Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.38

© 1992 г. С.А. Довбыш

О СЕПАРАТРИСЕ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ВОЛЧКА ГЕССА–АППЕЛЬРОТА

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, тензор инерции и центр масс которого (не совпадающий с точкой подвеса) удовлетворяют условиям Гесса-Аппельрота (ГА). При нулевом значении постоянной площадей волчок имеет неустойчивое положение равновесия, при котором радиус-вектор, проведенный из точки подвеса в центр масс, направлен вертикально вверх. Решения, асимптотические к этому положению равновесия, образуют двумерные входящую и выходящую сепаратрисы, которые удовлетворяют условиям Гесса и поэтомусовпадают (сдвоены). Рассматривается движение вблизи сдвоенной сепаратрисы (когда частный интеграл Гесса, вообще говоря, может быть отличен от нуля) и найдены семейства долгопериодических решений. Изучается расщепление сепаратрис при возмущении волчка ГА. Полученные результаты используются для исследования сепаратрис возмущенной задачи Лагранжа при близком к нулевому значению постоянной площадей. В частности, для нулевого значения постоянной площадей показано наличие двухобходных гомоклинических решений, влекущее неинтегрируемость задачи. Ранее [1] было обнаружено наличие однообходных гомоклинических решений возмущенной задачи Лагранжа, влекущее неинтегрируемость для ненулевых значений постоянной площадей.

1. Постановка задачи. Для изучения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в ряде случаев удобно пользоваться специальной системой координат [2, 3], т.е. такой жестко связанной с телом декартовой системой, в которой единичный вектор, направленный из точки подвеса в центр тяжести, имеет вид $\mathbf{r}_0 = (1, 0, 0)$, а кинетическая энергия T выражается через компоненты вектора $\mathbf{G} = (x, y, z)$ кинетического момента по формуле

$$2T = (A\mathbf{G}, \mathbf{G}) = ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2x(b_1y + b_2z)$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{Vmatrix} a & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_1 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{Vmatrix} \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

(A – соответствующий гирационный тензор). Уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{G}^{\cdot} = \mathbf{G} \times \omega + \Gamma\mathbf{r}_0 \times \gamma, \quad \gamma^{\cdot} = \gamma \times \omega \tag{1.1}$$

и обладают интегралами: геометрическим $(\gamma, \gamma) = 1$, площадей $(\mathbf{G}, \gamma) = j$ и энергии $E = T - \Gamma\gamma_0$. Здесь $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести (вертикально вниз), $\omega = A\mathbf{G} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2) = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости, Γ – произведение веса тела на расстояние от неподвижной точки до его центра тяжести.

Волчок ГА характеризуется условиями $a_1 = a_2 = a^*$. Поворотом специальной системы координат вокруг первой оси можно добиться выполнения соотношений $b_2 = 0, b_1 \geqslant 0$ [3]. Соответствующие уравнения движения допускают частный интеграл Гесса $x = 0$. Удобно положить $c = 2b_1/a^*$ и перейти к безразмерным переменным

$$\omega_i = 2\sqrt{b_1\Gamma}\,\omega_i'/c, \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}'\sqrt{\Gamma/b_1}$$
$$j = j'\sqrt{\Gamma/b_1}, \quad t = t'/\sqrt{b_1\Gamma}, \quad E = \Gamma h \tag{1.2}$$

после чего в полярных координатах $\omega_1' = \rho\cos\varphi$, $\omega_2' = \rho\sin\varphi$ уравнения примут вид [3]

$$\rho\rho^{\cdot} = \sqrt{f(\rho)}, \quad \rho^2\varphi^{\cdot} = -\rho^3\cos\varphi + j', \quad f(\rho) = \rho^2(1-\gamma_0^2) - j'^2$$
$$\gamma_0 = c^{-1}\rho^2 - h, \quad \gamma_1 = j'\rho^{-1}\cos\varphi + \rho^{\cdot}\sin\varphi, \quad \gamma_2 = j'\rho^{-1}\sin\varphi - \rho^{\cdot}\cos\varphi \qquad (1.3)$$

В общем случае ρ^2 — эллиптическая функция времени, изменяющаяся между двумя неотрицательными корнями многочлена $P(u) = f(\sqrt{u})$. Из формул (1.3) следует, что интегралы геометрический, площадей, энергии и частный интеграл Гесса независимы всюду на двумерном совместном уровне в шестимерном фазовом пространстве, кроме прецессионных движений ($\gamma_0 \equiv \text{const}$), соответствующих случаю, когда ρ^2 тождественно равно кратному корню многочлена P. Соответствующее ограничение на интегралы имеет вид $h = 1$, $j = 0$ либо [3] $2c[h^3 - 9h - (h^2+3)^{3/2}] + 27j'^2 = 0$. В первом случае все движения двоякоасимптотичны к неустойчивому положению равновесия и эта ситуация обсуждается ниже. Во втором случае интервал изменения ρ и соответственно совместный уровень интегралов вырождаются в единственную точку и траекторию прецессионного движения.

При нулевом значении постоянной площадей j и критическом значении $h = 1$ постоянной энергии решение первого уравнения (1.3) имеет вид

$$\rho = \sqrt{2c}/\operatorname{ch}\tau, \ \tau = \sqrt{2/c}\,t' + t_0 = \sqrt{a^*}\,\Gamma t + t_0, \quad t_0 = \text{const}$$

Второе уравнение (1.3) решается методом разделения переменных (так как $j = 0$):

$$\sin\varphi = \operatorname{th}g, \quad \cos\varphi = \epsilon/\operatorname{ch}g$$

Здесь и далее используется обозначение $g = C - 2c\operatorname{arctg}e^{\tau}$, причем C — некоторая действительная постоянная, $\epsilon = \pm 1$. Найденные решения, двоякоасимптотические к положению равновесия, в безразмерных переменных ω_i', $\mathbf{G}' = (x', y', z')$ имеют вид

$$y' = \omega_1' = \frac{\epsilon\sqrt{2c}}{\operatorname{ch}\tau\operatorname{ch}g}, \quad z' = \omega_2' = \frac{\sqrt{2c}}{\operatorname{ch}\tau}\operatorname{th}g$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{\operatorname{ch}^2\tau} - 1, \quad \gamma_1 = -2\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2\tau}\operatorname{th}g, \quad \gamma_2 = 2\epsilon\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}^2\tau\operatorname{ch}g} \qquad (1.4)$$

При переходе от безразмерных переменных y', z' к исходным y, z коэффициент $\sqrt{2c}$ в формулах (1.4) заменяется на $2\sqrt{\Gamma/a^*}$. При $c = 0$ имеем известные двоякоасимптотические плоские движения волчка Лагранжа (движения математического маятника).

