Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. С.В. Чайкин

ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ УПРУГОГО СПУТНИКА И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассматривается в ограниченной постановке задача об устойчивости движения на круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил упругого спутника, моделируемого свободным твердым телом с присоединенным к нему произвольным упругим звеном. С использованием теоремы Рауса, в предположении, что вектор малой деформации упругого звена представим в виде конечного ряда по известным собственным формам его свободных колебаний [1] и при некоторых других, найдены положения относительного равновесия летательного аппарата (их число равно 24). Приближенно отыскиваются положения равновесия, в которых упругое звено деформировано. Приводятся достаточные условия устойчивости найденных положений равновесия, указаны необходимые и достаточные условия того, что в положении равновесия упругое звено недеформировано. Рассмотрен пример спутника, моделируемого твердым телом с защемленным в нем произвольным образом прямолинейным упругим стержнем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение в центральном ньютоновском поле сил спутника – летательного аппарата (ЛА), моделируемого твердым телом с присоединенным к нему упругим звеном. Считаем, что можно пренебречь влиянием движения ЛА относительно его центра масс на перемещение последнего по кеплеровой круговой орбите радиуса R с постоянной угловой скоростью ω вокруг притягивающего центра.

Для описания движения введем следующие правые прямоугольные декартовые системы координат $Oy_1y_2y_3$ – орбитальная система координат (ОСК) с полюсом в центре масс спутника, обозначаемого далее точкой O; ось Oy_3 с ортом γ направлена по радиусу-вектору точки O относительно притягивающего центра; Oy_2 и Oy_1 с ортами β и α соответственно направлены по бинормали к плоскости орбиты и по ее трансверсали в точке O в сторону движения центра масс спутника; $O_1x_1x_2x_3$ – жестко связанная со спутником система координат, полюс O_1 которой помещен в центре масс, а оси направлены по главным центральным осям недеформированного спутника, $\mathbf{i}^k$ – орт по оси O_1x_k; $Ox_1x_2x_3$ – система координат с полюсом в центре масс спутника и ортами осей $\mathbf{i}^k$ соответственно; Ω – угловая скорость трехгранника $Ox_1x_2x_3$ относительно $Oy_1y_2y_3$; $\omega = \omega\beta$ – вектор орбитальной угловой скорости ОСК.

Положения относительного равновесия ЛА определяем как состояние покоя относительно ОСК. Если в положении относительного равновесия упругое звено находится в деформированном состоянии, то положение равновесия будем называть нетривиальным.

Пусть точки твердого тела спутника занимают область $V_1 \subset R^3$, точки упругого звена в недеформированном состоянии – область $V_2 \subset R^3$, Γ – общая граница областей V_1 и V_2, $V = V_1 \cup V_2$. Будем считать области заданными в $O_1x_1x_2x_3$; $\mathbf{r} = x_1\mathbf{i}^1 + x_2\mathbf{i}^2 + x_3\mathbf{i}^3$ – радиус-вектор произвольной точки ЛА в натуральном состоянии относительно точки O_1; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – вектор малой деформации точки, определяемой вектором $\mathbf{r}$. Функция $\mathbf{u}$: $(t, \mathbf{r}) \to \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \in R^3$ обладает достаточной гладкостью по t и $\mathbf{r}$, $t \in [t_0, \infty)$, $\mathbf{r} \in V$; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \in V_1$. Радиус-вектор центра масс упругого спутника относительно точки O_1 (m – масса ЛА)

$$\rho \equiv m^{-1} \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u})\, dm = m^{-1} \int_V \mathbf{u}\, dm$$

Приведем предположения, при которых рассматривается движение спутника.

Предположение 1. Вектор малой деформации точек упругого звена ЛА в некоторой ортогональной локальной системе координат с ортами $\mathbf{f}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ может быть представлен конечным рядом [1]

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{h} (q_n^1 w_n \mathbf{f}_1 + q_n^2 u_n \mathbf{f}_2 + q_n^3 v_n \mathbf{f}_3) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t)\, \psi_n(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

где $w_n(\mathbf{r})$, $u_n(\mathbf{r})$, $v_n(\mathbf{r})$ – собственные формы свободных упругих колебаний звена в локальной системе координат, $q_n^k(t)$ – обобщенные координаты, соответствующие собственным формам $\psi_n (N = 3h)$.

