Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

 А.П. Иванов

ЭНЕРГЕТИКА УДАРА С ТРЕНИЕМ

Исследуется изменение кинетической энергии при соударении двух твердых тел. Обсуждены различные способы задания коэффициента восстановления. Показано, что ньютоновское определение в применении к косому удару может привести к нарушению закона сохранения энергии. При пуассоновском определении расчетная диссипация энергии всегда положительна, однако несколько превышает наблюдаемое в эксперименте значение. Более реалистичны энергетические определения коэффициента восстановления.

1. Постановка задачи. В динамике задача об ударе твердых тел сводится к определению ударного импульса $\mathbf{I}$ для данных начальных условий: координаты системы при ударе не изменяются, а изменение скоростей в инерциальной системе координат описывается уравнениями [1]

$$m_1 \Delta \mathbf{V}(G_1) = \mathbf{I}, \quad m_2 \Delta \mathbf{V}(G_2) = -\mathbf{I} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{J}_1 \Delta \mathbf{W}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{I}, \quad \mathbf{J}_2 \Delta \mathbf{W}_2 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{I}, \quad \mathbf{r}_i = G_i A \quad (i = 1, 2)$$

где A – точка контакта соударяемых тел, m_i, $\mathbf{J}_i$ – их массы и тензоры инерции, $\mathbf{V}(G_i)$ – скорости центров масс каждого из тел, $\mathbf{W}_i$ – угловые скорости.

Будем считать, что ударные силы $\mathbf{F} = d\mathbf{I}/dt$ удовлетворяют закономерностям кулоновского трения. Если $\mathbf{n}$ – орт, нормальный соударяемым поверхностям в точке A, то такое трение определяется коэффициентом μ и направлением относительной скорости $\mathbf{V}_\tau$ в A:

$$\mathbf{V}_\tau = V - V_n \mathbf{n}, \quad V_n = (\mathbf{V}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(G_1) + \mathbf{W}_1 \times \mathbf{r}_1 - \mathbf{V}(G_2) - \mathbf{W}_2 \times \mathbf{r}_2 \tag{1.2}$$

В случае $\mathbf{V}_\tau \neq \mathbf{0}$ выполняется равенство

$$d\mathbf{I}_\tau / dI_n = -\mu \theta_\tau, \quad \theta_\tau = \mathbf{V}_\tau / |\mathbf{V}_\tau|, \quad I_n = (\mathbf{I}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{I}_\tau = \mathbf{I} - I_n \mathbf{n} \tag{1.3}$$

а в случае $\mathbf{V}_\tau = \mathbf{0}$ вектор $\mathbf{I}$ движется вдоль прямой нескольжения (см. [1]), определяемой в пространстве $\mathbf{I} \in R^3$ уравнениями (1.1), (1.2), где $\mathbf{V}_\tau = \mathbf{0}$.

Система (1.1)–(1.3) позволяет построить зависимость $\mathbf{I}(I_n)$, и для решения задачи об ударе достаточно задать значение I_n в конце удара. Обычно для этого принимают гипотезу Ньютона о двух фазах удара [2]: первая фаза – деформация – заканчивается при таком значении $I_n = I_1$, при котором $V_n = 0$. Вторая фаза – восстановление – заканчивается при $I_n = I_2$. Коэффициент восстановления обычно определяют одним из следующих способов [1], [2]: либо из формулы

$$I_2 = (1 + \kappa) I_1, \quad 0 \leqslant \kappa \leqslant 1 \tag{1.4}$$

либо из соотношения

$$V_n^+ = -e V_n^-, \quad 0 \leqslant e \leqslant 1 \tag{1.5}$$

где индексы "–" и "+" соответствуют началу и концу удара.

В общем случае $e \neq \kappa$, т.е. определения (1.4) и (1.5) не эквивалентны [3], однако бытует и противоположное ошибочное мнение [4]. Каждая из двух моделей восстановления позволяет однозначно определить $\mathbf{I}$ для любых начальных условий [1, 5, 6].

Однако сама по себе такая возможность недостаточна для признания пригодности той или иной модели.