Таким образом, решения (1.4) нумеруются наборами (C, ϵ). Заметим, что пары случаев $C = -\infty$, $\epsilon = \pm 1$ и $C = +\infty$, $\epsilon = \pm 1$ совпадают, а соответствующие решения — плоские (маятниковые): $y \equiv 0$, $\gamma_3 \equiv 0$. Обстоятельство, что движения волчка, асимптотические к положению равновесия, являются гессовыми, было, по-видимому, впервые отмечено Аппельротом ([4], с. 130).

Рассмотрим вращение несимметричного волчка Эйлера–Пуансо вокруг средней оси инерции. Тогда отличные от единицы собственные числа соответствующей матрицы монодромии отображения за период имеют вид $\exp(\pm 2\pi\Lambda)$, где $\Lambda > 0$ — некоторая величина [5, 6]. Можно показать, что в пределе $\Lambda = c/2 = b_1/a^*$, если рассматриваются быстрые вращения гироскопа ГА с $c > 0$ (в случае $c = 0$ волчок ГА является волчком Лагранжа, в случае $c > 0$ он имеет несимметричный эллипсоид инерции). Множество всех возможных значений Λ образует [7] интервал (0; 1), и, как известно, для тела, имеющего заданный несимметричный тензор инерции, можно выбрать расположение центра масс, отличное от точки подвеса так, чтобы выполнялось условие Гесса. Поэтому множество возможных значений c есть [0; 2). (Ранее [8] было показано, что $c \leqslant 2$, но не обсуждалось, какие из указанных значений могут приниматься.) Если же тело содержит эллипсоидальную полость, наполненную несжимаемой идеальной жидкостью, совершающей безвихревые движения, то $\Lambda > 0$ и соответственно $c > 0$ могут принимать любые значения [9].

Отметим, что согласно геометрической картине движения, данной Жуковским (см. [4, 10]), центр масс волчка ГА движется как некоторый сферический маятник с теми же значениями интегралов энергии и площадей и тем же кинетическим моментом. В частности, при $j = 0$ этот маятник совершает плоские движения.

2. Построение отображения последования для движений вблизи сепаратрисы. Вблизи положения равновесия O: $\mathbf{G} = 0$, $\gamma = (-1, 0, 0)$ приведенной системы (1.1) на уровне $M^4 \subset \mathbf{R}^6$ интегралов геометрического и площадей $j = 0$ в качестве локальных координат можно выбрать y, z, γ_1, γ_2. Согласно соотношениям (1.2), (1.4) для решений, асимптотических к точке O, справедливы соотношения (берутся только верхние или нижние знаки)

$$y \sim 4me^{\pm\tau}\cos\varphi_{\mp}, \quad \gamma_1 \sim \pm 4e^{\pm\tau}\sin\varphi_{\mp}$$

$$z \sim 4me^{\pm\tau}\sin\varphi_{\mp}, \quad \gamma_2 \sim \mp 4e^{\pm\tau}\cos\varphi_{\mp}, \quad t \to \mp\infty$$

где $m = \sqrt{\Gamma/a^*}$, а $\varphi_{\pm}$ – предельные значения угла φ:

$$\sin\varphi_- = \operatorname{th} C, \quad \cos\varphi_- = \epsilon/\operatorname{ch} C$$

$$\sin\varphi_+ = \operatorname{th}(C - c\pi), \quad \cos\varphi_+ = \epsilon/\operatorname{ch}(C - c\pi)$$

Поэтому в линейном приближении выходящая сепаратриса W^- задается условиями $X_+ = Y_+ = 0$, а входящая сепаратриса W^+ – условиями $X_- = Y_- = 0$, где новые локальные координаты связаны со старыми соотношениями

$$y = 2m(X_- + X_+), \quad \gamma_1 = 2(Y_- - Y_+)$$

$$z = 2m(Y_- + Y_+), \quad \gamma_2 = 2(X_+ - X_{\pm})$$

причем в линейном приближении для асимптотических решений

$$X_{\mp} = 2e^{\pm\tau}\cos\varphi_{\mp}, \quad Y_{\mp} = 2e^{\pm\tau}\sin\varphi_{\mp}, \quad t \to \mp\infty \tag{2.1}$$

Приведенная система на M^4 гамильтонова, а соответствующие скобки Пуассона $\{,\}$ имеют стандартный вид [11]. Вычисления показывают, что

$$\{X_-, Y_-\} = \{X_-, Y_+\} = \{Y_-, X_+\} = \{X_+, Y_+\} = 0$$

$$\{X_-, X_+\} = \{Y_-, Y_+\} = 1/(8m)$$

в точке O. Поэтому можно ввести канонически сопряженные переменные $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, такие, что в точке O в линейном приближении

$$(p_1, p_2) = 2\sqrt{2m}(X_+, Y_+), \quad (q_1, q_2) = 2\sqrt{2m}(X_-, Y_-)$$

Далее, характеристические показатели линеаризованной системы в точке O образуют две пары совпадающих чисел $\pm\sqrt{a^*\Gamma}$, т.е. имеет место резонанс второго порядка. Совершая последовательные шаги процедуры нормализации Биркгофа, можно устранить нерезонансные члены в гамильтониане H приведенной системы.

Введем обозначения $\|P\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$, $\|Q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ и отметим, что члены порядков $\|P\|\|Q\|^r$, $\|Q\|\|P\|^r$, где $r \geqslant 2$, далеки от резонансных. Поэтому их последовательное уничтожение не приводит к появлению малых знаменателей, и соответствующая процедура частичной нормализации сходится (ср. [12]). Итак, в окрестности точки $O \in M^4$ существуют канонически сопряженные переменные, в которых гамильтониан (постоянная энергии) имеет вид

$$H = k^{-1}(p_1q_1 + p_2q_2) + O(\|P\|^2\|Q\|^2), \quad k^{-1} = \sqrt{a^*\Gamma}$$

(с точностью до несущественного постоянного слагаемого), а сепаратрисы задаются условиями

$$W^-: P = 0; \quad W^+: Q = 0$$

Пусть $s = p_2 q_1 - p_1 q_2$.