Предположение 2. С учетом представления (1.1) в выражении для тензора инерции спутника относительно точки O

$$\mathbf{J} \equiv \int_V ((\mathbf{r} + \mathbf{u} - \rho)E - (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \rho) : (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \rho))\, dm$$

где $a : b$ – диадное произведение вектора a на b, будем пренебрегать членами, нелинейными относительно q_n, т.е. считаем

$$J \equiv J_0 + \sum_{n=1}^{N} q_n J_n \tag{1.2}$$

где $\mathbf{J}_0$ – тензор инерции спутника в недеформированном состоянии относительно точки O_1, E -- единичный тензор,

$$\mathbf{J}_n = \int_{V_2} (2\mathbf{r}\psi_n E - \psi_n : \mathbf{r} - \mathbf{r} : \psi_n)\, dm \tag{1.3}$$

Предположение 3. Центральный эллипсоид инерции ЛА в недеформированном состоянии является трехосным.

Предположение 4. В качестве потенциальной энергии сил гравитационного притяжения Π_g берется ее приближенное выражение, вычисленное с точностью до членов порядка $L^3 R^{-3}$, где L – характерный линейный размер ЛА [1]

$$\Pi_g = -\frac{\mu m}{R} + \frac{1}{2}\omega^2 (3\gamma \mathbf{J} \gamma - \operatorname{tr} \mathbf{J}) \tag{1.4}$$

Предположение 5. Потенциальную энергию изотропного упругого звена при малых деформациях [3, 4]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_2} \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_{V_2} \sum_{m,n,k,l=1}^{3} a_{mnkl} \epsilon_{mn} \epsilon_{kl} dv$$

с учетом (1.1) будем представлять как

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} c_{nm} q_n q_m \tag{1.5}$$

здесь c_{nm}, a_{mnkl} – постоянные коэффициенты, причем матрица $C \equiv \| c_{nm} \|$ размера $N \times N$ положительно определена, ϵ_{ij}, σ_{ij} – компоненты тензора бесконечно малой деформации и напряжения в локальной системе координат.

Различные подходы при составлении уравнений движения сложных механических систем приводятся в [2, 3] и в рассматриваемом случае при предположениях 1–5 получаются, например, из уравнений [3].

Замечание. Предположение 2 формально соответствует тому, что в уравнениях движения пренебрегается членами, нелинейными относительно q_n, $\dot{q}_m$ и их произведений.

Известно [2–4], что уравнения движения ЛА в рассматриваемом случае допускают наряду с частными интегралами направляющих косинусов

$$U_1 \equiv \gamma\gamma - 1 = 0, \quad U_2 \equiv \beta\beta - 1 = 0, \quad U_3 \equiv \gamma\beta = 0 \tag{1.6}$$

интеграл типа Якоби

$$U \equiv \tfrac{1}{2}\Omega \mathbf{J}\Omega + \Omega \mathbf{G} + T + \Pi + \Pi_g - \tfrac{1}{2}\omega \mathbf{J}\omega = \text{const} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{G}$, T – вектор кинетического момента относительно точки O и кинетическая энергия спутника в его относительном движении.

Используя (1.1), получим

$$\mathbf{G} \equiv \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \rho) \times (\mathbf{u}^{\cdot} - \rho^{\cdot})\, dm = \sum_{n=1}^{N} q_n^{\cdot}(\mathbf{G}_n + \sum_{m=1}^{N} \mathbf{G}_{mn} q_m) \tag{1.8}$$

$$T \equiv \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{u}^{\cdot} - \rho^{\cdot})^2 dm = \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^{N} a_{nm} q_n^{\cdot} q_m^{\cdot} \tag{1.9}$$

$$(\quad)^{\cdot} \equiv \partial(\quad)/\partial t, \qquad \mathbf{G}_n \equiv \int_V \mathbf{r} \times (\psi_n - m^{-1}\int_V \psi_n dm)\, dm$$

$$\mathbf{G}_{np} \equiv \int_V (\psi_n - m^{-1}\int_V \psi_n dm) \times (\psi_p - m^{-1}\int_V \psi_p dm)\, dm$$

$$a_{np} \equiv \int_V (\psi_n - m^{-1}\int_V \psi_n dm)(\psi_p - m^{-1}\int_V \psi_p dm)\, dm$$

По теореме Рауса [5], если существуют значения переменных

$$\Omega = \Omega^0, \quad \beta = \beta^0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad q_n = q_n^0, \quad q_n^{\cdot} = q_n^{\cdot 0} \quad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.10}$$

доставляющих изолированный минимум интегралу U при фиксированных значениях интегралов U_i, то эти значения, вообще говоря, будут соответствовать одному из действительных движений спутника и это движение будет устойчиво по отношению к $\Omega, \beta, \gamma, q_1, \ldots, q_N, q_1^{\cdot}, \ldots, q_N^{\cdot}$.