Были построены примеры [7], показывающие, что (1.5) противоречит закону сохранения энергии. Настоящая работа посвящена анализу возможности корректного определения удара с трением.

2. Изменение энергии при ударе. При ударе твердых тел изменение их суммарной кинетической энергии равно работе реакции $\mathbf{F}$, приложенной в точке контакта A. Выражение работы на перемещении $d\mathbf{r}$ имеет вид

$$dA = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{F}dt, d\mathbf{r}/dt) = (\mathbf{V}, d\mathbf{I}) \tag{2.1}$$

Изменение кинетической энергии системы выражается криволинейным интегралом

$$\Delta T = \int_{0\mathbf{I}^*} (\mathbf{V}, d\mathbf{I}) \tag{2.2}$$

где интегрирование проводится от значения $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ до значения $\mathbf{I} = \mathbf{I}^*$ ударного импульса в конце удара.

Отметим некоторые следствия из (2.2).

1°. Интеграл (2.2) не зависит от формы пути. Действительно, соотношения (1.1), (1.2) можно преобразовать к матричной форме

$$\Delta\mathbf{V} = \mathbf{CI}, \qquad \mathbf{C} = (m_1^{-1} + m_2^{-1})\mathbf{E}_3 + \| c_{ij} \| \tag{2.3}$$

$$c_{ij} = (\mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{l}_i), \mathbf{r}_1 \times \mathbf{l}_j) + (\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{l}_i), \mathbf{r}_2 \times \mathbf{l}_j) = c_{ji}$$

$$\mathbf{l}_1 = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{l}_2 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{l}_3 = (0, 0, 1).$$

где матрица $\mathbf{C}$ симметрична и положительно определена. Подынтегральное выражение в (2.2) можно преобразовать к виду

$$(\mathbf{V}, d\mathbf{I}) = (\mathbf{V}^- + \mathbf{CI}, d\mathbf{I}) = d((\mathbf{V}^-, \mathbf{I}) + 0{,}5(\mathbf{CI}, \mathbf{I})) = dU(\mathbf{I}), \quad U(\mathbf{I}) = (\mathbf{V}^-, \mathbf{I}) + 0{,}5(\mathbf{CI}, \mathbf{I}) \tag{2.4}$$

откуда и следует сформулированное утверждение.

2°. Подставляя равенство (2.4) в (2.2), получим

$$\Delta T = U(\mathbf{I}^*) - U(\mathbf{0}) = (\mathbf{V}^-, \mathbf{I}) + 0{,}5(\mathbf{CI}^*, \mathbf{I}^*) = 0{,}5(\mathbf{V}^- + \mathbf{V}^+, \mathbf{I}^*) \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) известно как формула Кельвина (см. [1]). С ее помощью легко найти величину ΔT в случае, если задан ударный импульс $\mathbf{I}^*$. В рассматриваемой задаче об ударе двух тел явная зависимость величины $\mathbf{I}^*$ от начальных условий в общем случае неизвестна, поэтому формула Кельвина не приводит к результату.

3°. Для трения, описываемого (1.3), формула (2.2) выглядит так:

$$\Delta T = \int_0^{I_2} \left(V_n + \mathbf{V}_\tau \frac{dI_\tau}{dI_n} \right) dI_n = \int_0^{I_2} (V_n - \mu \,|\, \mathbf{V}_\tau \,|) dI_n \tag{2.6}$$

где величина ΔT выражена определенным интегралом. Формула (2.6) справедлива и в случае $V_\tau = 0$, так как при этом $(\mathbf{V}, d\mathbf{I}) = V_n dI_n$.