В качестве локальных координат, трансверсальных к двумерной сепаратрисе, удобно взять s (или x) и H. Имеем

$$x = y\gamma_1 + z\gamma_2 = 8m(X_+ Y_- - X_- Y_+) = -s$$

с точностью до членов более высокого порядка. Далее, в линейном по s, H приближении Q выражается через P, s, H по формуле

$$(q_1, q_2) = \|P\|^{-2}(s(p_2, -p_1) + kH(p_1, p_2)) \tag{2.2}$$

а P – через Q, $s' = s$, H по аналогичной формуле

$$(p_1, p_2) = \|Q\|^{-2}(-s'(q_2, -q_1) + kH(q_1, q_2))$$

Если $\omega = \|P\| \|Q\|$, то $\omega^2 = s^2 + (kH)^2$ с точностью до членов более высокого порядка по s, H. Величина ω характеризует расстояние до сепаратрисы на уровне интегралов M^4. Введем также углы θ, θ':

$$(p_1, p_2) = \|P\| (\cos\theta, \sin\theta), \quad (q_1, q_2) = \|Q\| (\cos\theta', \sin\theta') \tag{2.3}$$

Из (2.2) следует, что

$$\theta' = \begin{cases} \theta - \operatorname{arc\,tg}[s/(kH)], & H > 0 \\ \theta - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sign} s, & H = 0 \\ \theta + \pi - \operatorname{arc\,tg}[s/(kH)], & H < 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Далее, при движении вблизи гиперболической точки O величины ω, s, θ, θ' мало меняются. Действительно, видно, что члены $O(\omega^2)$ в гамильтониане H оказывают малое влияние на изменение этих величин (которые остаются постоянными в соответствующей линеаризованной системе). Точнее говоря, в некоторой комплексной окрестности точки O справедливы соотношения

$$|s^\cdot| = O(\omega^2), \quad |\omega^\cdot| = O(\omega^2), \quad |\theta^\cdot| = O(\omega), \quad |\theta'^\cdot| = O(\omega)$$

(здесь s, ω, θ, θ' – уже комплексные величины). Здесь и далее точка означает дифференцирование по размерному времени t. Введем вещественные регулярные аналитические трехмерные площадки $\Pi^\pm$, которые трансверсально пересекаются со всеми вещественными решениями, лежащими на $W^\pm$. Можно считать, что площадка Π^+ задается условием $\|P\| = \text{const} > 0$, а Π^- – условием $\|Q\| = \text{const} > 0$. Тогда на Π^+ найдется окрестность U множества $g = W^+ \cap \Pi^+$, такая, что определено аналитическое отображение $S_0: U \backslash g \to \Pi^-$ вдоль траекторий приведенной системы. Соответствующее время движения есть $T = O(-\ln \omega)$, а приращения рассматриваемых величин составляют

$$|\Delta s/\omega|, \quad |\Delta\omega/\omega|, \quad |\Delta\theta|, \quad |\Delta\theta'| \leqslant O(T\omega) = O(\omega \ln \omega)$$

Эти же оценки останутся справедливы, если рассматривать участки $W^\pm$, $\Pi^\pm$, g, лежащие в комплексном пространстве вблизи соответствующих вещественных объектов. Поэтому вещественное отображение последования S_0: $(H, s, \theta) \to (H, s', \theta')$ задается приближенными формулами $s' = s$ и (2.4), причем соответствующая погрешность оказывается аналитической функцией, которая $O(\omega \ln \omega)$-мала в смысле следующего определения.

Определение. Будем говорить, что аналитическая функция S: $(H, s, \theta) \to (H', s', \theta')$, заданная на $U \backslash g$ со значениями в Π^- $O(f(\omega))$-мала, если величина θ' $O(f(\omega))$-мала, а величины H', s' $O(\omega f(\omega))$-малы в комплексной области, которая является C_1-окрестностью по координате θ и $C_1\omega$-окрестностью по координатам H, s вещественной области, где ω меняется не более, чем в C_2 раз. Здесь C_1, C_2 – некоторые положительные постоянные. Таким образом, если координаты s, s', H, H' "растянуть" так, чтобы величина ω стала порядка единицы, то функция S станет $O(f(\omega))$-малой в некоторой фиксированной комплексной области (малой в C^ω-норме). В частности, все ее производные будут иметь такой же порядок малости.

Некоторой канонической заменой можно устранить в гамильтониане H далекие от резонансных члены порядков $\|P\|^\alpha \|Q\|^\beta$, где $\alpha/\beta \geqslant 2$ или $\beta/\alpha \geqslant 2$. Тогда ряды, задающие H, сходятся при достаточно малых значениях произведения $\omega = \|P\| \|Q\|$, даже если один из сомножителей не мал. Используя это, можно продолжить координаты P, Q в окрестность V сдвоенной сепаратрисы W, такую что замыкание V не содержит точки O. Указанное продолжение можно сделать двумя способами: вдоль сепаратрисы W^- (координаты P^-, Q^-) и вдоль сепаратрисы W^+ (координаты P^+, Q^+).

Найдем соответствующие формулы перехода в области V (ср. [7, 9]).

Из (2.1) следует, что в линейном приближении $\|Q^-\| = 2\sqrt{3m}e^{\tau}$, $t \to -\infty$ и $\|P^+\| = 2\sqrt{8m}e^{-\tau}$, $t \to +\infty$ для двоякоасимптотических решений. Так как при этом на сепаратрисе $WP^{+\cdot} = -k^{-1}P^+$, $Q^{-\cdot} = k^{-1}Q^-$, то всюду на W выполнено тождество $\|P^+\|\|Q^-\| = 32m$. Далее, на двоякоасимптотических решениях дифференциал dx удовлетворяет уравнению в вариациях $d(dx)/dt' = -z\,dx$, а ds сохраняется. При этом $dx \to (dx)_\pm$ для $t \to \pm\infty$, где $dx_+ = dx_-\operatorname{ch}(C - c\pi)/\operatorname{ch}C$. С другой стороны, в гиперболической точке O выполнено $x = -s$ с погрешностью в членах порядка выше второго и поэтому $ds' = -dx_-$, $ds = -dx_+$, где величины s' и s $(= p_2q_1 - p_1q_2)$ соответствуют системам координат P^-, Q^- и P^+, Q^+. Для каждого решения, лежащего на сепаратрисе W, углы θ, θ', связанные с P^+, Q^- по формулам (2.3), – постоянные величины. Поэтому $\theta = \varphi_+$, $\theta' = \varphi_-$.