2. Положения относительного равновесия. Пусть новые переменные

$$\Omega^* \equiv \Omega - \Omega^0, \quad \beta^* \equiv \beta - \beta^0, \quad \gamma^* \equiv \gamma - \gamma^0, \quad q_n^* \equiv q_n - q_n^0, \quad q_n^{*\cdot} \equiv q_n^{\cdot} - q_n^{0\cdot}$$

Для определения значений (1.10), доставляющих стационарные значения интегралу (1.7) при условиях (1.6) воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа

$$W \equiv U + 3\omega^2 \lambda(q^0) U_3 - \tfrac{3}{2}\omega^2 \sigma(q^0) U_1 + \tfrac{1}{2}\omega^2 \nu(q^0) U_2 \tag{2.1}$$

Здесь $q^* \equiv (q_1^*, \ldots, q_N^*)^T$, $q^{*\cdot} = (q_1^{*\cdot}, \ldots, q_N^{*\cdot})^T$ и т.п.; $\lambda(q^0), \nu(q^0), \sigma(q^0)$ – неопределенные множители Лагранжа, знак T означает транспонирование. Уравнения для нахождения значений (1.10) и неопределенных множителей получаем из равенства

$$\delta W = 0 \quad \text{при} \quad \Omega^* = 0, \ \beta^* = 0, \ \gamma^* = 0, \quad q^* = 0, \quad q^{*\cdot} = 0.$$

Они могут быть записаны следующим образом:

$$\gamma^0\gamma^0 - 1 = 0, \quad \beta^0\beta^0 - 1 = 0, \quad \gamma^0\beta^0 = 0 \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} 3\omega^2((J - \sigma E)\gamma^0 + \lambda\beta^0) = 0 \\ \omega^2((\nu E - J)\beta^0 + 3\lambda\gamma^0) = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{5}\Omega^0 \mathbf{J}_n \Omega^0 + \Omega^0 \sum_{m=1}^{N} \mathbf{G}_{nm} q_m^{0\cdot} + \sum_{m=1}^{N} c_{nm} q_m^0 - 0{,}5\,\omega^2 \beta^0 \mathbf{J}_n \beta^0 + \\ + \frac{3}{2}\omega^2 \gamma^0 \mathbf{J}_n \gamma^0 - \frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{tr} \mathbf{J}_n = 0 \quad (n = 1, \ldots, N) \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{J}\Omega^0 + \sum_{m=1}^{N} \mathbf{G}_m^0 q_m^{0\cdot} = 0, \quad \mathbf{G}_n^0 \Omega^0 + \sum_{m=1}^{N} a_{nm} q_m^{0\cdot} = 0 \tag{2.5}$$

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}(q^* = 0) \equiv \mathbf{J}(q^0) = \mathbf{J}_0 + \sum_{n=1}^{N} q_n^0 \mathbf{J}_n, \quad \mathbf{G}_p^0 \equiv \mathbf{G}_p + \sum_{m=1}^{N} \mathbf{G}_{mp} q_m^0$$

Величины $\mathbf{G}_n$ и $\mathbf{G}_{mp}$ определяются в (1.8).

Замечание. Функция W является связкой интегралов (1.6), (1.7) записанных в возмущениях относительно невозмущенных значений (1.10). Запись интегралов (1.6), (1.7) и соответственно уравнений (2.2) – (2.5) в тензорной форме говорит о возможности выбора системы координат, наиболее удобной для решения (2.2) – (2.5) и для исследования условий устойчивости найденных стационарных движений.

Обозначим систему координат с полюсом в точке O, в которой матрица компонентов тензора инерции $\mathbf{J}(q^0)$ является диагональной, через $Ox_1^0x_2^0x_3^0$, пусть $\mathbf{e}^k(q^0)$ орты соответствующих осей, $P(q^0)$ – ортогональная матрица перехода от $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1^0x_2^0x_3^0$.

Для матриц компонентов тензоров, встречающихся в работе, если не оговорено обратное, в осях $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ будут использоваться те же обозначения, но без выделения жирным шрифтом.

Кинетическая энергия T_0 спутника в его движении относительно центра масс является определенно положительной квадратичной формой с симметричной матрицей $D(q)$ относительно квазискоростей $(\Omega + \omega)$ и обобщенных скоростей $q^\cdot$, обращаясь в нуль, когда $\Omega + \omega \equiv 0$, $q^\cdot \equiv 0$;

$$T_0 = \frac{1}{2} (\Omega^T + \omega, q^{T\cdot}) \, D(q) \begin{pmatrix} \Omega + \omega \\ q^\cdot \end{pmatrix}$$

$$D(q^0) \equiv \| d_{ij} \| = \begin{Vmatrix} J(q^0) & G_1^0 & \dots & G_N^0 \\ G_1^{0T} & a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \\ G_N^{0T} & a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{Vmatrix}$$

следовательно, $\Omega^0 \equiv 0$, $q^{0\cdot} \equiv 0$ – единственное решение (2.5), так как $\det D(q^0) \neq 0$.