4°. Используя тождество

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dx \left[f(0) + \int_0^x f'(y)\,dy\right]$$

приведем (2.6) к виду

$$\Delta T = \int_0^{I_2} dI_n [V_n^- - \mu \,|\, \mathbf{V}_\tau^- \,|\,] + \int_0^{I_n} \left(\frac{dV_n}{dI_n} - \mu \frac{d \,|\, \mathbf{V}_\tau \,|}{dI_n} \right) dI_n \tag{2.7}$$

В случае, если $\mathbf{V}_\tau \neq 0$, подынтегральное выражение в (2.7) с учетом (1.3), (2.3) можно преобразовать так:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dI_n} = \frac{d(\mathbf{CI})}{dI_n} = \mathbf{C}\frac{d(I_n\mathbf{n} + \mathbf{I}_\tau)}{dI_n} = \mathbf{Cn} - \mu\mathbf{C}\theta_\tau = \mathbf{b} \tag{2.8}$$

$$\frac{dV_n}{dI_n} = (\frac{d\mathbf{V}}{dI_n}, \mathbf{n}) = (\mathbf{b}, \mathbf{n}), \quad \frac{d\mathbf{V}_\tau}{dI_n} = \frac{d\mathbf{V}}{dI_n} - \mathbf{n}\frac{dV_n}{dI_n} = \mathbf{b} - \mathbf{n}(\mathbf{b}, \mathbf{n}),$$

$$\frac{d\,|\mathbf{V}_\tau|}{dI_n} = \frac{d}{dI_n}\sqrt{(\mathbf{V}_\tau, \mathbf{V}_\tau)} = \frac{1}{|\mathbf{V}_\tau|}(\frac{d\mathbf{V}_\tau}{dI_n}, \mathbf{V}_\tau) = (\mathbf{b}, \theta_\tau),$$

$$\frac{d\theta_\tau}{dI_n} = \frac{d}{dI_n}(\frac{\mathbf{V}_\tau}{|\mathbf{V}_\tau|}) = \frac{1}{|\mathbf{V}_\tau|}(\frac{d\mathbf{V}_\tau}{dI_n} - \theta_\tau\frac{d\,|\mathbf{V}_\tau|}{dI_n}) =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{V}_\tau|}[\mathbf{b} - \mathbf{n}(\mathbf{b}, \mathbf{n}) - \theta_\tau(\mathbf{b}, \theta_\tau)]$$

$$\Phi(I_n) = \frac{dV_n}{dI_n} - \mu\frac{d\,|\mathbf{V}_\tau|}{dI_n} = (\mathbf{n} - \mu\theta_\tau, \mathbf{b}), \qquad \mathbf{b} = C(\mathbf{n} - \mu\theta_\tau).$$

В случае, если $\mathbf{V}_\tau = 0$, в (2.7) во внутреннем интеграле отлично от нуля только первое слагаемое. Направляющий вектор прямой нескольжения $\mathbf{s}$ определяется равенством $(\mathbf{Cs})_\tau = 0$, откуда $\mathbf{s} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{n}$. Для величины $\Phi(I_n)$ в отсутствие скольжения получаем такое выражение:

$$\Phi(I_n) = \frac{dV_n}{dI_n} = (\mathbf{Cn}, \mathbf{n}) + (\mathbf{C}\frac{d\mathbf{I}_\tau}{dI_n}, \mathbf{n}) = (\mathbf{Cn}, \mathbf{n}) + (\frac{\mathbf{s}_\tau}{s_n}, \mathbf{Cn}) = (\mathbf{Cn}, \mathbf{n}) +$$
$$+ (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n})^{-1}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n} - \mathbf{n}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n}), \mathbf{Cn}) = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n}, \mathbf{n})^{-1}.$$

При учете положительной определенности матрицы $\mathbf{C}$ и формул (2.8), (2.9) доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Приращение кинетической энергии при ударе с кулоновским трением определяется формулой

$$\Delta T = \int_0^{I_2} Z(I_n)\,dI_n, \; Z(I_n) = V_n - \mu\,|\mathbf{V}_\tau| = Z(0) + \int_0^{I_n} \Phi(I_n)\,dI_n \tag{2.10}$$

где I_2 – величина нормальной составляющей ударного импульса в конце удара. Функция Z отрицательна при $I_n = 0$ и монотонно возрастает при $I_n > 0$ (так как $Z' = \Phi > 0$).

3. Энергетический анализ корректности двух моделей удара. Поскольку работа сил реакции всегда неположительна, энергетический критерий корректности уравнений (1.1) имеет вид

$$\Delta T \leqslant 0. \tag{3.1}$$

Проверим выполнение неравенства (3.1) для двух моделей удара, описываемых уравнениями (1.3), (1.4) или (1.3), (1.5).