С $O(\omega)$-малой в смысле данного определения погрешностью формулы перехода $S_1: (H, s', \theta') \to (H, s, \theta)$ имеют вид

$$s \doteqdot [\operatorname{ch}(C - c\pi/\operatorname{ch}C]\ s'$$

$$\cos\theta = \epsilon/\operatorname{ch}(C - c\pi), \qquad \sin\theta = \operatorname{th}(C - c\pi)$$

где

$$\cos\theta' = \epsilon/\operatorname{ch}C, \quad \sin\theta' = \operatorname{th}C \tag{2.5}$$

(т.е. в выражении для θ оставлены члены, не зависящие от H, s', а в выражении для s – соответственно линейные по H, s', члены), или в координатах C, s, где C подбирается согласно (2.5) и штрихи опущены,

$$C \to C - c\pi, \qquad s\cos\theta = \mathrm{const} \tag{2.6}$$

Видно, что инвариантная лиувиллева мера гамильтонова потока приведенной системы порождает на трехмерной площадке инвариантную меру отображения последования, которая при $s = 0$, $H = 0$ имеет вид $ds(s') \wedge dH \wedge d\theta(\theta')$. Можно проверить, что отображение S_1 в рассматриваемом приближении сохраняет эту 3-форму. Действительно, из (2.5) следует, что $d\theta' = \cos\theta' dC$, и поэтому $d(s'\cos\theta') \wedge dC = ds' \wedge d\theta'$, после чего удобно воспользоваться формулой (2.6). Аналогичный результат, очевидно, справедлив и для отображения S_0.

Для изучения движений вблизи сепаратрисы W целесообразно взять трехмерную площадку Π^+ или Π^- и рассмотреть порождаемое на ней соответствующее отображение последования $S = S_1 \circ S_0$ или $S = S_0 \circ S_1$, которое будет двумерным при учете наличия интеграла H. Если считать, что площадка задается условием $\|P\| = \mathrm{const}$ или $\|Q\| = \mathrm{const}$, то соответствующее время движения есть $k\ln(32m/\omega)$ с погрешностью $O(\omega\ln\omega)$ в смысле данного ранее определения.

Заметим, что все оценки $O(\omega)$, $O(\omega\ln\omega)$ будут равномерными на любом компакте из пространства параметров задачи

$$\{(a, a^*, b_1) \in \mathbf{R}^3:\ a > 0,\ a^* > 0,\ b_1 \in \mathbf{R},\ b_1^2 < aa^*\}$$

3. Периодические движения вблизи сепаратрисы. В качестве приложений результатов разд. 2 рассмотрим вопрос о периодических решениях вблизи сепаратрисы волчка ГА, для которого $c > 0$. Для этого необходимо найти периодические точки отображения последования S. Периодической точке отображения S, имеющей наименьший период n, соответствует n-обходное периодическое решение, т.е. решение, n раз обходящее сепаратрису. Далее все величины указываются с погрешностью $O(\omega\ln\omega)$.

1°. При $s = 0$, $H > 0$ отображение S имеет только две неподвижные точки $\theta = \theta' = \pm\pi/2$. Они соответствуют плоским вращениям, которые существуют при условиях Гесса в силу симметрии задачи. Простые вычисления показывают, что собственные числа отображения S в неподвижных точках есть $\exp(\pm c\pi)$. Следовательно, плоские вращения являются гиперболическими. Из анализа изменения угла $\theta = \theta'$ при итерациях отображения S видно, что двумерная регулярная поверхность $M_H^2 \subset M^4$, высекаемая интегралом энергии H и частным интегралом Гесса, совпадает с выходящими сепаратрисами одной из этих гиперболических траекторий и входящими сепаратрисами второй. Аналогичный результат для любых $H > 0$ следует из второго уравнения (1.3), поскольку всегда $\rho \gg \rho_0(H) > 0$.

2°. При $s = 0$, $H < 0$ отображение S не имеет точек с нечетным периодом (при достаточно малом $-H$). Полученные в разд. 2 формулы недостаточны для нахождения точек четного периода. Действительно, из этих формул следует, что вся окружность $s = 0$ состоит из неподвижных вырожденных точек отображения S^2. Такая картина может разрушаться неучтенными членами $O(\omega \ln \omega)$. В частности, плоскому колебанию (либрационному движению) волчка соответствуют неподвижные точки отображения S^2, $O(H)$-близкие в смысле определения разд. 2 к $s = 0$, $\theta = -\theta' = \pm\pi/2$, а собственные числа являются вещественными $O(H \ln(-H))$-близкими к единице. Используя соображения симметрии, можно показать, что для всех $0 > H = E - \Gamma > -2\Gamma$ поверхность M_H^2 заполнена замкнутыми вырожденными траекториями. Поэтому отображение S действительно имеет замкнутую кривую вырожденных неподвижных точек, $O(H)$-близкую к окружности $s = 0$. Неясно, однако, имеются ли в $O(H \ln H)$-окрестности этой окружности другие неподвижные точки.

3°. При $s \neq 0, H > 0$ отображение S имеет две неподвижные точки $\theta = -\theta' = ½ \operatorname{arc\,tg}[s/(kH)] \bmod \pi$, и можно найти, что

$$s/(kH) = -2\epsilon \operatorname{sh}C/(1 - \operatorname{sh}^2 C); \quad C = c\pi/2, \quad \operatorname{tg}\theta = -\epsilon \operatorname{sh}C \tag{3.1}$$

причем имеет место ограничение $\operatorname{sh}C < 1$.

4°. При $s \neq 0$, $H < 0$ отображение S имеет две неподвижные точки

$$\theta = -\theta' = ½(\operatorname{arc\,tg}[s/(kH)] - \pi) \bmod \pi$$

и справедливы формулы (3.1), причем имеет место ограничение $\operatorname{sh}C > 1$.

5°. В предельном для случаев 3°, 4° варианте имеем $\operatorname{sh}C = 1$, $H = 0$, $\theta' = -\theta = \pi/4 \bmod \pi$ или $3\pi/4 \bmod \pi$ и соответственно $s < 0$ или $s > 0$. Тогда, как и в случае 2°, имеем целые линии, состоящие из вырожденных неподвижных точек отображения S с неучтенными членами $O(\omega \ln \omega)$.

