Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. Я.В. Татаринов

СЛЕДСТВИЯ НЕИНТЕГРИРУЕМОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СВЯЗЕЙ: НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ДВИЖЕНИЯ ВБЛИЗИ МНОГООБРАЗИЯ РАВНОВЕСИЙ

Предлагается общий анализ нелинейных колебаний консервативных неголономных систем: выбор специальных координат в окрестности многообразия равновесий, аналитическая структура нормальных форм высших приближений, начиная со второго, использование интеграла энергии, явный вид приближенных решений.

Уравнения движения таких систем в первом приближении рассматривались как для случая критической точки потенциальной энергии [1], так и для случая произвольного регулярного равновесия [2]. При этом приближенные уравнения связей в первой работе интегрировались, а во второй – нет. Это породило полемику, по существу излишнюю, так как в общем случае корректно рассмотрение окрестности не отдельного равновесия, а многообразия равновесий [3].

Многочисленные исследования устойчивости неголономных систем (см. обзор [4]) в значительной мере опирались на уравнения первого приближения, главным образом в неконсервативном случае. Особняком стоят теоремы о неустойчивости в критической точке: применялся метод функций Четаева [4], строились асимптотические движения [5].

Если все собственные числа лежат на мнимой оси, то различие между точным решением и первым приближением к нему остается малым лишь на конечных временах. Следовательно, содержательные качественные эффекты на больших временах в движении консервативных неголономных систем около равновесия могут быть установлены только после обращения к высшим приближениям, т.е. с привлечением метода нормальных форм (см., например, [6, 7]). Первым исследованием такого плана была работа А.П. Маркеева [8].

Ниже показано, что нелинейные колебания систем с неинтегрируемыми связями укладываются в рамки общей идеи слабой неголономности [9], а их нормальные формы обладают определенными типичными чертами.

1. Предварительные соображения о нормализации в окрестности многообразия равновесий. Пусть на многообразии (фазовом пространстве) Φ имеется векторное поле Z, обращающееся в нуль на подмногообразии E. Пусть в подходящих координатах X_k, ξ_κ (локально) E задается уравнениями $\xi_\kappa = 0$. Для каждой функции f (выразив ее через X_k, ξ_κ) положим

$$f(X,\xi)=\sum_{M=0}^{\infty} f^{(M)}(X,\xi)=\sum_{M=0}^{\infty}\sum_{|j|=M} f^{(j)}(X)\xi^j$$

$$\frac{df}{dt}=\sum_{M=0}^{\infty} f^{[M]}(X,\xi)=\sum_{M=0}^{\infty}\sum_{|j|=M} f^{[j]}(X)\xi^j$$

$$\xi^j=\xi_1^{j_1}\cdot\xi_2^{j_2}\cdot\ldots,\quad |j|=j_1+j_2+\ldots$$

Поскольку $Z=0$ на E, имеем $\xi_\kappa^{[0]}=X_k^{[0]}=0$.

Чтобы установить правильные ассоциации с теорией возмущений, введем в систему дифференциальных уравнений малый параметр ϵ, положив $\xi=\epsilon\zeta$. Тогда

$$\dot\zeta_\kappa=\sum_{M=1}^{\infty}\epsilon^{M-1}\sum_{|j|=M}\xi_\kappa^{[j]}(X)\zeta^j,\quad \dot X_k=\sum_{M=1}^{\infty}\epsilon^{M}\sum_{|j|=M}X_k^{[j]}(X)\zeta^j$$

При $\epsilon = 0$ получается исходное приближение, которое в теории малых колебаний принято называть не нулевым, а первым. В нем обязательно $\dot{X_k} = 0$, а $\dot{\zeta}$ линейно выражаются через ζ, причем коэффициенты зависят от X.

Будем считать, что система первого приближения имеет диагональный вид (так что ξ, ζ могут быть и комплексными), т.е. $\xi_\kappa^{[1]} = \lambda_\kappa(X)\xi_\kappa$. Для получения N-го приближения, $N \geqslant 2$, надо удержать члены с ϵ до степени $N-1$ включительно.

Рассмотрим в переменных X, ξ малую ϵ-окрестность многообразия E. Введение ϵ в уравнения движения, т.е. переход к X, ζ, означает рассмотрение этой окрестности в переменных порядка единицы. В них использование N-го приближения дает ошибку порядка ϵ^{N-1} на временах порядка $1/\epsilon$ (по обычным теоремам об оценках решений дифференциальных уравнений), т.е. ошибку порядка единицы при $N = 1$. Следовательно, содержательная теория малых колебаний (когда $\operatorname{Re}\lambda_\kappa = 0$) начинается со второго приближения.

