma_0 - \gamma]\} \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.3) и выражения (1.5) при $\lambda z_0 \gg 1$ находится:

$$\gamma = \arccos\left[\frac{\rho_0 g K_1}{2\beta\lambda} e^{-\lambda z_*} + \cos\gamma_0\right] \tag{1.6}$$

В случае когда $K_1 \ll 1$, то $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$.

Другие аналитические решения (1.1), (1.2) приведены в [50].

Если распространение тепла происходит по нормали к поверхности тела, то уравнение, описывающее нагрев аппарата [61], имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\rho v^3 C_H S \equiv Q, \quad C_H = C_C + C_R \tag{1.7}$$

Здесь H – суммарное тепло, поглощаемое поверхностью тела при движении по траектории, C_H – коэффициент суммарного теплообмена, состоящий из коэффициентов радиационного C_R и конвективного C_C теплообмена.

Интегрируя (1.7), найдем полное количество тепла, которое идет на нагрев тела вдоль всей траектории его движения или в интервале высот

$$H = \int_0^t \frac{\rho v^3 C_H S}{2} dt = \int_{v_k}^{v_0} \frac{M C_H}{C_D} v\,dv \tag{1.8}$$

$$H = \int_{z_k}^{z_0} \frac{M C_H}{C_L}\frac{S}{S_w}\frac{d\gamma(z_*)}{dz_*} v^2(z_*)\,dz_* \tag{1.9}$$

Здесь выражения $v = v(z_*)$ и $\gamma = \gamma(z_*)$ определяются формулами (1.5) и (1.6) соответственно; z_k – конечная высота спуска; v_k – конечная скорость движения тела.

Выражения (1.8), (1.9) при известных из газовой динамики зависимостях коэффициентов C_H и C_L, C_D от геометрии тела позволяют поставить вариационную задачу об определении формы тела из условия наименьшего суммарного вдоль траектории притока тепла к поверхности тела.

Рассмотрим вход в атмосферу по баллистической траектории ($C_L = 0$). Из-за больших сил сопротивления, возникающих при гиперзвуковых скоростях входа по баллистической траектории в атмосферу, при определении скорости движения можно пренебречь [73] влиянием силы тяжести с точностью не хуже нескольких процентов. Кроме того, пренебрегая центробежными силами, из (1.1), (1.2) получим:

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho v^2 C_D S, \quad \frac{dz_*}{dt} = -v\sin\gamma \tag{1.10}$$

Интегрируя эти уравнения при начальных условиях, получим

$$v = v_0 \exp(-a_1 e^{-\lambda z_*}), \quad a_1 = \rho_0 g/\lambda 2\beta \sin\gamma$$

где a_1 — траекторный параметр.

Суммарный аэродинамический нагрев тела H вдоль траектории дается формулой (1.8). Тогда вариационная задача формулируется следующим образом.

Найти уравнение формы тела $z = f(x, y)$, для которой полный приток тепла H к телу вдоль его траектории движения будет минимальным и которая удовлетворяет заданным изопериметрическим и граничным условиям.

В качестве изопериметрических условий могут быть заданы объем тела V, площадь донной части S или площадь смачиваемой поверхности S_w [62]:

$$V = 2\iint_S f(x,y)\,dx\,dy, \quad S = \iint_S dx\,dy \tag{1.11}$$

$$S_w = \iint_{S_w} \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dx\,dy$$

Обычно в качестве граничного условия задается уравнение передней кромки тела:

$$y = 0, \quad z = \varphi_*(x) \tag{1.12}$$

В случае входа тела в атмосферу планеты с подъемной силой можно рассмотреть дополнительно ограничения на подъемную силу и на аэродинамическое качество

$$\begin{gathered}\iint_S \frac{f_y'\,dx\,dy}{[1 + f_x'^2 + f_y'^2]} = \frac{LS}{2} = \text{const} \\ \iint_S \frac{2f_y'\,dx\,dy}{[1 + f_x'^2 + f_y'^2]} = K\iint_S [2[1 + f_x'^2 + f_y'^2]^{-1} + C_f\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2}]\,dx\,dy\end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь L — заданная величина подъемной силы, K — заданное аэродинамическое качество.

В качестве дополнительного ограничения можно рассмотреть ограничения на локальной суммарный поток q [37]: $q \leqslant q^*$, $q = q^c + q^R$, где q^* — заданная предельная величина потока.

Если тела обладают свойством гомотетии, т.е. удовлетворяют условию, что каждое поперечное сечение тела, перпендикулярное оси z, геометрически подобно поперечному сечению в плоскости основания, то поверхности таких тел можно представить уравнением в цилиндрической системе координат (r, φ, z): $r = f(z)\Phi(\varphi)$, где функции $f(z)$ и $\Phi(\varphi)$ соответственно определяют продольный и поперечный контуры тела. Тогда интеграл для полного притока тепла H можно минимизировать при следующих ограничениях [62]:

— при заданной площади основания:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Phi^2(\varphi)\,d\varphi f^2(l) \tag{1.14}$$

или условии замкнутости контура

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) = \Phi_0 \tag{1.15}$$

или граничном условии для $f(z)$:

$$f(0)=0, \quad f(l)=f_0 \tag{1.16}$$

где l – длина тела вдоль оси Z.

Из общей постановки вытекают задачи нахождения формы пространственного тела с точки зрения минимума суммарного по поверхности конвективного теплового потока $Q_C (C_R = 0, C_H = C_C)$ или суммарного радиационного теплового потока $Q_R (C_C = 0, C_H = C_R)$ вдоль траектории движиния тела.

В вариационной задаче для функционала H из (1.8), (1.9) следует, что траектория и форма тела – взаимосвязаны. В ряде случаев [36] можно эту общую задачу разделить и рассмотреть оптимизацию формы тела в окрестности самой теплонапряженной точке траектории и в случае заданной траектории движения. При этом задаются баллистический фактор ($\beta = \mathrm{const}$) и аэродинамическое качество ($K = \mathrm{const}$).

На основе полученных выражений можно исследовать и другие, в том числе и много параметрические задачи оптимизации. Например, найти форму тела такую, чтобы выполнялись условия

$$H = \min, \quad T = \min$$

$$T = \int_{z_k}^{0} \frac{dz_*}{v \sin \gamma (z_*)}, \qquad \left| M \frac{dv}{dt} \right| = \min$$

т.е. обеспечить минимум нагрева, минимальное время движения на траектории и наименьшие перегрузки.