Простые вычисления показывают, что след линейной части отображения S в неподвижных точках для случаев 3°, 4°, 5° есть

$$A(v) = 2[1 - 2v(1 - v)/(1 + v)^2], \quad v = \operatorname{sh}^2 C.$$

Из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. 1) Все однообходные периодические решения, достаточно близкие к сепаратрисе, описываются случаями 1°, 3°, 4°, исключая неясную ситуацию случая 5° для $\operatorname{sh}C = 1$.

2) Решения, описываемые случаями 3°, 4°, являются эллиптическими при $\operatorname{sh}C < 1$, т.е. $c < c_* = 2\pi^{-1}\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0{,}561$ (случай 3°) или гиперболическими при $\operatorname{sh}C > 1$, т.е. $c > c_*$ (случай 4°)

Замечание. Функция $A(v)$ убывает при $v < 1/\sqrt{3}$, т.е. $c < c_{**} = 2\pi^{-1}(\ln(1 + \sqrt{1 + \sqrt{3}}) - ¼\ln 3) \approx 0{,}446$ и возрастает при $v > 1/\sqrt{3}$, т.е. $c > c_{**}$. Минимальное значение $A(v)$ есть $A(1/\sqrt{3}) = 6(2 - \sqrt{3}) \approx 1{,}61$; $A(v) \to 6$ при $v \to +\infty$.

4. Расщепление сепаратрис возмущенной задачи. Изучим в первом порядке теории возмущений расщепление сепаратрис неустойчивого перманентного вращения, если нарушаются условия ГА. В силу симметрии достаточно рассматривать возмущения, при которых изменяется хотя бы одна из следующих трех величин: a_{22} (или a_{11}), a_{12}, j. Здесь $A = (a_{ij})$ – гирационный тензор, соответствующий подвижной системе, первая ось которой направлена из точки подвеса в центр тяжести. Удобно ввести параметр

$$\delta = [(a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 + (dj)^2]^{½}$$

(произвольный множитель d, имеющий размерность "момент инерции$^{-2}\times$время", служит для приведения слагаемых к одной размерности), характеризующий отличие рассматриваемого волчка от волчка ГА.

Чтобы изучить поведение решений приведенной системы (1.1) в зависимости от значения постоянной площадей j, удобно поступить следующим образом. Положим $\mathbf{M} = \mathbf{G} - j\gamma$. Тогда $(\mathbf{M}, \gamma) = 0$ и после замены $\mathbf{G}$ на $\mathbf{M}$ уравнения (1.1) сохранят свой вид, но угловая скорость будет вычисляться по формуле $\omega = A\mathbf{M} + jA\gamma$. Таким образом, случай $j \neq 0$ сводится к случаю $j = 0$ с изменением формулы зависимости ω от $\mathbf{M}$, γ. В дальнейшем $\mathbf{M} = (x, y, z)$.

Итак, имеются три независимых параметра возмущения $\alpha = a_{22} - a_{11}$, $\beta = a_{12}$, j.

Для изучения расщепления сепаратрис удобно использовать известную технику [13, 14]. Пусть W – невозмущенная (сдвоенная) сепаратриса, а W^+ и W^- – соответственно возмущенные входящая и выходящая сепаратрисы. Пусть $U \subset \mathbf{R}^6\{\mathbf{M}, \gamma\}$ – некоторая область, такая, что: 1) замыкание $\overline{U}$ не содержит невозмущенную неподвижную точку приведенной системы (1.1), 2) граница ∂U трансверсально пересекает невозмущенную сепаратрису W. Тогда существует аналитическая ретракция π: $U \to W$ (т.е. отображение, тождественное на множестве $U \cap W$). Невозмущенная сепаратриса W выделяется тремя классическими интегралами задачи и частным интегралом Гесса $x = 0$. Каждой точке $w \in U \cap W$ поставим в соответствие точки $w^{\pm} \in W^{\pm}$, такие, что $\pi(w^{\pm}) = w$. Пусть $x_{\pm}(w)$ есть x-координата точки $w^{\pm} \in \mathbf{R}^6$.

Для изучения расщепления сепаратрис $W^{\pm}$ необходимо вычислить члены первого порядка в разложении функции Мельникова $\Delta(w) = x_-(w) - x_+(w)$ по малым параметрам возмущения α, β, j. Для этого достаточно знать формулы невозмущенных двоякоасимптотических решений (1.2), (1.4) и соответствующее дифференциальное уравнение изменения x:

$$x^{\cdot} = -b_1 xz + \alpha yz + \beta(y^2 - z^2) + j(a^*(y\gamma_2 - z\gamma_1) - b_1 z\gamma_0) + \ldots$$

(многоточием обозначены члены более высокого порядка по α, β, j). После перехода по формулам (1.2) и $\alpha = b_1\alpha'$, $\beta = b_1\beta'$ к безразмерным переменным это уравнение примет вид (здесь и далее штрихи опущены)

$$dx/dt = x^{\cdot} = -zx + \alpha yz + \beta(y^2 - z^2) + j\left(\frac{2}{c}(y\gamma_2 - z\gamma_1) - z\gamma_0\right) + \ldots \qquad (4.1)$$

Функции $x_{\pm}(w)$ аналитически зависят от малых α, β, j, причем для вычисления членов первого порядка целесообразно поступить следующим образом. Пусть $v(t)$ – двоякоасимптотическое решение (1.4) такое, что $v(T) = w$ при некотором T, а $v_{\pm}(t)$ – соответственно, асимптотическое при $t \to \pm\infty$ решение, лежащее на $W^{\pm}$ и такое, что $v_{\pm}(T) = w^{\pm}$; $x_{\pm}(t)$ есть x-координата точки $v_{\pm}(t)$, подчиняющаяся уравнению (4.1). Для нахождения членов первого порядка в разложении $x_{\pm}(t)$ достаточно решать уравнение (4.1) в предположении, что значения y, z, γ_0, γ_1, γ_2 соответствуют невозмущенному решению $v(t)$ и наложено краевое условие $x_{\pm}(t) \to 0$, $t \to \pm\infty$, соответствующее неподвижной точке приведенной системы. Тогда уравнение (4.1) будет иметь вид $x^{\cdot} = f(t)x + h(t)$, где $f(t) = -z(t)$, $h(t)$ – известные функции времени. Простое вычисление показывает, что $-z\,dt = d(\ln \mathrm{ch}\, g)$.