1°. Если вектор $\mathbf{V}_\tau$ при ударе сохраняет постоянное направление, $d\theta_\tau = \mathbf{0}$, то вследствие (1.3), (2.3) величина V_n линейно зависит от I_n. В этом случае $\kappa = e$, т.е. определения окончания удара (1.4) и (1.5) эквивалентны.

Функция $Z(I_n)$ в (2.10) линейно зависит от I_n:

$$Z(I_n) = Z(0) + I_n(\mathbf{n} - \mu\theta_\tau^-, \mathbf{C}(\mathbf{n} - \mu\theta_\tau^-))$$

Так как $V_n = 0$ при $I_n = I_1$, то $Z(I_1) \leqslant 0$. Следовательно,

$$Z(I_2) = Z(I_1 + \kappa I_1) \leqslant -\kappa Z(0)$$

откуда получаем

$$\Delta T = \int_0^{I_1} Z(I_n)\,dI_n + \int_{I_1}^{I_2} Z(I_n)\,dI_n \leqslant 0 \tag{3.2}$$

2°. Если вектор $\mathbf{V}_\tau$ изменяет при ударе свое направление, то модель (1.3), (1.5) при некоторых начальных условиях может приводить к парадоксальному неравенству $\Delta T > 0$ [7].

В качестве примера рассмотрим двумерный удар стержня длины $2L$ о полупространство, с которым он образует угол φ. Система (1.1) принимает вид

$$m\Delta \mathbf{V}(G) = \mathbf{I}, \quad J_3 \Delta W_3 = r_1 I_2' - r_2 I_1, \quad r_1 = L\cos\varphi, \quad r_2 = L\sin\varphi$$

Матрица $\mathbf{C}$ в (2.3) такова

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 1/m + r_1^2/J_3 & -r_1 r_2'/J_3 \\ -r_1 r_2'/J_3 & 1/m + r_2^2/J_3 \end{Vmatrix}.$$

Если $L = 1$, $m = 1$, $J_3 = 1/6$, $\varphi = \pi/4$, $\mu = 1$, $e = 0{,}8$, $V_n^- = -1$, $V_\tau^- = 0.6$, то

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{Vmatrix}, \quad Z(0) = -1.6.$$

При изменении величины I_n от 0 до значения $I^* = 0{,}086$ касательная составляющая скорости уменьшается до нуля в соответствии с уравнениями

$$dI_\tau/dI_n = -1, \quad \Delta V_n = 4I_n - 3I_\tau = 7I_n, \quad \Delta V_\tau = -3I_n + 4I_\tau = -7I_n.$$

При $I_n > I^*$ скольжение не возобновляется, при этом $d\mathbf{I}$ параллелен вектору нескольжения $\mathbf{s} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{n} = (3/7, 4/7)$, откуда получаем такие уравнения удара для промежутка $I_n > I^*$:

$$dI_\tau/dI_n = 3/4, \quad I_\tau = 3/4\, I_n - 7/4\, I^*$$

$$\Delta V_n = 1{,}75 I_n + 5{,}25 I^*, \quad \Delta V_\tau = -V_\tau^-$$

Определим окончание удара из условия (1.5): $e = -1 + 5{,}25 I^* + 1{,}75 I_2$, откуда получаем $I_2 = 0{,}77$. Величину ΔT определим по (2.6):

$$\Delta T = \int_0^{I^*} (V_n^- + 7I_n - \mu\,|V_\tau^- - 7I_n|)\,dI_n + \int_{I^*}^{I_2} (V_n^- + 5{,}25 I^* + 1{,}75 I_n)\,dI_n = 0{,}051 > 0$$

Данный пример показывает некорректность определения окончания удара с трением по формуле (1.5).