2. Формулы для расчета конвективных тепловых потоков и сопротивления трения к пространственным телам. Для случая движения в атмосфере Земли со скоростями порядка первой космической скорости основной вклад в суммарный аэродинамический нагрев вносит конвективный тепловой поток между газом и поверхностью обтекаемого тела [59].

При получении основных формул для конвективного теплового потока при больших числах Рейнольдса можно воспользоваться приближенными методами расчета трехмерного пограничного слоя в сжимаемом газе [1, 38, 66, 74, 81]. Известный "метод осесимметричной аналогии" [74] позволяет рассчитывать параметры пограничного слоя независимо вдоль каждой невязкой линии тока на поверхности трехмерного тела Используя в качестве приближенного метода расчета локального конвективного теплового потока q_w^c гипотезу локального подобия с пластинкой, имеем:

$$hq_w^c = \varphi_1 \left[\int_0^s \varphi_1 ds \right]^{-1/2}$$

$$\varphi_1 = \rho_0 \mu_0 A_0^2 (h_0 - hw)^2 \left[1 + \frac{p^b}{1{,}22 k_0 + 0{,}4} \right]^{\omega - 1} v_l p h^2 \tag{2.1}$$

$$p = p_e / p_0, \quad A_0 = 0{,}332 \,\mathrm{Pr}^{-2/3}, \quad b = (\gamma - 1)/\gamma$$

Здесь h – аналог осесимметричного радиуса; интегрирование ведется вдоль невязкой линии тока; v_e, p_e – скорость и давление на внешней границе пограничного слоя; h_w – энтальпия при температуре поверхности тела; h_r – энтальпия теплоизолированной поверхности, для коэффициента вязкости предполагается зависимость температуры $\mu \sim T^\omega$; γ – отношение удельных теплоемкостей; индексом "о" обозначаются параметры за прямым скачком уплотнения; $k_0 = T_w/T_0$ – малая по предположению величина; h_0 – энтальпия торможения потока.

Если q_w^c – тепловой поток в данной точке поверхности тела известен, а S – поверхность тела, то суммарный тепловой поток к поверхности обтекаемого тела равен

$$Q_c = \iint\limits_S q_w^c \, dS \qquad (2.2)$$

В [1] в системе координат, связанной с невязкими линиями тока на поверхности тела, и при пренебрежении вторичными течениями с помощью этого метода рассмотрен теплообмен бесконечного цилиндра со скольжением, конуса, а также линии растекания в окрестности передней критической точки.

В [66] этот метод обосновывается асимптотическим анализом по малому параметру, связанному с кривизной невязких линий тока на поверхности тела. Сопоставление расчетов тепловых потоков на поверхности сферически затупленного конуса с углом полураствора 10° под углом атаки 10° с экспериментальными данными показало хорошее совпадение.

В [75] метод "осесимметричной аналогии" применяется для определения теплообмена на поверхности типичной конфигурации орбитальной ступени под углом атаки. Сопоставление расчетов с экспериментальными данными показывает хорошее совпадение в тепловых потоках на наветренной части тела под углом атаки. В [81] также исследуются теплообмен на поверхности орбитальной ступени. В отличие от [66] поле скоростей определяется из точных уравнений с помощью расчета трехмерных невязких течений при наличии равновесных или неравновесных химических реакций. Точность и границы применимости метода устанавливаются сравнением с экспериментальными данными и с решениями уравнений Навье-Стокса для простейших течений.

В [77] рассматривается частная задача о выборе оптимальной траектории и формы тела, снижающие тепловой нагрев. Изучается движение осесимметричного затупленного по сфере конуса под углом атаки. Сначала рассматриваются траекторные параметры движения тела, а затем подбирается оптимальный угол атаки. Результаты расчетов в [77] проверяются экспериментально в ударной трубе. В этой работе прямо не исследуется вариационная задача об определении формы пространственного тела.

В [11] рассмотрена задача об определении формы тела минимального конвективного теплового потока, имеющего эллиптическое поперечное сечение с постоянным соотношением полуосей. Решение получено в параметрическом виде при заданных размерах тела для ламинарного обтекания при постоянных параметрах набегающего потока. Использовалась формула Лиза [56] для определения распределения теплового потока по поверхности тела, суммарный тепловой поток находился интегрированием по образующей эллиптического тела, а трехмерностью внешнего невязкого течения необоснованно пренебрегалось. Решение задачи в [11] является сильно упрощенным частным примером определения трехмерного оптимального по теплопередаче тела в данной точке траектории.

В [22] разработан приближенный метод для быстрого расчета тепловых потоков на телах сложной формы. Результаты расчета трехмерного невязкого течения используются для определения невязких линий тока на поверхности тела, вдоль каждой из которых независимо от других приближенно рассчитываются тепловые потоки. Показано, что можно правильно вычислять теплообмен как при условиях, характерных для аэродинамической трубы, так и в условиях реального полета. Особенностью данного метода является возможность правильно рассчитать тепловые потоки на крыле орбитальной ступени. Отметим, что конфигурации, включающие крылья с продольным наплывом, вызывают интерес применительно к разработке гиперзвуковых маневренных самолетов [47].

Исследование обтекания пространственных конфигураций с крыльями может привести к обнаружению новых аэродинамических эффектов, связанных с теплообменом [64, 77, 82], что необходимо учитывать в оптимальном проектировании.

Особый интерес представляет изучение теплообмена в окрестности линии растекания трехмерного тела или осесимметричного тела под углом атаки, так как на этой линии имеет место экстремальный нагрев [56].

Удельный тепловой поток, приходящийся на единицу поверхности вблизи линии растекания, равен

$$Q_c = 2\sqrt{\rho_0 \mu_0 v_\infty} A_0 (h_0 - h_w) J$$

$$J = I_1^{1/2}/I_2, \quad I_1 = \int\limits_{z_l}^{z_f} y'^2 h^2 \, dz, \quad I_2 = \int\limits_{z_l}^{z_f} h dz \qquad (2.3)$$

Здесь (z_l, y_l); (z_f, y_f) – концевые точки линии растекания $y = y(z) = f(z, 0)$.