Используя метод неопределенных множителей, получим решения в виде

$$x_{\pm}(t) = \mathrm{ch}\, g \int_{\pm\infty}^{t} \frac{h(t_1)}{\mathrm{ch}\, g(t_1)}\, dt_1$$

($g(t_1)$ – значение функции g, вычисленное в предположении $t = t_1$) и, следовательно,

$$\Delta(w) = x_-(T) - x_+(T) = \mathrm{ch}\, g(T)\, I$$

с точностью до членов более высокого порядка, где

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{\mathrm{ch}\, g(t)}\, dt$$

Совершая замену $l = 2\,\mathrm{arc\,tg}\, e^{\tau}$ можно показать, что

$$I = \alpha I_\alpha + \beta I_\beta + j I_j$$

$$I_\alpha = \epsilon c\sqrt{2c}\, J_\alpha, \quad I_\beta = c\sqrt{2c}\, J_\beta, \quad I_j = J_j$$

$$J_\alpha = \int_0^{\pi} \sin l\, \frac{\mathrm{sh}\, g}{\mathrm{ch}^3 g}\, dl, \qquad J_\beta = \int_0^{\pi} \sin l \left(\frac{2}{\mathrm{ch}^3 g} - \frac{1}{\mathrm{ch}\, g}\right) dl$$

$$J_j = \int_0^{\pi} \left(-2\,\frac{\sin 2l}{\mathrm{ch}\, g} + c\cos 2l\, \frac{\mathrm{sh}\, g}{\mathrm{ch}^2 g}\right) dl, \qquad g = C - cl$$

Возвращаясь к исходным (размерным) величинам, получим

$$I_\alpha = 4\epsilon\sqrt{\Gamma/a^{*3}}\, J_\alpha, \qquad I_\beta = 4\sqrt{\Gamma/a^{*3}}\, J_\beta, \qquad I_j = J_j$$

Не ограничивая общности, будем считать, что возмущенный гамильтониан обращается в нуль в неподвижной точке. Далее, некоторой канонической заменой, аналитической по параметрам возмущения α, β, j и тождественной при $\alpha = \beta = j = 0$, можно привести возмущенный гамильтониан к виду $H = H_2 + O(\omega^2)$, где квадратичные члены H_2 имеют порядок $O(\omega)$. (Это возможно благодаря тому, что после приведения H_2 к надлежащему виду члены $\|P\|^r\|Q\|$, $\|P\|\|Q\|^r$, $r \geqslant 2$ остаются далекими от резонансов.) Пусть s, s' – переменные, "подправленные" согласно этой замене. Тогда сепаратрисы W^+ и W^- удовлетворяют соответственно условиям $s = 0$ и $s' = 0$. Пусть $s_+(w)$ есть s-координата точки w^-, а $s_-(w)$ – s'-координата точки w^+. Из результатов разд. 2 следует, что для невозмущенной системы на сепаратрисе W выполняются соотношения

$$-dx = A_- ds' = A_+ ds, \quad A_\pm = \operatorname{chg}(T)/\operatorname{chg}(\pm\infty)$$

Поэтому имеют место разложения функций $s_\pm(w)$ в ряды по α, β, j, причем в линейном приближении

$$s_\pm(w) = \mp I \operatorname{chg}(\pm\infty) \tag{4.2}$$

Отсюда также вытекает следующий более общий результат. В линейном по α, β, j, s, H приближении вторая из формул (2.6) перехода $S_1^\sim : (H, s', \theta') \to (H, s, \theta)$ (здесь $S_1^\sim$ – "возмущенное" отображение S_1) в области V примет вид

$$s\cos\theta = -\epsilon I + s'\cos\theta'. \tag{4.3}$$

В отсутствие возмущений $I \equiv 0$ и (4.3) переходит в (2.6), а при $H = 0$ и $s' = 0$ или $s = 0$ из (4.3) следует (4.2). Эти результаты будут использованы в разд. 5.

Теорема 2. 1) Пусть $c > 0$. Тогда для достаточно малых δ расщепление сепаратрис W^+, W^- имеет порядок δ (см. [9]), причем эта оценка равномерна на любом компакте в пространстве параметров, соответствующих волчкам ГА с $c > 0$.

2) Пусть $c = 0$, т.е. невозмущенная задача является случаем Лагранжа. Тогда при достаточно малых δ, $|c|$ расщепление сепаратрис W^+, W^- имеет порядок $\max\{|\alpha|, |\beta|, |djc|\} = \delta_1$, причем эта оценка равномерна на любом компакте в пространстве параметров, соответствующих случаю Лагранжа.

Доказательство п. 1 непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Лемма. При $c > 0$ величины I_α, I_β, I_j как функции от набора (C, ϵ) являются линейно независимыми, т.е. $I = \alpha I_\alpha + \beta I_\beta + jI_j = 0$ для всех C, ϵ, только когда $\alpha = \beta = j = 0$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться асимптотическими формулами

$$\operatorname{ch}g \sim \tfrac{1}{2}\exp|g|, \quad \operatorname{sh}g \sim \tfrac{1}{2}\operatorname{sign}g\exp|g|, \quad g \to \pm\infty$$

и сделать простые вычисления.

В случае $c = 0$ имеем $I_j \equiv 0$, но функция $c^{-1}I_j|_{c=0}$ определена корректно и не равна тождественно нулю. Можно показать, что справедлива сформулированная выше лемма, если вместо I_j и j взять соответственно $c^{-1}I_j|_{c=0}$ и jc. Далее, в разложении $\Delta(\dot{w})$ по α, β, j, c отсутствуют члены вида j^r или c^r, так как $\Delta \equiv 0$ в случае ГА, когда $\alpha = \beta = j = 0$ или в случае Лагранжа, когда $\alpha = \beta = c = 0$. Отсюда вытекает п. 2 теоремы.

Следствие. Сепаратрисы W^+, W^- не расщепляются, только когда возмущенная задача является случаем Лагранжа либо постоянная площадей равна нулю и выполнены условия ГА.

Отметим, что ранее [6, 5] изучалось расщепление сепаратрис гиперболических периодических решений возмущенной задачи Эйлера–Пуансо (при произвольном значении постоянной площадей), получающихся из перманентных вращений вокруг средней оси инерции в невозмущенной задаче. Было показано, что сепаратрисы расщепляются всегда, кроме случая ГА, когда две пары сепаратрис остаются сдвоенными и совпадают с поверхностью M_H^2 (ср. п. 1° разд. 3), а две другие – расщепляются.