3°. Рассмотрим теперь модель удара, основанную на (1.3), (1.4) в общем случае. Для этого изучим вторую производную функции Z в (2.10), т.е. величину $d\Phi/dI_n$. Если $\mathbf{V}_\tau \neq \mathbf{0}$, получим при учете формул (2.8) и неравенства Бесселя следующую оценку:

$$\frac{d\Phi}{dI_n} = 2\left(\mathbf{b}, -\mu\frac{d\theta_\tau}{dI_n}\right) = -\frac{2\mu}{|\mathbf{V}_\tau|}\left[(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{b},\mathbf{n})^2 - (\mathbf{b},\theta_\tau)^2\right] \leqslant 0 \tag{3.3}$$

Возможны также два случая скачкообразного изменения величины Φ при обращении $\mathbf{V}_\tau$ в нуль. В первом из этих случаев трение препятствует возобновлению скольжения; согласно (2.9), $\Phi = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n},\mathbf{n})^{-1}$. Непосредственно перед остановкой скольжения

$$\Phi = (\mathbf{Cn},\mathbf{n}) - 2\mu(\mathbf{Cn},\theta_\tau) + \mu^2(\mathbf{C}\theta_\tau,\theta_\tau)$$

так что приращение $\Delta\Phi$ определится по формуле

$$\Delta\Phi = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n},\mathbf{n})^{-1} - (\mathbf{Cn},\mathbf{n}) + 2\mu(\mathbf{Cn},\theta_\tau) - \mu^2(\mathbf{C}\theta_\tau,\theta_\tau) = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n},\theta_\tau)^{-1} - (\mathbf{Cn},\mathbf{n}) + \tag{3.4}$$
$$+\frac{(\mathbf{Cn},\theta_\tau)^2}{(\mathbf{C}\theta_\tau,\theta_\tau)} - \left[\mu - \frac{(\mathbf{Cn},\theta_\tau)}{(\mathbf{C}\theta_\tau,\theta_\tau)}\right]^2(\mathbf{C}\theta_\tau,\theta_\tau) \leqslant (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n},\mathbf{n})^{-1} - (\mathbf{Cn},\mathbf{n}) + (\mathbf{C}\theta_\tau,\theta_\tau)^{-1}(\mathbf{Cn},\theta_\tau)^2$$

Если c_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{C}$ в базисе из векторов $\mathbf{n}$, θ_τ и $\mathbf{n}\times\theta_\tau$, то неравенство (3.4) примет вид

$$\Delta\Phi = \frac{\det|\mathbf{C}|}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2} - c_{11} + \frac{c_{12}^2}{c_{22}^2} = -\frac{(c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22})^2}{c_{22}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2)} \leqslant 0 \qquad (3.5)$$

Во втором случае при обращении величины $\mathbf{V}_\tau$ в нуль трение недостаточно для предотвращения скольжения; при этом скольжение возобновляется в таком направлении θ_τ^0, для которого выполнены условия

$$\frac{d\theta_\tau}{dI_n} = 0, \qquad \frac{d\,|\mathbf{V}_\tau|}{dI_n} > 0 \qquad (3.6)$$

так как вследствие (2.8) при $V_n \to 0$ величина $\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{b}, \theta_\tau)\theta_\tau$ стремится к нулю (см. также [5]). Положим

$$\mathbf{g}_1 = \mu\theta_\tau^0, \qquad \mathbf{g}_2 = \mathbf{n}\times\mathbf{g}_1, \qquad \mu\theta_\tau = \mathbf{g}_1\cos\xi + \mathbf{g}_2\sin\xi$$

где угол ξ определяет направление скольжения непосредственно перед его остановкой, а после возобновления скольжения $\theta_\tau = \theta_\tau^0$. Для величины $\Delta\Phi$ с учетом (3.6) получим выражение

$$\Delta\Phi = (\mathbf{n} - \mathbf{g}_1, \mathbf{C}(\mathbf{n} - \mathbf{g}_1)) - (\mathbf{n} - \mathbf{g}_1\cos\xi - \mathbf{g}_2\sin\xi,\quad \mathbf{C}(\mathbf{n} - \mathbf{g}_1\cos\xi - \mathbf{g}_2\sin\xi)) =$$

$$= (\cos\xi - 1)\,[2(\mathbf{C}\mathbf{n}, \mathbf{g}_1) - 2(\mathbf{C}\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)\sin\xi + (1 + \cos\xi)((\mathbf{C}\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2) - (\mathbf{C}\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1))] \leqslant$$

$$\leqslant 2(\cos\xi - 1)(\mathbf{g}_1\sin\xi/2 + \mathbf{g}_2\cos\xi/2,\quad \mathbf{C}(\mathbf{g}_1\sin\xi/2 + \mathbf{g}_2\cos\xi/2)) \leqslant 0$$

Собирая неравенства (3.3), (3.5), (3.7), приходим к следующему выводу.