Метрический коэффициент h определяется по известной геометрии невязких линий тока. В [75] получено уравнение для h в предположении, что поле скоростей на поверхности определяется теорией Ньютона. На линии растекания это уравнение имеет вид

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = y'(z)\,k(z), \quad k(z) = \frac{f(z,0) - f''_{\varphi\varphi}(z,0)}{f^2(z,0)} \tag{2.4}$$

где k – кривизна линии в поперечных сечениях (z = const) поверхности $r = f(z, \varphi)$. Интегрирование (2.4) позволяет определить форму линии растекания по известным функциям $h(z)$ и $k(z)$.

Используя функционал (2.3), в [43] исследуется вариационная задача о выборе оптимального контура линии растекания пространственного тела и кривизны поверхности в окрестности этой линии для ламинарного режима обтекания тела гиперзвуковым потоком газа. Проводится сравнение тепловых потоков к оптимальным и неоптимальным формам в окрестности линии растекания.

Используя экспериментальные данные летных испытаний космической транспортной системы "Спейс шаттл", в [64] проведен совместный расчет теплового потока на орбитальный корабль и характеристик системы теплозащиты. Дано сравнение рассчитанных и экспериментальных значений температуры и тепловых потоков на нижней наветренной части поверхности фюзеляжа орбитального корабля в плоскости симметрии, а также на нижней поверхности крыла в сечениях на 50 и 80% длины его полуразмаха. Результаты [64] показывают, что расчет несколько завышает тепловые потоки на наветренной части поверхности фюзеляжа и занижает на носовой части, а также на поверхности крыла в сечении, расположенном на расстоянии 50% полуразмаха.

Выше рассматривались приближенные методы исследования теплообмена пространственного обтекания тел при больших числах Райнольдса, когда происходит разделение течения на невязкий поток и прилегающий к поверхности пограничный слой. В работах [12–19] разработаны приближенные методы для расчета течений, когда вязкие эффекты существенны во всем ударном слое, что имеет место при малых и умеренных числах Рейнольдса. В работах [16, 17] получены формулы для определения тепловых потоков и напряжение трения в окрестности плоскости симметрии тел, обтекаемых под углом атаки при малых и умеренных числах Рейнольдса на основе приближенного решения уравнений пространственного вязкого ударного слоя с учетом скольжения и скачка температуры на поверхности. Течение исследуется в рамках двухслойной модели вязкого ударного слоя, аналогичной модели для осесимметричного обтекания и основанной на предположении о малой толщине возмущенной области течения, методом последовательных приближений [13, 19, 57]. Предлагается формула [16, 17] с помощью которой расчет теплового потока в окрестности плоскости симметрии пространственных тел, обтекаемых под углом атаки, сводится к расчету теплового потока в осесимметричную критическую точку.

Для течений однородного газа в окрестности плоскости симметрии затупленных тел было установлено, что при умеренных и больших числах Рейнольдса распределение вдоль поверхности величины теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения, перестает зависеть от числа Рейнольдса. Оно также слабо зависит от отношения удельных теплоемкостей, числа Прандтля, значения показателя степени в законе ($\mu \sim T^{\omega}$), температуры поверхности (для охлажденной стенки), а также от учета эффектов скольжения и скачка температуры на поверхности и определяется в основном геометрическими характеристиками тела.

Для оценки тепловых потоков на линии растекания затупленных тел иногда используется просто осесимметричное течение для тела, образованного вращением линии растекания вокруг оси, параллельной направлению набегающего потока [76, 82]. Однако этот тепловой поток без поправок, связанных с кривизной поверхности, может давать большие ошибки [18]. В отличие от осесимметричной аналогии, используемой в теории погранслоя [1, 74], формула, предложенная в [18], применима не только при больших, но и при умеренных и малых числах Рейнольдса. В [15] получены аналогичные формулы для критической точки трехмерного тела, а в [19] рассмотрен общий случай трехмерного обтекания затупленных тел однородным вязким газом в широком диапазоне чисел Рейнольдса под углами атаки и скольжения.

Остановимся более подробно на формулах, полученных в [19], для этого рассмотрим стационарное трехмерное обтекание гладких затупленных тел сверхзвуковым ламинарным потоком вязкого газа под углом атаки в системе декартовых координат XYZ, связанную с телом. Начало координат O поместим в критическую точку тела. Ось Z совпадает по направлению с вектором скорости набегающего потока; оси X и Y выберем так, чтобы в критической точке направления соответствующих координатных линий лежали в плоскостях главных кривизн тела. Пусть поверхность обтекаемого тела в декартовой системе координат задана уравнением $z = f(x, y)$.

Уравнения трехмерного тонкого вязкого ударного слоя приведены в [57]. Полученная система уравнений в переменных типа Дородницына решается в [19] методом последовательных приближений [13].

Число Стантона и местные коэффициенты трения определяются по формулам

$$\mathrm{St} = \frac{q_w^c}{\rho_\infty v_\infty (h_\infty - h_w)}, \qquad C_f^\alpha = \frac{\tau_w^\alpha}{\rho_\infty v_\infty^2} \tag{2.5}$$

Расчеты, проведенные в [19], так же как и численное решение системы уравнений пространственного вязкого ударного слоя, показали, что при $\mathrm{Re} \gtrsim 100$ распределение по поверхности величины теплового потока, отнесенного к его значению в критической точке, рассчитанное с использованием модифицированных соотношений Рэнкина–Гюгонио на ударной волне и граничных условий на поверхности тела, учитывающих скорость скольжения и скачок температуры, практически совпадают с соответствующим распределением, рассчитанным с использованием обычных соотношений Рэнкина–Гюгонио и условий прилипания и заданной температуры на теле. В последнем случае формулы значительно упрощаются и принимают вид (индекс "0" означает значения соответствующих величин в точке торможения)

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_0} = \frac{q_w^c}{q_{w_0}^c} \cos^{3/2} \alpha \sqrt{\frac{H_*}{H_0 \lambda}}, \quad \cos \alpha = 1/\sqrt{g} \\ \lambda = 1 + \frac{4}{15} \frac{f_{11}'' f_1' + 2 f_{12}'' f_1' f_2' + f_{22}'' f_2'^2}{g^{3/4} H_*}; \quad f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}H_* = \frac{1}{2g^{3/2}} [f_{11}''(1 + f_2'^2) + f_{22}''(1 + f_1'^2) - 2 f_{12}'' f_1' f_2'] \\ g = 1 + f_1'^2 + f_2'^2\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь H_* – средняя кривизна поверхности в рассматриваемой точке.