Замечания. 1°. Если сепаратрисы $W^\pm$ гиперболической точки гамильтоновой системы с двумя степенями свободы расщепляются, то они имеют по крайней мере две различных линии трансверсального пересечения или касания нечетного порядка (ср. с [1, 9]).

Доказательство элементарно и основано на использовании интегрального инварианта Пуанкаре–Картана. В частности, это утверждение применимо к приведенной системе (1.1), которая представима в гамильтоновой форме. В рассматриваемом случае оно также легко следует из равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dC = 0 \quad \text{для} \quad \epsilon = \pm 1$$

2°. Простое вычисление показывает, что в случае возмущения волчка Лагранжа

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \alpha \sin 2\varphi + \beta \cos 2\varphi + j c \pi \sin\varphi + \ldots$$

где $\varphi = \varphi_- = \varphi_+$ – угол, нумерующий двоякоасимптотические траектории. Можно показать, что при малых $\delta_1 \neq 0$ всегда существует одна линия трансверсального пересечения сепаратрис и даже две таких различных линии, если параметры α, β, j, c не лежат на аналитических многообразиях коразмерности два, уравнения которых в линейном по α, β, j, c приближении имеют вид $\beta = 0$, $\alpha \pm j c \pi = 0$.

5. Приложения к возмущенной задаче Лагранжа. Одно- и двухобходные трансверсальные гомоклинические решения. В случае $c = 0$ волчок ГА является волчком Лагранжа. Ниже рассматривается возмущение задачи Лагранжа, при котором центр масс сдвигается с оси динамической симметрии в перпендикулярном направлении, а постоянная площадей $j = 0$. В качестве параметра возмущения $\mu > 0$ возьмем угол, образуемый осью динамической симметрии с вектором, проведенным из неподвижной точки в центр масс. Не ограничивая общности, можно считать, что моменты инерции тела есть $A = B = 1$, $C \neq 1$. Тогда в надлежащей специальной системе координат (первые две оси которой образуют плоскость симметрии волчка) для компонент гирационного тензора справедливы выражения

$$a = C^{-1} + K\mu^2 + O(\mu^4), \quad a_1 = 1 - K\mu^2 + O(\mu^4)$$

$$b_1 = K\mu + O(\mu^3), \quad b_2 = 0, \quad a_2 = 1; \quad K = C^{-1}(C - 1)$$

причем величины a, a_1 четны по μ, а b_1 – нечетна. Поэтому возмущенную задачу Лагранжа можно рассматривать как возмущение с параметром $\alpha = a_2 - a_1 = K\mu^2 + O(\mu^4)$ волчка ГА, для которого

$$a^* = a_2 \stackrel{!}{=} 1, \quad c = 2b_1/a^* = 2K\mu + O(\mu^3).$$

Ввиду этого расщепление сепаратрис имеет второй порядок малости по μ, что и было обнаружено [1]. Функция Мельникова $\Delta(w) = x_-(w) - x_+(w)$ разлагается в ряд по α с функциональными коэффициентами, зависящими от c. Видно, что

$$\Delta(w) = \alpha I_\alpha|_{c=0} + \ldots = \mu^2 f_0(\varphi) + \ldots, \quad f_0(\varphi) = 8K\sqrt{\Gamma}\sin\varphi\cos\varphi$$

с ошибкой в членах, кубических по μ. Здесь $\varphi = \varphi_- = \varphi_+$ – угол, нумерующий двоякоасимптотические траектории задачи Лагранжа.

Функция $f_0(\varphi)$ имеет четыре нуля, и все они являются простыми. Таким образом, возмущенные сепаратрисы $W^\pm$ имеют ровно четыре линии $L_l^{(1)}$ трансверсального пересечения, которым соответствуют так называемые однообходные гомоклинические (один раз обходящие невозмущенную сепаратрису) решения. Из этих четырех решений два являются плоскими (соответствующие нули функции $f_0(\varphi)$ есть $\varphi = \pm\pi/2$), т.е. вращениями вокруг третьей оси инерции, а два других близки к вращениям вокруг второй оси инерции.

Найдем теперь трансверсальные гомоклинические решения $L_l^{(2)}$, которые являются двухобходными, т.е. дважды обходят невозмущенную сепаратрису. Согласно разд. 4, на площадках Π^+ и Π^- линии $l_+ = W^- \cap \Pi^+$ и $l_- = W^+ \cap \Pi^-$ задаются соответственно уравнениями

$$l_+ \colon H = 0, \; s = s_+ = f_+(\theta); \quad l_- \colon H = 0, \; s' = s_- = f_-(\theta')$$

$$f_\pm(\varphi_\pm) = \mp \alpha I_\alpha \epsilon/\cos\varphi_\pm + \ldots$$

где H – невозмущенный гамильтониан, s, s' – "подправленные" переменные. Можно найти, что

$$f_\pm(\theta) = \mu^2(\mp f_0(\theta) + \mu f_1(\theta) + O(\mu^2))$$

$$f_1(\theta) = 8\pi K^2\sqrt{\Gamma}(2\cos\theta - 3\cos^3\theta)$$

Следуя изложенному в разд. 2, рассмотрим окрестность U множества $g = W^+ \cap \Pi^+$ на Π^+ и отображение $S_0^\sim \colon U \setminus g \to \Pi^-$ вдоль траекторий возмущенной системы. Каждой точке трансверсального пересечения кривых $S_0^\sim(l_+)$ и l_- соответствует искомая линия $L_l^{(2)}$ трансверсального пересечения сепаратрис W^+, W^-. Отображение $S_0^\sim$ совершенно аналогично S_0, построенному в разд. 2. Пусть постоянные $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ и область $D \subset U$ задается неравенствами $r_1\mu^2 < \omega < r_2\mu^2$. Тогда для любой точки из D время движения от Π^+ к Π^- есть $O(\ln\mu)$. Заметим, что система, линеаризованная в неподвижной точке O, в координатах P, Q испытывает возмущение $O(\mu^2)$. Рассуждения, аналогичные изложенным в разд. 2, показывают, что отображение $S_0^{\sim}$: $(H, s, \theta) \to (H, s', \theta')$ на области D имеет вид (2.4), $s = s'$ с $O(\omega \ln \omega) = O(\mu^2 \ln \mu)$-малой (в смысле определения из разд. 2) погрешностью. Тогда при $H = 0$ получим

$$\theta' = \theta - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sign} s + O(\mu^2 \ln \mu) \tag{5.1}$$