Домножая первое уравнение (2.3) на β^T, а второе на γ^T, с учетом (2.2) и равенства $J = J^T$ получаем $\lambda(q^0) = -\beta^T J\gamma, 3\lambda(q^0) = \beta^T J\gamma$, откуда заключаем, что $\lambda(q^0) \equiv 0$, а $(\sigma(q^0), \gamma)$ и $(\nu(q^0), \beta)$ – собственные пары $J(q^0)$.

Определим собственные значения $\mu^k(q^0)$ и собственные векторы $\mathbf{e}^k(q^0)$ матрицы $J(q^0)$ методом теории возмущений (см., например, [6]), с точностью до членов линейных по q_n. С такой же точностью по предположению 2 определяется тензор инерции ЛА формулой (1.2).

Пусть I, I_0, I_n – симметричные матрицы компонентов $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}_n$ соответственно в системе $Ox_1x_2x_3$.

Тогда

$$\mu^k(q^0) = \mu^k + \sum_{n=1}^{N} q_n^0 \mu_n^k, \quad \mu_n^k = I_n^{kk}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{e}^k(q^0) = \mathbf{i}^k + \sum_{n=1}^{N} q_n^0 \mathbf{i}_n^k, \quad \mathbf{i}_n^k = \sum_{j=1 (j \neq k)}^{3} (\mu^k - \mu^j)^{-1} I_n^{jk} \mathbf{i}^j \tag{2.7}$$

где $(\mu^k, \mathbf{i}^k)$ – собственная пара матрицы $I_0 \equiv \operatorname{diag}(\mu^1, \mu^2, \mu^3)$.

В системе $Ox_1x_2x_3$ столбец компонентов i^k вектора $\mathbf{i}^k$, очевидно, равен $i^k = (i_1^k, i_2^k, i_3^k)$, $i_j^k = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронекера, а столбец компонентов $e^k(q_0)$ вектора $e^k(q^0)$ в $Ox_1x_2x_3$ определяется по (2.7). Ортогональная матрица перехода (вычисленная с точностью до членов линейных по q_n^0) $P(q^0) \equiv (e^1(q^0), e^2(q^0), e^3(q^0))$; а по теореме о преобразовании компонентов тензоров при переходе в новую систему координат

$$J(q^*) \equiv P(q^0)(I_0 + \sum_{n=1}^{N} q_n^0 I_n + \sum_{n=1}^{N} q_n^* I_n) P^T(q^0)$$

$$J(q^* = 0) \equiv J(q^0) \equiv P(q^0)(I_0 + \sum_{n=1}^{N} q_n^0 I_n) P^T(q^0) = \operatorname{diag}(\mu^1(q^0), \mu^2(q^0), \mu^3(q^0))$$

$$J_n \equiv P(q^0) I_n P^T(q^0)$$

Решение уравнений (2.2) – (2.5) в проекциях на оси $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ может быть записано следующим образом:

$$\forall k, l, m \in \{1, 2, 3\}, \quad k \neq l \neq m$$

$$\Omega_i^0 = 0, \quad q_n^{0\cdot} = 0, \quad q_n^0 = C^{-1}M$$

$$\lambda(q^0) \equiv 0, \quad \nu(q^0) = \mu^k(q^0), \quad \beta_i^0 = \pm\delta_{ik}, \sigma(q^0) = \mu^m(q^0), \ \gamma_i^0 = \pm\delta_{im} \tag{2.8}$$

где $M = \omega^2(M_1, \ldots, M_N)^T$, $M_n = \mu_n^k - \mu_n^m + \frac{1}{4}\mu_n^l$, и из-за малости q_n^0 в (2.4) принято $I_n = I_n$ $(n = 1, \ldots, N)$.

Чтобы получить значения переменных Ω^0, β^0, γ^0 в системе $Ox_1x_2x_3$, достаточно воспользоваться матрицей $P^{-1}(q^0)$.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Утверждение 2.1. При предположении 1–5 для того, чтобы существовало тривиальное положение относительного равновесия ($q_n^0 = 0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall n = 1, \ldots, N, \quad \mu_n^m - \mu_n^k - 0{,}5\,\mu_n^l \doteq 0.$$

Утверждение 2.2. При предположениях 1–5 множество положений относительного равновесия (2.8) упругого спутника, отнесенного к главным центральным осям, построенным для данного положения равновесия, характеризуется тем, что эти оси направлены по осям ОСК, в этом смысле множество положений относительных равновесий упругого спутника совпадает с таковым для твердого тела [7].