Аналогично получается формула для относительных коэффициентов трения при $\mathrm{Re} \gtrsim 100$:

$$\begin{gathered}\frac{C_f^i}{C_{f_0}^i} = \sqrt{\frac{H_*}{gH_0}} \frac{(1 - 2/3a - 2\eta^i)}{(1 - 2/3a_0 - 2\eta_0^i)} \\ a^4(1 - \mathrm{Pr}) - a^3 + E^*(1 - a)^2 = 0, \quad E^* = g(1 - G_w)\,\mathrm{Pr}(\epsilon \mathrm{Re}/H_*)^2 \\ \eta^i = \begin{cases} af_{11}''/(6g^2 H_*), & i = 1 \\ [a/(6H_*)]\{2H_* - f_{11}''/g - f_{122}^{(\mathrm{III})} f_1'/(g f_{22}'')\}, & i = 2 \end{cases}\end{gathered} \tag{2.8}$$

В работе [15] предлагается простая формула для расчета теплового потока в трехмерную критическую точку, которая сводится к расчету теплового потока в осесимметричную критическую точку

$$\mathrm{St}_0(\kappa, \mathrm{Re}) = \mathrm{St}_{0c}(\mathrm{Re}_0), \quad \mathrm{Re}_0 = \frac{2\mathrm{Re}}{1 + \kappa} \tag{2.9}$$

Здесь St_0 – число Стантона в трехмерной критической точке, определенное при числе Рейнольдса Re; St_{0c} – число Стантона в осесимметричной критической точке, определенное при числе Re_0; κ – отношение главных кривизн в критической точке $(0 \leqslant \kappa \leqslant 1)$.

В [15] показана возможность использования упрощенной связи между St_0 и St_{0c} для рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса

$$St_0/St_{0c} = \sqrt{1/2(1+\kappa)} \tag{2.10}$$

Здесь St_0 и St_{0c} вычисляются при одном и том же числе Рейнольдса Re.

В [20] установлены соотношения для пересчета конвективных тепловых потоков к гладким пространственным телам на основе знания тепловых потоков к эквивалентным осесимметричным телам при их гиперзвуковом обтекании с учетом неравновесных химических реакций в ударном слое и каталитических реакций на поверхности тела. Эти соотношения получены при обтекании тел воздухом для чисел Рейнольдса $10^2 < Re < 10^6$, чисел Маха $M_\infty \to \infty$ и отношения главных кривизн в критической точке от 0 до 1. Соотношения проведены путем сравнения с результатами численных решений задачи обтекания эллипсоидов.

Таким образом, для расчета конвективных тепловых потоков к гладким пространственным телам разработаны удобные формулы [13–20], которые могут быть использованы для решения разных задач оптимизации в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса.

3. Основные формулы для расчета радиационных тепловых потоков к пространственным телам.

При входе в верхние слои атмосферы со скоростями порядка второй космической и выше излучение может существенно влиять на обтекание тела газом, а радиационные тепловые потоки сравнимы с конвективными или даже превосходят их [35]. В [18, 58, 59] рассмотрены задачи обтекания и теплообмена плоских и осесимметричных тел гиперзвуковым потоком излучающего газа. Задачи пространственного обтекания тел излучающим газом имеют дополнительные трудности и поэтому сравнительно мало изучены [8].

Численное исследование радиационного теплообмена пространственных тел проводилось в [10, 23–25, 40–42, 65], используя различные методы решения и предположения о переносе излучения.

В этих работах решение получено численно лишь для ограниченного класса тел и условий обтекания и не носит универсального характера. Поэтому важным является создание на основе имеющихся численных результатов формул для определения лучистых тепловых потоков к пространственным и осесимметричным телам.

В [3–5] рассмотрено пространственное сверхзвуковое течение невязкого нетеплопроводного излучающего воздуха в сжатом слое около затупленного тела с учетом равновесных химических реакций. Расчет лучистого потока проводился в приближении плоского слоя. Исследовалось обтекание широкого класса пространственных и осесимметричных тел (трехосные эллипсоиды, параболоиды, сферы, тела степенной формы) в диапазонах размеров 0,01–20 м, скоростей 8–18 км/с на высотах 40–80 км в атмосфере Земли. Слой паров непосредственно не рассчитывался, однако ослабление лучистого потока этим слоем моделировалось приближенно. Результаты многочисленных расчетов [3–5] и др. показывают, что относительное распределение лучистых тепловых потоков по поверхности тела при фиксированной скорости полета слабо зависит от размера и формы тела и высоты полета.

Для осесимметричных тел оно может быть аппроксимировано [3–5] аналитической функцией от угла наклона тела θ_w или от угла наклона θ_s головной ударной волны к набегающему потоку. (Угол берется между внешней нормалью к элементу поверхности и вектором скорости набегающего потока газа.) При обтекании же пространственных тел, как показали расчеты [3–5], универсальность имеет место лишь в зависимости от θ_s. Значения θ_s в том или ином сечении пространственного ударного слоя очень слабо зависят от характерного размера тела, скорости и высоты полета и могут быть получены из решения задачи об адиабатическом течении совершенного газа при какой-либо одной скорости движения.

Для определения абсолютных значений лучистых потоков к телу необходимо иметь данные об их величинах в критическую точку затупления q^R_{w0} [3, 4]. Аппроксимационная формула для вычисления относительных лучистых тепловых потоков к поверхности рассматриваемых тел имеет вид [3–5]

$$\bar{q}_R(\theta_s) = \frac{q^R_w(\theta_s)}{q^R_{w0}} = \cos^n\theta_s, \quad n = 1{,}811 + \frac{1}{0{,}051\,v_\infty - 0{,}43} \tag{3.1}$$

Здесь v_∞ – скорость движения тела в км/с.