Легко понять, как выглядит N-е приближение в переменных X, ξ. Исходим из системы вида

$$\dot{X_k} = \sum_{|j|\geqslant 1} X_k^{[j]}(X)\xi^j, \qquad \dot{\xi_\kappa} = \lambda_\kappa(X)\xi_\kappa + \sum_{|j|\geqslant 2} \xi_\kappa^{[j]}(X)\xi^j \tag{1.1}$$

и отбрасываем в правых частях все одночлены, начиная со степени N для X_k и $N+1$ для ξ_κ. Затем можно будет пользоваться процедурой типа приведения к нормальной форме, т.е. строить замены переменных, после которых очередное приближение приобретает максимально простой вид.

Зависимость коэффициентов системы (1.1) от X вносит определенные усложнения (они будут отмечены) по сравнению с нормализацией обычных квазилинейных систем. Начнем с замены переменных

$$Y = X + Y^{(N-1)}(X, \xi), \qquad \eta = \xi + \eta^{(N)}(X, \xi), \qquad N \geqslant 2 \tag{1.2}$$

Сразу укажем, что обратные выражения будут

$$X = Y - Y^{(N-1)}(Y, \eta) + \ldots, \qquad \xi = \eta - \eta^{(N)}(Y, \eta) + \ldots \tag{1.3}$$

Здесь в выражения $Y^{(N-1)}$, $\eta^{(N)}$ просто подставлены новые буквы, а многоточием обозначены слагаемые высших степеней (только в них сказывается зависимость коэффициентов многочленов (1.2) от X).

Продифференцируем соотношения (1.2). В силу (1.1) в производную одночлена $F(X)\xi^j$ степени $M \geqslant 1$ войдет одночлен $(\lambda(X), j)F(X)\xi^j$ той же степени плюс слагаемые более высоких степеней, в том числе за счет дифференцирования F по X. Поэтому в переменных X, ξ

$$\dot{Y_k} = X_k^{[1]} + \ldots + X_k^{[N-2]} + \sum_{|j|=N-1} (X_k^{[j]} + (\lambda, j) Y_k^{(j)})\xi^j + \ldots$$

$$\dot{\eta}_\kappa = \lambda_\kappa \xi_\kappa + \xi_\kappa^{[2]} + \ldots + \xi_\kappa^{[N-1]} + \sum_{|j|=N} (\xi_\kappa^{[j]} + (\lambda, j)\eta_\kappa^{(j)})\xi^j + \ldots$$

В правых частях $d(1.2)/dt$ перейдем к переменным Y, η, подставив выражения (1.3). После этого всякий одночлен преобразуется:

$$F(X)\xi^j = F(Y - Y^{(N-1)} + \ldots)(\eta - \eta^{(N)} + \ldots)^j$$

Это дает слагаемое $F(Y)\eta^j$ степени M, затем слагаемые степени $M + N - 1$ (если одно из $j_\kappa = 1$, а также за счет зависимости F от X) и, наконец, слагаемые степени, большей N. Степень $N = M + N - 1$ только при $M = 1$, так что коэффициенты степени N для η_κ изменяются лишь в результате преобразования одночлена

$$\lambda_\kappa(X)\xi_\kappa = \lambda_\kappa(Y)\eta_\kappa - \sum_k \frac{\partial\lambda_\kappa}{\partial Y_k} \cdot Y_k^{(N-1)} \cdot \eta_\kappa - \lambda_\kappa(Y)\eta^N + \ldots$$

Следовательно, в переменных Y, η

$$Y_k^{[j]} = X_k^{[j]} + (\lambda, j) Y_k^{(j)}, \quad |j| = N - 1 \tag{1.4}$$

$$\eta_\kappa^{[j]} = \xi_\kappa^{[j]} - \sum_k \frac{\partial \lambda_\kappa}{\partial Y_k} Y_k^{(j-e_\kappa)} + (\lambda, j - e_\kappa)\eta_\kappa^{(j)} \tag{1.5}$$

$$|j| = N, \ j_\kappa \neq 0, \ e_\kappa = (0, \dots, \overset{1}{(k)}, \dots, 0)$$

$$\eta_\kappa^{[j]} = \xi_\kappa^{[j]} + (-\lambda_\kappa + (\lambda, j))\eta_\kappa^{(j)} \tag{1.6}$$

$$|j| = N, \quad j_\kappa = 0$$

Если $(\lambda, j) \neq 0$, $|j| = N - 1$, то подходящим выбором $Y_k^{(j)}$ можно уничтожить $Y_k^{[j]}$, после чего выбором $\eta_\kappa^{(j)}$, $|j| = N$, $j_\kappa \neq 0$ уничтожаются соответствующие $\eta_k^{[j]}$. Отдельно могут быть уничтожены $\eta_\kappa^{[j]}$, $|j| = N$, $j_\kappa = 0$, если

$$\lambda_\kappa \neq j_1 \lambda_1 + \dots + j_{\kappa-1}\lambda_{\kappa-1} + j_{\kappa+1}\lambda_{\kappa+1} + \dots$$

Когда λ_κ не зависят от X, решение (1.4) не влияет на (1.5), и нормализация проходит внешне по обычной схеме. Однако и в этом случае зависимость от X других коэффициентов существенно удлиняет вычисление следующих приближений.