Из (2.8) следует, что число различных положений равновесия ЛА на круговой орбите равно 24. Множество положений равновесия упругого ЛА можно разбить на 6 групп по 4 положения равновесия в каждой, если группу задавать, например, направлением вектора $\mathbf{e}^3(q^0)$ по одной из осей ОСК в положительном или отрицательном направлении. Четыре положения равновесия, входящие в таким образом определенную группу, задаются направлением вектора $\mathbf{e}^2(q^0)$ вдоль какой-либо другой оси ОСК ($\mathbf{e}^3(q^0) \perp \mathbf{e}^2(q^0)$) в положительном или отрицательном направлении.

3. Устойчивость положения равновесия. Для получения условий устойчивости найденных относительных положений равновесия воспользуемся стандартным методом (см., например, [5]). Введем

$$y_1 = \gamma_1^*, \quad y_2 \equiv \beta_1^*, \quad y_3 \equiv \gamma_2^*, \quad y_4 \equiv \beta_2^*, \quad y_5 \equiv \gamma_3^*, \quad y_6 \equiv \beta_3^*$$

$$y_{6+1} \equiv q_1^*, \ldots, y_{6+N} \equiv q_N^*$$

$$y_{7+N} \equiv \Omega_1^*, \ldots, y_{9+N} \equiv \Omega_3^*, \quad y_{9+N+1} \equiv q_1^{*\cdot}, \ldots, y_{9+2N} \equiv q_N^{*\cdot}$$

$$A_* \equiv \left\| \frac{\partial W}{\partial y_i \partial y_j} \right\|_{i,j=1}^{i,j=9+2N}, \quad B_* \equiv \| b_{ij} \| = \left\| \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \right\|_{i,j=1}^{i=3,j=9+2N}$$

где в матрицах A_*, B_* производные вычисляются на невозмущенном движении $\Omega_i^* = 0$, $\gamma_i^* = 0$, $\beta_i^* = 0$, $q^* = 0$, $q^{*\cdot} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, причем считаем, что

$$\det \left\| \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \right\|_{i,j=1}^{i,j=3} \neq 0$$

Если квадратичная форма $y^T A_* y$ положительно определена на линейном многообразии $(B_* y)_i = b_{i1} y_1 + \ldots + b_{i,9+2N} y_{9+2N} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, то значения переменных (2.8) будут отвечать локальному минимуму интеграла U при условиях (1.6)

Вводя в рассмотрение определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \Theta & B \\ B_*^T & A_* \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

где Θ – нулевая матрица размера 3×3, необходимые и достаточные условия положительной определенности указанной квадратичной формы на линейном многообразии можно сформулировать как условия строгой положительности [5]

$$\Delta_7 > 0, \Delta_8 > 0, \ldots, \Delta_{9+2N} \equiv \Delta > 0 \tag{3.2}$$

где Δ_n – главный диагональный минор порядка n $(n = 7, \ldots, 9 + 2N)$.

Если раскрыть определитель Δ с использованием теоремы Лапласа [8] по первым трем строкам, а затем по первым трем столбцам, то условия (3.2) можно заменить эквивалентными детерминантными условиями Сильвестра положительной определенности матрицы

$$H = \begin{Vmatrix} A & B \\ B^T & \omega^{-2} C \end{Vmatrix}$$

$$A = \operatorname{diag}(J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0),\ J^{ll}(q^0) - J^{mm}(q^0),\ J^{kk}(q^0) - J^{ll}(q^0))$$

$$B^T \equiv (x_*, y_*, z_*), \quad x_* \equiv 2(J_1^{km}(q^0), \ldots, J_N^{km}(q^0))^T$$

$$y_* \equiv \sqrt{3}(J_1^{lm}(q^0), \ldots, J_N^{lm}(q^0))^T, \quad z_* \equiv (J_1^{kl}(q^0), \ldots, J^{kl}(q^0))^T$$

Положительно определенная матрица C введена в разд. 1.

Матрица $S \equiv \omega^2 C^{-1} = \| s_{ij} \|$ размера $N \times N$ является положительно определенной, симметричной [9].

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $J^{ll}(q^0) - J^{mm}(q^0) = (1 - \alpha)(J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0))$, $J^{kk}(q^0) - J^{ll}(q^0) \equiv \alpha(J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0))$.