Для осесимметричных течений можно воспользоваться приближенной зависимостью [63]

$$\theta_s = \theta_w - \operatorname{arctg}\left[0{,}164\sin\theta_w\left(\cos\theta_w + \sqrt{1 - 0{,}698\sin^2\theta_w}\right)\right] \tag{3.2}$$

Для углов $\theta_w \leqslant \pi/3$ имеет место более простая формула

$$\theta_s = 0{,}918\theta_w - 7{,}5\cdot 10^{-3}\theta_w^3. \tag{3.3}$$

Если заданы уравнение формы тела $z = f(x, y)$ и уравнение формы ударной волны $z_s = f_s(x, y)$, тогда справедливо

$$\sin\theta_w = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}, \quad \sin\theta_s = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{sx}'^2 + f_{sy}'^2}} \tag{3.4}$$

и формула для лучистых тепловых потоков к поверхности тел примет вид:

$$q^R_w(\theta_s) = q^R_{w0}\cos^n\theta_s \tag{3.5}$$

Тогда суммарный радиационный тепловой поток к поверхности обтекаемого тела равен

$$Q_R = \iint\limits_S q^R_w\,dS = q^R_{w0}\iint\limits_S \sin^n\beta\,dx\,dy, \quad \beta = \pi/2 - \theta_S \tag{3.6}$$

В [7, 9] использовано обобщение на трехмерный случай предельной формулы для лучистых тепловых потоков от сильно излучающего оптически тонкого ударного слоя, которая была ранее получена для осесимметричных тел.

В [26–28] исследовано трехмерное нестационарное гиперзвуковое течение излучающего газа вблизи наветренной поверхности крыла малого удлинения с переменной по времени формой поверхности. Применение метода тонкого ударного слоя [68] позволило получить общее решение уравнений газовой динамики.

Обтекание крыла в [27] рассматривается под углом атаки α. Прилегающий к наветренной поверхности крыла сжатый слой газа является оптически прозрачным. Вводится малый параметр ϵ, равный отношению плотностей на сильной ударной волне. При обтекании крыла с ударной волной, присоединенной к передней кромке, искомые газодинамические функции представимы в виде разложений по степеням ϵ. При учете переноса излучения ударный слой рассматривается как локально-одномерный. Тогда применяя известное решение уравнения переноса излучения [58] и пренебрегая излучением с поверхности крыла, получено следующее выражение для величины локального радиационного теплового потока к крылу [27]:

$$q_R(x, z) = \rho_\infty v_\infty^3 \sin^3\beta Q(x, z)$$

$$Q(x,z)=\frac{B}{2(n+4)}\int\limits_{\chi_b}^{x}\frac{[1+B(x-\chi)]^{-(n+5)/(n+4)}}{1-(x-\chi)S_{zz}(\chi,z,t)}d\chi$$
$$B=\frac{8\sigma T_\infty^4\tau A^4\mu_{\text{м}}^{n+4}}{\rho_\infty v_\infty^3\sin\beta}(n+4) \tag{3.7}$$

Здесь σ – постоянная Стефана–Больцмана; A, n – коэффициенты аппроксимации коэффициента поглощения Планка; $\mu_{\text{м}}$ – молекулярный вес газа; $S(\chi, z, t)$ – функция формы скачка уплотнения; β – угол между нормалью к скачку уплотнения и вектором скорости набегающего потока $\mathbf{v}_\infty$, τ – оптическая толщина сжатого слоя; (x, y, z) – декартовы координаты в связанной с крылом системе (x – продольная координата); толщина тела, отсчитываемая от плоскости $y = 0$, мала; χ – абсцисса точки пересечения траектории данной частицы газа с ударной волной. При записи учтено, что на ударной волне $\chi = x$. Значения χ_b для траекторий, лежащих на поверхности крыла, находятся, предполагая форму передней кромки крыла в плане $z = z_b(x)$, не зависящей от времени [27]. Если ударная волна присоединена только к вершине и отсоединена от кромки, то все траектории на крыле проходят через вершину и на всей поверхности крыла $X_b = 0$.

Существует класс частных точных решений, соответствующий следующему виду поверхностей тела и ударной волны [27]:

$$y=F(x,z,t)=-\frac{f(x,t)z^2}{2}$$
$$y_s=S(x,z,t)=G(x,t)-\frac{f(x,t)z^2}{2},\qquad \chi_b=0 \tag{3.8}$$

Случай $f(x, t) = b/x$ соответствует стационарному обтеканию конического крыла неизменной формы с поперечной кривизной в плоскости симметрии ($z = 0$), равной (b/x tg β). Радиационный тепловой поток, согласно (3.7), (3.8), постоянен вдоль размаха, что является следствием постоянства толщины сжатого слоя:

$$Q(x)=\frac{B}{2(n+4)}\int\limits_0^x\frac{[1+B(x-\chi)]^{-(n+5)/(n+4)}}{(1-b)\chi+bx}\chi d\chi \tag{3.9}$$

В [28] рассмотрено течение в окрестности плоскости симметрии на наветренной стороне конического тела, установленного под углом атаки α. Пусть в связанной с телом декартовой системе координат (xyz) плоскость симметрии соответствует $z = 0$, а уравнение сечения тела этой плоскостью $y_b = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Главные радиусы кривизны поверхности в плоскости $z = 0$:

$$R_1=\infty,\quad R_2=R_0\xi\,\mathrm{tg}\,\varphi\sec\varphi,\quad \xi=x\sec\varphi.$$

Тогда зависимости толщины сжатого слоя и лучистого теплового потока от универсальной координаты имеют вид

$$G(X)=\frac{\mathrm{tg}(\varphi+\alpha)}{B}\int\limits_0^X\frac{(1+X-\chi)^{-1/(n+4)}}{(1-C)\chi+CX}\chi d\chi$$
$$Q(X)=\frac{1}{2(n+4)}\int\limits_0^X\frac{(1+X-\chi)^{-(n+5)/(n+4)}}{(1-C)\chi+CX}\chi d\chi \tag{3.10}$$
$$C=R_0^{-1}\,\mathrm{tg}(\varphi+\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\varphi,\quad X=B\xi\sin^{2(n+4)}(\varphi+\alpha)\sec(\varphi+\alpha)$$

В ряде частных случаев формулы (3.10) переходят в результаты, полученные ранее методами, применимыми лишь для течений специального вида [58]. Указанными аналитическими формулами и ограничивается пока набор выражений для лучистых тепловых потоков к пространственным телам.