Теорема 2. Производная функции $Z(I_n)$ в (2.10) является невозрастающей функцией I_n.

Следствие. Модель удара, основанная на равенствах (1.3), (1.4), удовлетворяет энергетическому критерию корректности (3.1).

Доказательство следствия. По теореме 1 функция $Z(I_n)$ непрерывна, монотонно возрастает и $Z(0) < 0$, поэтому она имеет при $I_n > 0$ не более одного корня. Если на отрезке $[0, I_2]$ величина $Z(I_n)$ отрицательна, то $\Delta T < 0$, и (3.1) выполнено. В случае, когда $Z(I_0) = 0$ для некоторого значения $I_0 < I_2$, промежуток интегрирования в (2.10) можно разбить на две части: от 0 до I_0 и от I_0 до I_2. Поскольку $Z = V_n - \mu|\mathbf{V}_\tau|$, то $Z(I_1) \leqslant 0$ (I_1 – значение, соответствующее окончанию стадии деформации по Ньютону, $V_n(I_1) = 0$, следовательно, $I_1 \leqslant I_0$ и справедливо неравенство

$$\frac{I_2 - I_0}{I_0} \leqslant \frac{I_2 - I_1}{I_1} = \kappa < 1 \qquad (3.8)$$

показывающее, что интервал знакоположительности функции Z меньше интервала ее знакоотрицательности (в пределах отрезка интегрирования). Из теоремы 2 следует неравенство

$$Z(I_0 + x) \leqslant -Z(I_0 - x), \qquad 0 < x < I_0$$

из которого при $\kappa \leqslant 1$ для величины ΔT в (2.10) следует оценка (3.1).

Заметим, что отмеченная выше некорректность модели удара, основанной на формуле (1.5), обусловлена тем, что из выполнения неравенства $e < 1$ в формуле (1.5) не следует в общем случае, что в (1.4) и в (3.8) величина κ меньше единицы. В частности, вычисления для данных приведенного выше примера приводят к значению $I_0 = -0{,}57\,(V_n^- + 5{,}25I^*) = 0{,}31$, откуда $\kappa = 1{,}48 > 1$.

4. Энергетический подход к определению коэффициента восстановления. Несмотря на корректность кинетического определения коэффициента восстановления (1.5), более физичен энергетический подход к двум фазам удара и коэффициенту восстановления. В первой из фаз происходит накопление потенциальной энергии упругих деформаций, а при восстановлении эта энергия высвобождается.

При соударении тел с гладкими поверхностями ($\mu = 0$) энергетические преобразования в двух фазах удара выражаются равенством [1]

$$\eta^2 = \frac{T^+ - T_0}{T^- - T_0} \tag{4.1}$$

где T_0 – минимальное значение кинетической энергии при ударе, равное ее значению в конце первой фазы, а коэффициент восстановления η в данном случае совпадает с коэффициентами e и κ.

Формулу (4.1) можно принять за непосредственное – энергетическое определение коэффициента восстановления η.

Было предложено [8] обобщение определения (4.1) на случай удара с трением вида (1.3), где сделано предположение об отсутствии податливости соударяемых тел в касательной плоскости. При этом равенство (2.2) преобразуется к виду

$$\Delta T = \int_0^{I_2} V_n dI_n + \int_{0}^{\mathbf{I}_\tau^*} \mathbf{V}_\tau d\mathbf{I}_\tau \tag{4.2}$$