Через a_1, a_2, a_3 обозначим корни кубического уравнения

$$t^3 - t^2 p + \operatorname{tg} - r = 0 \tag{3.3}$$

$$p = (y, y) + (x, x) + (z, z)$$

$$g = (x, x)(y, y) - (x, y)^2 + (y, y)(z, z) - (y, z)^2 + (x, x)(z, z) - (x, z)^2$$

$$r = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) & (x, z) \\ (x, y) & (y, y) & (y, z) \\ (x, z) & (y, z) & (z, z) \end{vmatrix}$$

Здесь и ниже

$$(x, x) \equiv x_*^T S x_*, \quad (y, y) \equiv (1 - \alpha)^{-1} y_*^T S y_*, \quad (z, z) \equiv \alpha^{-1} z_*^T S z_*$$

$(x, y) \equiv (1-\alpha)^{-1/2} x_*^T S y_*, \quad (x, z) \equiv \alpha^{-1/2} x_*^T S z_*$

$(y, z) \equiv \alpha^{-1/2}(1-\alpha)^{-1/2} y_*^T S z_*$

Больший корень квадратного уравнения $(t - (x, x))(t - (y, y)) - (x, y)^2 = 0$ обозначим через $a_*, a_* = 0{,}5((x, x) + (y, y)) + (0{,}25((x, x) + (y, y))^2 + (x, y)^2)^{1/2}$.

Полагаем [8], что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, если уравнение (3.3) имеет три различных (или один кратности три) действительных корня, когда имеется два кратных корня через a_3 обозначается простой и в случае, когда уравнение (3.3) имеет один действительный корень, то он обозначается через a_3.

С использованием известной формулы [9] для определителей $\det H = \det(\omega^{-2} C) \times \times \det(A - BSB^T)$ получим следующее

Утверждение 3.1. Для выполнения условий (3.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$J^{kk}(q^0) > J^{ll}(q^0) > J^{mm}(q^0) > 0 \tag{3.4}$$

$$J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0) > \max(a_*, a_3) \tag{3.5}$$

если уравнение (3.3) имеет один действительный корень (может быть кратности 3) a_3, иначе

$$J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0) > a_*$$

$$a_1 < J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0) < a_2 \quad \text{или} \quad J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0) > a_3 \tag{3.6}$$

$$\det(\| d_{ij}(q^0) \|_{i,j=1}^{i,j=n}) > 0 \quad (n = 1, \ldots, 3 + N)$$

$$\det(\| c_{ij} \|_{i,j=1}^{i,j=p}) > 0 \quad (p = 1, \ldots, N) \tag{3.7}$$

Условия (3.4) можно трактовать как достаточные условия устойчивости замороженного в положении равновесия (2.8) упругого ЛА [5, 7]. Условия (3.7) есть детерминантный критерий Сильвестра положительной определенности матриц $D(q^0)$ и C соответственно. Без исследования корней уравнения (3.3) можно заключить, что при увеличении числа учитываемых тонов (при увеличении N) условия (3.5), (3.6) становятся жестче (растет значение a_*).

Дополнительно к условиям (3.4) – (3.7) приведем достаточные условия для выполнения (3.2), являющиеся следствием известной теоремы [9].

Утверждение 3.2. Для выполнения условий (3.2) достаточно чтобы H была матрицей со строгим диагональным преобладанием, т.е.

$$J^{kk}(q^0) - J^{mm}(q^0) > 2 \sum_{n=1}^{N} |J_n^{km}(q^0)|, \quad J^{kk}(q^0) - J^{ll}(q^0) > \sum_{n=1}^{N} |J_n^{kl}(q^0)|$$

$$J^{ll}(q^0) - J^{mm}(q^0) > \sqrt{3} \sum_{n=1}^{N} |J_n^{lm}(q^0)| \tag{3.8}$$

$$\frac{c_{ii}}{\omega^2} > \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|c_{ij}|}{\omega^2} + 2|J_i^{km}(q^0)| + \sqrt{3}\,|J_i^{lm}(q^0)| + |J_i^{kl}(q^0)| \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{3.9}$$

$$\det(\| d_{ij}(q^0) \|_{i,j=1}^{i,j=n}) > 0 \quad (n = 1, \ldots, N + 3) \tag{3.10}$$

4. Пример. Пусть ЛА моделируется твердым телом с защемленным в нем одним концом прямолинейным в недеформированном состоянии однородным упругим стержнем единичной длины и постоянного кругового сечения F, погонная масса стержня $\tau = F\rho_1$, где ρ_1 – плотность стержня.