4. Основные формулы для расчета полного сопротивления пространственных тел. Для вычисления коэффициентов волнового сопротивления C_B и полного сопротивления C_D рассмотрим обтекание трехмерного тела гиперзвуковым потоком газа под нулевым углом скольжения. Рассмотрим вновь декартову систему координат xyz, связанную с телом. Обозначим единичные векторы декартовой системы координат через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Введем единичный вектор нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярный к бесконечно малому элементу смачиваемой поверхности dS_w (положительное направление нормали в сторону от поверхности) и единичный вектор $\mathbf{t}$, касательной к dS_w и направленный вдоль скорости потока в данной точке. В результате коэффициент суммарного аэродинамического сопротивления C_D дается выражением [70]

$$C_D = \frac{2D}{\rho_\infty v_\infty^2} = \frac{1}{S} \iint\limits_{S_w} [-C_p(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) + C_f(\mathbf{t}\cdot\mathbf{k})]\, dS_w = C_B + C_{xf} \tag{4.1}$$

Здесь D – полное сопротивление тела, $q_\infty = \rho_\infty v_\infty^2/2$ – скоростной напор в набегающем потоке; C_p, C_{xf} – коэффициенты давления и сопротивления трения тела соответственно.

Коэффициент давления C_p определяется по формуле Ньютона [31, 49, 61, 62]

$$C_D = \frac{1}{S} \iint\limits_{S_w} \left[\frac{2}{(1 + f_x'^2 + f_y'^2)} + C_f\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} \right] dx \cdot dy \tag{4.2}$$

Учтем, что местный коэффициент трения C_f выражается через C_f^i $i = 1; 2$ из (2.9) следующим образом:

$$C_f = ((C_f^1)^2 + (C_f^2)^2)^{1/2} \tag{4.3}$$

Тогда, используя формулу (2.9) для C_f^i, получим выражение для коэффициента сопротивления трения C_{xf}.

Предположим, что в декартовой системе координат (x, y, z) ось Y направлена вертикально вверх, тогда можно найти выражение для коэффициента подъемной силы C_L [62]:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{q_\infty S} = \frac{1}{S} \iint\limits_{S} C_p(\mathbf{nj})\, dS \\ C_L &= \frac{2}{S} \iint\limits_{S} \frac{f_y'\, dxdy}{1 + f_x'^2 + f_y'^2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь L – подъемная сила тела.

5. Правило эквивалентности или площадей для волнового сопротивления, сопротивления трения, радиационного и конвективного тепловых потоков.

Создание многоразовых гиперзвуковых летательных аппаратов ставит задачу исследования интегральных характеристик сложных пространственных конфигураций, состоящих из комбинаций "крыло-фюзеляж" [70]. Для течений с относительно малыми сверхзвуковыми скоростями существует хорошо известное правило площадей [68]. При помощи этого правила можно оценивать влияние интерференции фюзеляжа и крыла на аэродинамические силы для практически важных конфигураций без подробного исследования картины течения. В [44–46] приведена аналогичная теорема для волнового сопротивления затупленного тела при нулевом угле атаки в гиперзвуковом потоке. Существенным ограничением этого правила было то, что контуры поперечного сечения сравниваемых тел не должно иметь угловых точек на тех участках, которые выступают за область, ограниченную ударной волной.

В [34] проведено обобщение правила эквивалентности для волнового сопротивления на случаи стационарного и нестационарного пространственного невязкого обтекания нетонких тел. Это обобщение основывается на процедуре осреднения по угловой переменной цилиндрической системы координат, что справедливо для тел, близких к осесимметричным. Численное решение достаточно широкого круга задач демонстрирует [34] применимость обобщенного правила эквивалентности для существенно неосесимметричных конфиругаций.

Гиперзвуковое правило площадей может быть скомбинировано с законом подобия для обтекания затупленных тонких тел [68], в результате чего течение около тела в соответствующих безразмерных переменных будет определяться двумя безразмерными параметрами – гиперзвуковым параметром подобия и параметром, характеризующим затупление, и одной безразмерной функцией, выражающей закон изменения площади поперечного сечения.

В работах [54, 67, 78, 79] выведено правило площадей для изменения нормальной силы и аэродинамического качества L/D треугольного крыла, летящего под углом атаки с гиперзвуковой скоростью, из-за добавления к нему на стороне сжатия потока конического тела произвольной формы. Рассматриваются только малые углы атаки. Предполагается, что коническая область дозвукового течения, в которую помещается тело, занимает малую часть крыла. Обобщение правила эквивалентности на неконические тела получено в [55]. В [67] дано обобщение этого правила на случай обтекания треугольного крыла при любых углах стреловидности и атаки при условии, что ударная волна присоединена в передней кромке.

В настоящее время в гиперзвуковой газовой динамике доказаны правила площадей для пространственных тел, близких к осесимметричным, которые состоят в том, что сопротивление [34, 39, 49], коэффициент теплообмена и унос массы [7] пространственного тела равны аналогичным величинам осесимметричного тела, имеющего такое же распределение площади поперечного сечения вдоль оси. Отметим, что в некоторых случаях правило площадей справедливо для тел, сильно отклоняющихся от осевой симметрии [80].

В [6] проведено обобщение правила площадей и для других интегральных величин в пространственных течениях. Для выяснения границ его применимости в [7] рассмотрены тепловые потоки при обтекании под нулевым углом атаки трехосных полуэллипсоидов с полуосями a, b, c вдоль координатных линий x, y, z.

Из расчетов следует, что даже при очень сильном отличии от осевой симметрии ($b/a = 11$) разница в Q_R достигает всего 30–40% [7].

Рассмотренные выше правила площадей для интегральных по поверхности тела величин могут заметно облегчить решение поставленных выше вариационных задач для пространственных тел.