где второе слагаемое выражает диссипацию, обусловленную необратимыми деформациями при трении (внешняя диссипация), а первое слагаемое – работу нормальной реакции. Коэффициент восстановления η_* в принятых обозначениях определяется так

$$\eta_*^2 = -\int_{I_1}^{I_2} V_n dI_n \Big/ \int_0^{I_1} V_n dI_n \tag{4.3}$$

Рассмотрим закономерности изменения энергии в тех случаях, когда роль тангенциальной податливости существенна (см. [9, 10]). В этом случае касательные деформации при ударе не имеют необратимого характера и диссипация обусловлена лишь внутренними процессами в соударяемых телах. Такое предположение несовместимо, очевидно, с определением касательных напряжений по формуле (1.3): если направление вектора $\mathbf{V}_\tau$ в ходе удара изменяется, то эти напряжения зависят от относительного перемещения в точке A. Поэтому ограничимся частным случаем, когда направления $\mathbf{V}_\tau$ и ударной реакции при ударе неизменны.

Представим ударный импульс в виде

$$\mathbf{I} = \alpha\mathbf{I}', \quad \mathbf{I}' = \mathbf{n} - \mu\theta_\tau^-, \quad \alpha > 0 \tag{4.4}$$

и воспользуемся формулой Кельвина (2.5). Поскольку

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}^- + \mathbf{V}^+, \alpha\mathbf{I}') = \alpha(\mathbf{V}^-, \mathbf{I}') = \alpha(\mathbf{V}^-, \mathbf{I}') + \tfrac{1}{2}\alpha^2(\mathbf{I}', C\mathbf{I}') \tag{4.5}$$

то минимальное значение энергии T_0 достигается при значении параметра $\alpha = \alpha_0$, где

$$\alpha_0 = -\frac{(\mathbf{V}^-, \mathbf{I}')}{(C\mathbf{I}', \mathbf{I}')}, \quad \Delta T_0 = T_0 - T^- = -\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{V}^-, \mathbf{I}')^2}{(C\mathbf{I}', \mathbf{I}')} \tag{4.6}$$

Если полный ударный импульс равен $\mathbf{I}^* = \alpha_2\mathbf{I}'$, то по (2.5) получаем

$$\Delta T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}^- + \mathbf{V}^+, \alpha_2\mathbf{I}') = (\tfrac{1}{2}\alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_2)(C\mathbf{I}', \mathbf{I}') \tag{4.7}$$

Подставляя выражения (4.6), (4.7) в (4.1), получим для коэффициента восстановления η равенство

$$\eta = \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_0} = -\frac{(\mathbf{V}^+, \mathbf{I}')}{(\mathbf{V}^-, \mathbf{I}')} \tag{4.8}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Если во время удара реакция сохраняет неизменное направление, то минимальное значение кинетической энергии T_0 в (4.1) соответствует исчезновению проекции относительной скорости в точке контакта на это направление. Коэффициент η равен при этом отношению проекций относительной скорости на это направление, взятому с противоположным знаком.

Заметим, что определение коэффициента восстановления формулой (4.8) ранее применялось [11] для анализа автомобильных столкновений: с практической точки зрения этот коэффициент удобнее, чем коэффициенты e или κ. При этом считалось, что величина η может принимать значения в промежутке от -1 до 1: отрицательные значения η соответствуют случаям, когда кинетическая энергия убывает в течение всего удара. Другой предельный случай $\eta = 1$ соответствует абсолютно упругому удару абсолютно шероховатых тел (см. [12]).

Заметим, что при энергетических определениях коэффициента восстановления критерий корректности (3.1) удовлетворяется автоматически.

5. Анализ экспериментальных данных. В работах [8, 13–15] приведены экспериментальные данные исследования удара сферической частицы о шероховатую поверхность. В данном случае направление реакции в ходе удара можно считать неизменным и определения (1.4), (1.5) и (4.3) эквивалентны: $\kappa = e = \eta_*$, но отличны от определения (4.1). Одним из результатов является возрастание величины V_n^+ с ростом V_τ^- при фиксированном значении V_n^-. Так, отмечено [13] возрастание коэффициента e с 0,45 до 0,63 при изменении величины V_τ^- от 0 до 5 (м/с) при $V_n^- = -1$ м/с. Модель (1.4), очевидно, непригодна для описания этого явления. В то же время из формулы (4.8) следует такая зависимость коэффициента e от угла атаки φ:

$$e = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\sin(\varphi-\beta)\sin\beta + \eta\cos(\varphi-\beta)\cos\beta\right] = \frac{|V_\tau^-|}{|V_n^-|}(1+\eta)\frac{\mu}{1+\mu^2} + \frac{\eta-\mu^2}{1+\mu^2}, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\mu \tag{5.1}$$

т.е. с ростом $|V_\tau^-|$ величина e растет по линейному закону.