Орт $\mathbf{f}_1$ оси недеформированного стержня зададим направляющими косинусами относительно осей $Ox_1x_2x_3$, $\mathbf{f}_1 = a\mathbf{i}^1 + b\mathbf{i}^2 + c\mathbf{i}^3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Таким образом, ось стержня не совпадает в общем случае ни с одной из главных центральных осей ЛА в недеформированном состоянии.

Радиус-вектор произвольной точки оси недеформированного стержня определим выражением $\mathbf{r}(s) = (r^0 + s)\mathbf{f}_1 = r_1\mathbf{i}^1 + r_2\mathbf{i}^2 + r_3\mathbf{i}^3 = (r^0 + s)a\mathbf{i}^1 + (r^0 + s)b\mathbf{i}^2 + (r^0 + s)c\mathbf{i}^3$, где r^0 – расстояние от точки O_1 до защемления конца стержня. Полагаем, что в процессе деформации стержень совершает малые продольноизгибные колебания так, что его сечения остаются плоскими и перпендикулярными недеформированной оси (гипотеза Кирхгофа) [4].

В локальной системе координат с ортами $\mathbf{f}_j$ ($j = 1, 2, 3$)

$$\mathbf{u}(t, s) \equiv w\mathbf{f}_1 + u\mathbf{f}_2 + v\mathbf{f}_3 = \sum_{n=1}^{h} (q_n^1 w_n \mathbf{f}_1 + q_n^2 u_n \mathbf{f}_2 + q_n^3 v_n \mathbf{f}_3) \tag{4.1}$$

где собственные формы его свободных упругих колебаний [3]

$$w_n \equiv \sin(\delta_n^0 s)$$

$$u_n \equiv v_n = (\sin\delta_n^* \operatorname{ch}\delta_n^* - \cos\delta_n^* \operatorname{sh}\delta_n^*)^{-1}((\operatorname{sh}\delta_n^* + \sin\delta_n^*)(\operatorname{ch}\delta_n^* s - \cos\delta_n^* s) -$$

$$-(\operatorname{ch}\delta_n^* + \cos\delta_n^*)(\operatorname{sh}\delta_n^* s - \sin\delta_n^* s))$$

(δ_n^0 – n-й корень уравнения $\cos\delta = 0$, а δ_n^* – n-й корень уравнения $\operatorname{ch}\delta\cos\delta + 1 = 0$).

Полагаем, что при конечном повороте вокруг оси, задаваемой ортом $\mathbf{i}^1 \times \mathbf{f}_1 / | \mathbf{i}^1 \times \mathbf{f}_1 |$ ($\mathbf{i}^1 \times \mathbf{f}_1 \neq 0$) на угол $\chi < 180°$, $\cos\chi = a$, орты $\mathbf{i}^k$ переходят в $\mathbf{f}_k$ ($k = 1, 2, 3$). Приведем таблицу направляющих косинусов ортов f_k в осях $O_1 x_1 x_2 x_3$ [1]

	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$
$\mathbf{f}_1$	$a \equiv g_{11}$	$b \equiv g_{21}$	$c \equiv g_{31}$
$\mathbf{f}_2$	$-b \equiv g_{12}$	$1 - \dfrac{b^2}{1+a} \equiv g_{22}$	$-\dfrac{cb}{1+a} \equiv g_{32}$
$\mathbf{f}_3$	$-c \equiv g_{13}$	$-\dfrac{cb}{1+a} \equiv g_{23}$	$1 - \dfrac{c^2}{1+a} \equiv g_{33}$

В осях $O_1 x_1 x_2 x_3$ выражение (1.1) примет вид

$$\mathbf{u}(t, s) = \sum_{n=1}^{N} q_n(t) \psi_n(s) \tag{4.2}$$

где для каждого $j = 1, \ldots, h$; $i = 1, 2, 3$ полагаем $p = i + 3(j-1)$

$$q_p \equiv q_j^i, \quad \psi_p \equiv (g_{1i} w_j)\mathbf{i}^1 + (g_{2i} u_j)\mathbf{i}^2 + (g_{3i} v_j)\mathbf{i}^3 \tag{4.3}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением трех членов в (4.2), полагая $h = 1$ в (4.1), и для простоты считаем $\rho = 0$. В этом случае

$$\Pi = 0{,}5(c_{11} q_1^2 + c_{22} q_2^2 + c_{33} q_3^2) \tag{4.4}$$

Используя формулы (4.3), (1.3), (2.6) из (2.8) при $m = 3$, $k = 2$, $l = 1$ получаем

$$\begin{aligned} q_1^0 &= -\omega^2 c_{11}^{-1}(g_{21}^2 - 3g_{31}^2) I_w \\ q_2^0 &= -\omega^2 c_{22}^{-1}(4g_{22} - 3g_{11}) I_u g_{21} \\ q_3^0 &= -\omega^2 c_{33}^{-1}(g_{11} - 4g_{33}) I_v g_{31} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$I_\kappa = \int_0^1 \tau(r^0 + s)\kappa\, ds, \quad \kappa = u_1, v_1, w_1$$