В заключение авторы благодарят Г.А. Тирского и И.Г. Брыкину за обсуждение вопросов, связанных с расчетом конвективного теплообмена и сделавших ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдуевский В.С.* Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 2. С. 11–16.
2. *Анфимов Н.А., Румынский А.Н., Фомин В.Н.* Трехмерное обтекание и радиационный нагрев затупленных тел // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.: Наука, 1986. С. 18–27.
3. *Апштейн Э.З., Вартанян Н.В., Сахаров В.И.* Радиационный нагрев пространственных тел, обтекаемых невязким сверхзвуковым потоком воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 183–187.
4. *Апштейн Э.З., Вартанян Н.В., Сахаров В.И.* О распределении лучистых тепловых потоков по поверхности пространственных и осесимметричных тел при сверхзвуковом обтекании их идеальным газом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 92–97.
5. *Апштейн Э.З., Вартанян Н.В., Сахаров В.И., Тирский Г.А.* Радиационные тепловые потоки при сверхзвуковом обтекании пространственных тел невязким газом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 3. С. 579–582.
6. *Апштейн Э.З., Колотилова Н.Г.* Правило площадей для интегральных величин // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 157–159.
7. *Апштейн Э.З., Пилюгин Н.Н.* Правило площадей для коэффициента теплообмена пространственных аблирующих тел при тепловых потоках, локально зависящих от угла наклона поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 71–76.
8. *Апштейн Э.З., Пилюгин Н.Н., Севастьяненко В.Г., Тирский Г.А.* Радиационный теплообмен при входе тел в атмосферу Земли и планет со сверхорбитальными скоростями // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 23. С. 116–236.
9. *Апштейн Э.Э., Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Унос массы и изменение формы трехмерного тела при движении по траектории в атмосфере Земли // Космич. исследования. 1979. Т. 17. № 2. С. 246–255.
10. *Белоцерковский О.М., Осетрова С.Д., Фомин В.Н., Холодов А.С.* Гиперзвуковое обтекание затупленных тел потоком излучающего газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 4. С. 992–1003.

11. *Богомолов Г.И.* Определение формы тела минимальный теплопередачи при заданных длине и объеме // Изв. вузов. Машиностроение. 1977. № 5. С. 65–68.
12. *Брыкина И.Г., Гершбейн Э.А.* Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 91–102.
13. *Брыкина И.Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
14. *Брыкина И.Г., Гершбейн Э.А., Пейгин С.В.* Ламинарный пространственный пограничный слой не проницаемой поверхности в окрестности плоскости симметрии // Изв. АН СССР. МЖГ, 1980. № 5. С. 37–48.
15. *Брыкина И.Г., Русаков В.В.* Аналитические исследования трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 143–150.
16. *Брыкина И.Г., Русаков В.В.* Одномерные и двумерные аналогии для пространственных вязких течений в окрестности плоскости симметрии затупленных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 117–122.
17. *Брыкина И.Г., Русаков В.В.* Аналитическое исследование пространственного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии // ПМТФ. 1989. № 4. С. 16–22.
18. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Подобие пространственных и осесимметричных химически неравновесных течений в окрестности плоскости симметрии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 115–120.
19. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Аналитическое и численное исследование пространственного вязкого ударного слоя // Отчет Ин-та механики МГУ. № 3815. М., 1989. 52 с.
20. *Брыкина И.Г., Русаков В.В., Щербак В.Г.* Соотношения подобия для расчета пространственного химически неравновесного гиперзвукового вязкого обтекания затупленных тел // Отчет Ин-та механики МГУ. № 3971. М., 1990. 47 с.
21. *Ведерников Ю.А., Дулов В.Г., Латыпов А.Ф.* Оптимизация гиперзвуковых пространственных форм // ПМТФ. 1979. № 1. С. 65–71.
22. *Гамильтон Х.Х., Дежарнет Ф.Р., Вейльмюнстстер К.Дж.* Применение метода, основанного на осесимметричной аналогии для расчета теплообмена в трехмерном потоке // Аэрокосмич. техника. 1988. № 4. С. 19–26.
23. *Гершбейн Э.А., Гольдин В.Д., Тирский Г.А.* Радиационный теплообмен в окрестности критической точки затупленных тел с интенсивно испаряющейся поверхностью при пространственном гиперзвуковом обтекании водородо-гелиевой смесью // Космич. исследования. 1982. Т. 20. № 6. С. 859–865.
24. *Гершбейн Э.А., Гольдин В.Д., Тирский Г.А., Чуппин В.М.* О расчете пространственного обтекания затупленных тел с интенсивно испаряющейся поверхностью гиперзвуковым потоком селективно излучающего газа // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. Т. 13. № 1. С. 56–66.
25. *Голомазов М.М., Шабалин А.В.* Гиперзвуковое обтекание испаряющихся тел под углами атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 132–137.
26. *Голубинский А.И., Голубкин В.Н.* К теории пространственного обтекания тела гиперзвуковым потоком // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258. № 1. С. 42–44.
27. *Голубинский А.И., Голубкин В.Н.* Гиперзвуковое пространственное обтекание крыла потоком излучающего газа // ПМТФ. 1983. № 6. С. 71–78.
28. *Голубкин В.Н.* К асимптотической теории пространственного обтекания тел гиперзвуковым потоком излучающего газа // ПММ. 1983. Т. 47. № 4. С. 601–606.
29. *Гонор А.Л.* О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 185–189.
30. *Гонор А.Л.* Определение формы пространственного оптимального тела с учетом силы трения // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 24–30.
31. *Гонор А.Л.* Закон сопротивления Ньютона для тел, образованных пересекающимися поверхностями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 93–101.
32. *Гусаров А.А., Левин В.А.* Пространственная форма тела минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 98–103.
33. *Данеев А.В.* Одна задача оптимизации пространственной формы тела в гиперзвуковом потоке // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Иркут. ВЦ СО АН СССР, 1989. С.74–84.
34. *Дворецкий В.М., Иванов М.Я., Коняев Б.А., Крайко А.Н.* О правиле эквивалентности для течений идеального газа // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 6. С. 1004–1014.
35. *Деев А.А., Левин В.А., Пилюгин Н.Н.* Форма тела, оптимальная по условиям радиационной теплопередачи // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1976. № 44. С. 16–20.
36. *Деев А.А., Пилюгин Н.Н.* Определение формы тела с минимальным лучистым притоком тепла вдоль траектории полета // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 94–100.
37. *Деев А.А.* О форме тела с минимальным потоком лучистой энергии при ограничении на локальный поток // Вестн. МГУ. Математика и механика. 1977. № 6. С. 107–111.