Чтобы найти точки пересечения $S_0^{\sim}(l_+) \cap l_-$, рассмотрим уравнение

$$R(\theta) = s_+ - s_- = -f_-(\theta') + f_+(\theta) = 0 \tag{5.2}$$

где θ, θ' связаны равенством (5.1) и удовлетворяют условиям

$$|f_0(\theta)| > 2r_1, \quad |f_0(\theta')| > 2r_1, \quad r_1 > 0$$

Тогда члены при μ^2 в $R(\theta)$ взаимно уничтожаются, так как $f_0(\theta) + f_0(\theta \pm \tfrac{1}{2}\pi) = 0$. Имеем

$$\mu^{-3}R(\theta) = -8\pi K^2 \sqrt{\Gamma}(\epsilon \sin\theta + \cos\theta)(1 - 3\epsilon\cos\theta \sin\theta) + O(\mu \ln \mu), \quad \epsilon = \operatorname{sign} f_0(\theta)$$

При $K < 0$, т.е. $C < 1$, уравнение (5.2) имеет четыре простых нуля, $O(\mu \ln\mu)$-близких к числам θ, таким, что $\operatorname{tg}\theta = \pm 1$.

При $K > 0$, т.е. $C > 1$, уравнение (5.2) имеет восемь простых нулей, $O(\mu \ln\mu)$-близких к числам θ, таким, что $\sin 2\theta = \pm {}^2/_3$.

Пусть V – окрестность сепаратрисы W, граница которой – гладкое трехмерное многообразие, трансверсальное ко всем двоякоасимптотическим решениям невозмущенной задачи. При малых $\mu \neq 0$ множество $V \cap L_l^{(2)}$ имеет две компоненты связности $L_l^{\pm}$ (L_l^- соответствует меньшим значениям времени t).

Определение. Будем говорить, что двухобходная гомоклиническая траектория $L_l^{(2)}$ имеет тип (θ_1, θ_2), если $L_l^- \to v^{\sim}(\theta_1)$, $L_l^+ \to v^{\sim}(\theta_2)$, $\mu \to 0$, где $v^{\sim}(\theta)$ – траектория невозмущенной задачи Лагранжа при $j = 0$, соответствующая двоякоасимптотическому решению, для которого $\varphi_- = \varphi_+ = \theta$.

Ранее рассматривались листы сепаратрис $W^{\pm}$, лежащие в области V вблизи предельной точки O (для соответственно наименьших или наибольших возможных значений времени t). Сепаратрисы $W^{\pm}$ можно продолжить вдоль траекторий системы через малую окрестность точки O. В результате получим другой набор листов сепаратрис $W^-_{\sim}, W^+_{\sim}$. (Эти листы будут уже несвязны в силу пересечения листов $W^{\pm}$ "первого" порядка.) В частности:

$$S_0^{\sim}(l_+) = W^-_{\sim} \cap \Pi^+, \quad L_l^- \subset W^- \cap W^+_{\sim}, \quad L_l^+ \subset W^-_{\sim} \cap W^+.$$

Теорема 3. 1) Сепаратрисы $W^{\pm}$ возмущенной задачи Лагранжа имеют четыре линии $L_l^{(1)}$ трансверсального пересечения, являющиеся однообходными гомоклиническими траекториями. Две из них соответствуют плоским решениям, а две других – решениям, которые в области V $O(\mu)$-близки к вращениям вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости симметрии волчка. Расщепление сепаратрис $W^{\pm}$ имеет порядок $O(\mu^2)$, причем эта оценка неулучшаема.

2) Существуют трансверсальные двухобходные гомоклинические траектории $L_l^{(2)}$ следующих типов:

1°. $(\theta, -\theta)$, где $\theta \in \{\pm\pi/4, \pm 3\pi/4\}$, если $C < 1$.

2°. (θ_1, θ_2), (θ_2, θ_1), где $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$, $\theta_1 \in \{n\pi + l, n\pi + \pi/2 - l$, где $n = 0;\ 1\}$, $l = \tfrac{1}{2} \arcsin {}^2/_3$, если $C > 1$.

В области V компоненты $L_l^{\pm}$ связности $L_l^{(2)}$ будут $O(\mu \ln\mu)$-близки к соответствующим двоякоасимптотическим траекториям $v^{\sim}(\theta)$ невозмущенной задачи.

3) Множества $W^{\pm}_{\sim}$ лежат в $O(\mu^3)$-окрестности $W^+ \cup W^-$. Множество W^+ (соответственно W^-) лежит в $O(\mu^3)$-окрестности $W^-_{\sim}$ (соответственно $W^+_{\sim}$). Эти оценки неулучшаемы при всех малых $\mu \neq 0$.

Доказательство. П.п. 1, 2 непосредственно вытекают из приведенных выше рассуждений. Для доказательства п. 3 достаточно заметить, что, во-первых, можно расширить область D, полагая, что она задается условиями $r_1|\mu|^3 < \omega < r_2\mu^2$, и, во-вторых, отображение $S_0^{\sim}$ переводит точку на Π^+, для которой $|\omega| < r_1|\mu|^3$, в точку, для которой $|\omega| < 2r_1|\mu|^3$.

С использованием ранее предложенных методов [1] из результатов п. 2 теоремы 3 можно вывести существование квазислучайных движений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа при нулевом значении постоянной площадей и фиксированном малом $\mu \neq 0$ на уровнях энергии, близких к критическому.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Довбыш С.А.* Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа//Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1990. № 3. С. 70–77.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. 221 С.
3. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 287 С.
4. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы//Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. С. 61–155.
5. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела//Тр. Моск. мат. о-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
6. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 С.
7. *Довбыш С.А.* Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера–Пуансо//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 363–370.
8. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку//ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 6. С. 1111–1118.
9. *Довбыш С.А.* Некоторые новые динамические эффекты в возмущенной задаче Эйлера–Пуансо, связанные с расщеплением сепаратрис//ПММ. 1989. Т. 43. Вып. 2. С. 215–225.
10. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 С.
11. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 С.
12. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений//Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. Т. 25. С. 119–262.
13. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях//Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
14. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис и несуществование первых интегралов в системах дифференциальных уравнений типа гамильтоновых с двумя степенями свободы//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 1088–1103.

Поступила в редакцию
24.XII.1990

Москва