Формулы (2.7) в данном примере приобретают вид

$$\mathbf{e}^1(q^0) = \mathbf{i}^1 - \frac{P_{12}}{\mu^1 - \mu^2}\mathbf{i}^2 - \frac{P_{13}}{\mu^1 - \mu^3}\mathbf{i}^3$$

$$\mathbf{e}^2(q^0) = \frac{P_{12}}{\mu^1 - \mu^2}\mathbf{i}^1 + \mathbf{i}^2 - \frac{P_{23}}{\mu^2 - \mu^3}\mathbf{i}^3$$

$$\mathbf{e}^3(q^0) = \frac{P_{13}}{\mu^1 - \mu^3}\mathbf{i}^1 + \frac{P_{23}}{\mu^2 - \mu^3}\mathbf{i}^2 + \mathbf{i}^3$$

$$P_{12} = 2q_1^0 g_{11} g_{21} I_w + q_2^0(g_{31} g_{12} + g_{11} g_{22}) I_u + q_3^0(g_{21} g_{13} + g_{13} g_{23}) I_v$$

$$P_{13} = 2q_1^0 g_{11} g_{31} I_w + q_2^0(g_{31} g_{12} + g_{11} g_{32}) I_u + q_3^0(g_{11} g_{23} + g_{13} g_{21}) I_v$$

$$P_{23} = 2q_1^0 g_{21} g_{31} I_w + q_2^0(g_{31} g_{22} + g_{32} g_{21}) I_u + q_3^0(g_{23} g_{31} + g_{21} g_{33}) I_v$$

Конкретизацией утверждения 2.2 для данного примера является

Утверждение 4.1. При предположениях 1–5 упругий стержень в положении относительного равновесия будет недеформирован тогда и только тогда, когда он расположен по одной из главных центральных осей ЛА в натуральном состоянии и одновременно по касательной к орбите.

Из формулы (4.5) следует

Утверждение 4.2. При предположениях 1–5, если упругий стержень расположен по одной из главных центральных осей ЛА в недеформированном состоянии и перпендикулярен к плоскости орбиты, то в положении относительного равновесия стержень будет сжат, если же стержень расположен вдоль радиуса орбиты к притягивающему центру (от него), то в положении относительного равновесия он будет сжат (растянут), причем в обоих случаях изгибные деформации отсутствуют.

Замечание. Утверждение 4.1, 4.2 сохраняют силу и при учете в (4.2) любого количества тонов. "Достаточная часть" утверждения 4.1 и утверждение 4.2 приводятся в работах многих авторов (см. обзоры в [2–4]) и могут быть получены без предположений 1, 2.

Для рассматриваемого примера ввиду громоздкости условий (3.4) – (3.7) приведем достаточные условия устойчивости относительных положений равновесия (3.8) – (3.10).

Пусть ось стержня расположена вдоль одной из главных центральных осей ЛА в недеформированном состоянии и перпендикулярна плоскости орбиты. Полагаем $m = 3$, $k = 2$, $l = 1$, $g_{11} = 0$, $g_{21} = 1$, $g_{31} = 0$ тогда из (4.5) $q_2^0 = q_3^0 = 0$, $q_1^0 \neq 0$, $P(q^0) = E$. Если обозначить через A_1 момент итерации ЛА в недеформированном состоянии относительно трансверсали в точке O, A_2 – момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости орбиты и проходящей через O, A_3 – относительно оси, направленной по радиусу-вектору орбиты, проведенному в O, то условия (3.8) – (3.9) приобретают следующую форму:

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > \omega^2 \sqrt{3}\,|I_u|, \quad c_{33} > \omega^2 |I_v|$$

$$A_1 - A_3 > 0, \quad A_2 - A_1 + \omega^2 c_{11}^{-1} I_w^2 > |I_u|, \quad A_2 - A_3 + \omega^2 c_{11}^{-1} I_w^2 > |I_v|$$

Автор благодарит Л.Ю. Анапольского за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Рубановский В.Н.* Устойчивость установившихся движений сложных механических систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 5. С. 62–134.
3. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
4. *Набиуллин М.К.* Стационарные движения и устойчивость упругих спутников. Новосибирск: Наука, 1990. 217 с.
5. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
6. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.; Л.: Гостехиздат. 1951. 252 с.
7. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 314 с.
9. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
15.IV.1991