В [14, 15] приведены данные об ударе стального шарика диаметром 1 (мм) о стальную плиту при начальной скорости 10 (м/с) при углах атаки $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 45°$, $\varphi_3 = 75°$. Для коэффициента потерь $\zeta = -\Delta T/T^-$ здесь получены значения $\zeta_1 = 0{,}53$, $\zeta_2 = 0{,}32$, $\zeta_3 = 0{,}07$, а для коэффициента ударного трения $\mu = 0{,}12$.

Коэффициент $e = \kappa = \eta_*$ можно рассчитать через значения ζ, μ по формуле

$$1 - \zeta = \kappa^2\cos^2\varphi + [\sin\varphi - \mu(1+\kappa)\cos\varphi]^2 \tag{5.2}$$

откуда для трех значений угла атаки получаем значения

$$\kappa_1 = 0{,}69, \qquad \kappa_2 = 0{,}87, \qquad \kappa_3 = 1{,}49$$

Заметим, что значение κ_3 даже не входит в диапазон допустимых в формуле (1.4).

Коэффициент η можно вычислить из следующего соотношения:

$$1 - \zeta = \frac{(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)^2 + \eta^2(\cos\varphi + \mu\sin\varphi)^2}{1+\mu^2}$$

откуда получаем:

$$\eta_1 = 0{,}69, \qquad \eta_2 = 0{,}69, \qquad \eta_3 = 0{,}71.$$

Следовательно, определение (4.1) в данном случае более реалистично, чем модель удара с трением, основанная на формулах (1.4), (1.5) или (4.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* Dynamics of a system of rigid bodies. London. McMillan V.I. 1882. 385 p.; V. 2. 1884. 343 p. M.: Наука, 1983. 463 с.
2. *Newton I.* Philosophicae naturalis principia mathematica London: Streater 1687. 510 p. Собр. тр. акад. А.Н. Крылова. Т.7. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 697 с.
3. *Нагаев Р.Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
4. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
5. *Болотов Е.А.* Об ударе двух твердых тел при действии трения // Изв. Моск: инж. училища. 1908. Ч. 2. Вып. 2. С. 43–55.
6. *Keller J.B.* Impact with friction // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1986. V. 53. № 1. P. 1–4.
7. *Brach R.M.* Rigid body collisions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1989. V. 56. № 1. P. 133–138.
8. *Stronge W.J.* Rigid body collisions with friction // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1990. V. 431. № 1881. P. 169–181.
9. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
10. *Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N.* The role of elastic tangential compliance in oblique impact // Trans. ASME. J. Lubr. Tech. 1981. V. 103a № 1. P. 74–80.
11. *Schimmelpfennig K.H. Schemedding K.* Ceschwindigkeits – Differenz Faktor – eine erweiterte Betrachtung der Stostheorie // Automobiltechn. Z. 1989. Bd. 91. № 1. S. 45–47.

12. *Crawford F.S.* A theorem on elastic collisions between ideal rigid bodies // Amer. J. Phys. 1989. V. 57. № 2. P. 121–125.
13. *Лавендел Э.Э., Субач А.П.* Результаты экспериментального исследования удара с трением // Вибрационная техника. М., 1966. С. 285–292.
14. *Виноградов В.Н., Бирюков В.И., Назаров С.И., Червяков И.Б.* // Экспериментальное исследование кинематических параметров удара шара о плоскую поверхность материала. // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 4. С. 584–488.
15. *Виноградов В.Н., Бирюков В.И., Назаров С.И., Червяков И.Б.* Экспериментальное исследование коэффициента трения при ударе шара о плоскую поверхность материала. // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 5. С. 896–899.

Москва

Поступила в редакцию
15.VI.1991