38. *Знаменский В.В., Зубарев А.В.* Расчет конвективных тепловых потоков при трехмерном обтекании по заданному распределению давления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 160–167.
39. *Коган М.Н.* О сопротивлении тел, близких к телам вращения // Инж. ж. 1961. Т. 1. Вып. 3.С. 156–158.
40. *Кострыкин В.С., Фомин В.Н., Холодов А.С.* Пространственное обтекание затупленных конусов и эллипсоидов вращения потоков излучающего газа // Ж. вычисл математики и мат. физики. 1976. Т. 16. № 2. С. 451–459.
41. *Костузик А.А., Румынский А.Н.* Лучистый теплообмен в ударном слое при пространственном обтекании затупленных тел // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24. № 3. С. 435–441.
42. *Костузик А.А., Румынский А.Н.* Численное исследование трехмерного радиационного поля в задачах гиперзвукового обтекания сегментных тел // Инж.-физ.ж. 1984. Т. 47. № 6. С. 941–945.
43. *Кочанов В.Г.* Формы пространственных тел с минимальным конвективным тепловым потоком в окрестности линии растекания // Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в гиперзвуковом потоке. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 95–103.
44. *Ладыженский М.Д.* Гиперзвуковое правило площадей // Инж. ж. 1961. Т. 1. Вып. 1. С. 159–163.
45. *Ладыженский М.Д.* О гиперзвуковом обтекании тонких затупленных тел // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 150–151.
46. *Ладыженский М.Д.* Обобщение гиперзвукового правила площадей // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 3. С. 188–189.
47. *Ламар Дж., Фринк Н.Т.* Аэродинамические характеристики проектируемых конфигураций крыла с продольным наплывом // Аэрокосмич. техника. 1983. Т. 1. № 7. С. 127–137.
48. *Лин Т.К., Грабовски У.Р., Елмгрен К.Э.* Об оптимизации формы возвращаемых летальных аппаратов // Аэрокосмич техника. Т. 3. № 4. 1984. С. 116–126.
49. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
50. *Мартин Дж.* Вход в атмосферу. Введение в теорию и практику. М.: Мир, 1969. 320 с.
51. *Майкапар Г.И.* О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 376–378.
52. *Майкапар Г.И.* О вариационных задачах Ньютона для непологих тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 95–97.
53. *Майкапар Г.И.* О наивыгоднейшей форме несущих тел при гиперзвуковых скоростях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 2. С. 38–47.
54. *Мэллмут Н.Д.* Новое правило площадей для гиперзвукового обтекания конфигурации крыло–фюзеляж // Ракетн. техника и космонавтика. 1971. Т. 9. № 12. С. 197–199.
55. *Мэллмут Н.Д.* Обобщенные правила площадей и интегральные теоремы для гиперзвукового обтекания конфигурации крыло–фюзеляж // Ракетн. техника и космонавтика. 1978. Т. 16. № 9. С. 191–194.
56. Основы теплопередачи в авиационной и космической технике / Под ред. Кошкина В.К. М.: Машиностроение, 1975. 623 с.
57. *Пейгин С.В., Тирский Г.А.* Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 22. С. 62–177.
58. *Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Основы динамики излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1979. 147 с.
59. *Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Динамика ионизованного излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1989. 309 с.
60. *Пилюгин Н.Н., Прокопенко Л.А.* Вариационные задачи радиационной газодинамики при наличии вдува газа с поверхности // ПМТФ. 1989. № 3. С. 49–54.
61. *Сейфф А., Таубер М.Е.* Оптимальные формы конических тел, предназначенных для касательного входа в атмосферу со скоростью выше второй космической // Ракетн. техника и космонавтика. 1966. № 1. С. 77–81.
62. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
63. *Тирский Г.А.* К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1975. № 39. С. 5–38.
64. *Уильямс Е.Д., Кэрри Д.М.* Определение теплового воздействия на орбитальный корабль по данным летных испытаний // Аэрокосмич. техника. 1985. № 5. С. 20–30.
65. *Фомин В.Н.* Обтекание и лучистый нагрев затупленных тел под углами атаки $\alpha \geqslant 0$ // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. Т. 7. № 5. С. 149–161.
66. *Фэннелоп Т.К.* Метод решения уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя применительно к проблеме входа в атмосферу тел с подъемной силой // Ракетн. техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 102–113.
67. *Хью Е.* Объединенное правило площадей для гиперзвуковых и сверхзвуковых течений около конфигурации тела с крыльями // Ракетн. техника и космонавтика. 1972. № 7. С. 130–131.
68. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
69. *Шидловский В.П.* Введение в динамику разреженного газа. М.: Наука, 1965. 218 с.
70. *Швец А.И.* Аэродинамика сверхзвуковых форм. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.
71. *Шеплэнд Д.И., Прайс Д.А., Херн А.Ф.* Конфигурация космического аппарата, использующего

торможение в атмосфере Земли при возвращении с Марса // Ракетн. техника и космонавтика. 1965. № 8. С. 174–184.

72. *Allen H.J., Eggers A.J.Jr.* A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the Eauth's atmosphere at high supersonic speeds // NACA. 1958. Report. № 1381. 16 p.
73. *Baker R.L., Kramer R.F.* Reentry vehicle nosetip disign for minimum total heat transfer // AIAA Pap, 1979, 201, 10 p.
74. *Cooke J.C.* An axially symmetric analogue for general three-dimensional boundary layers // A.R.C. Reports and Memoranda. 1961. № 3200. 12 p.
75. *De Jarnette F.R., Hamilton H.H.* Inviseid surface-streamlines and heat transfer on shuttle type configurations // AIAA Paper. 1972. № 703. 13 p.
76. *Gupta R.N., Moss J.N., Simmonds A.L., Shinn J.L., Zoby E.V.* Space Shuttle heating analysis with variation in angle of attack and catalycity // J. Spacecraft and Rockets. 1984. V. 21. № 2. P. 219–221.
77. *Kondo J., Aihara Y., Tani T., Onij A.* The optimum configuration and the optimum reentry trajectory of space shuttle venicles // Intern Council Aeronaut. Sci. Paper. 1972. № 72–27. 17 p.
78. *Malmuth N.D.* Hypersonic flow over a delta wing of moderate aspect ratio // AIAA Journal. 1966. V. 4. № 3. P. 555–556.
79. *Malmuth N.D.* Summation of Series // SIAM Review. 1971. V. 13. № 2. P. 250–253.
80. *Oswatitsch K.* The area rule // Appl. Mech. Rev. 1957, V. 10. № 12. P. 543–545.
81. *Rackich J.V., Lanfranco M.J.* Numerical computation of space shuttle and surface streamlines // AIAA Paper. 1976. № 464. 14 p.
82. *Zoby E.V.* Approximate heating analysis for wind ward symmetry plane of shuttle-like bodies at large angle of attack // Progress in Astronautics and aeronautics : Thermophysics of Atmospheric Entry. N.Y.: AIAA. 1982. V. 82. P. 229–247.

Москва

Поступила в редакцию
27.I.1991