Если уничтожение невозможно, то соответствующий коэффициент из (1.2) будем брать нулевым.

2. Окрестность многообразия равновесий в классической динамике со связями. Будем исходить из того, что наряду с линейными связями

$$g_s(x, x^\cdot) \equiv \sum_{i=1}^{n} d_{si}(x) x_i^\cdot = 0, \quad s = m+1, \dots, n \tag{2.1}$$

задан лагранжиан

$$L = T - V = ½ \sum a_{ij}(x) x_i^\cdot x_j^\cdot - V(x)$$

Уравнения Лагранжа со множителями имеют вид (ср. с [1])

$$d(\partial L/\partial x^\cdot)/dt - \partial L/\partial x^\cdot = \sum \mu_s \partial g_s/\partial x^\cdot \tag{2.2}$$

Многообразие равновесий определяется условиями

$$\partial V/\partial x = \sum \mu_s \partial g_s/\partial x^\cdot \tag{2.3}$$

В теории принято рассматривать случай $\dim E = n - m$ (размерность E равна числу связей), поскольку это случай "общего положения"; соответствующие заключения об уравнениях движения можно найти в [3, 4]. Однако в конкретных задачах размерность E нередко больше. Здесь возникают тонкости, на которых стоит остановиться.

Будем считать x_i локальными координатами на многообразии положений M. В силу уравнений (2.1) в каждом его касательном пространстве T_xM выделено подпространство Π_x размерности m (плоскость связи). Будем говорить, что подмногообразие E размерности $n - l \geqslant n - m$ правильно расположено относительно связи, если

1) T_xE трансверсально Π_x во всех $x \in E$;

2) распределение $T_xE \cap \Pi_x$ на E вполне интегрируемо.

Это распределение имеет размерность $m + (n - l) - n = m - l$, так что второе требование существенно лишь при $l \leqslant m - 2$.

Перейдем к выбору удобных координат, стараясь не менять их обозначений.

Лемма 1. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$E = \{x_\alpha = 0, \ \alpha = 1, \dots, l\} \tag{2.4}$$

уравнения связей вблизи E представлены в разрешенном виде

$$\dot{x_s} = f_s(x_1, \ldots, x_n, \dot{x_1}, \ldots, \dot{x_m}) = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{s\lambda}(x)\dot{x_\lambda} \tag{2.5}$$

причем на E коэффициенты уничтожаются:

$$c_{s\lambda}(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0. \tag{2.6}$$

Действительно, удовлетворим условию (2.4) и рассмотрим интегральные многообразия E^C распределения $T_xE \cap \Pi_x$ на E. Имеем $\dim E - \dim E^C = (n-l) - (m-l) = n - m$. Можно считать, что на E

$$E^C = \{x_s = C_s = \text{const};\quad s = m+1, \ldots, n\}$$

Поэтому базисные векторы $\partial/\partial x_s \in T_xE$ порождают плоскость в T_xM, пересечение которой с Π_x равно нулевому вектору. Подставим $\partial/\partial x_s$ в (2.1). Получим матрицу $\|d_{rs}\|$, которая должна быть невырождена, иначе некоторая нелинейная комбинация $\partial/\partial x_s$ будет принадлежать Π_x, чего не должно быть. Отсюда выводятся выражения (2.5). Введем разложения

$$c_{s\lambda}(x) = c^0_{s\lambda}(x_{l+1}, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha=1}^{l} c^\alpha_{s\lambda}(x)x_\alpha$$

Поскольку x_a ($a = l+1, \ldots, m$) – координаты на E^C, векторы $\partial/\partial x_a \in T_xE \cap \Pi_x$, и поэтому $c^0_{sa} = 0$. Если $c^0_{s\alpha} \neq 0$, то надо положить $y_\lambda = x_\lambda$, $y_s = x_s - \Sigma c^0_{s\alpha}x_\alpha$, и в новых координатах будет

$$\dot{y_s} = \Sigma c^\alpha_{s\lambda}(x)x_\alpha\dot{x_\lambda} - \Sigma\frac{d}{dt}(c^0_{s\alpha})x_\alpha = \Sigma\bar{c}^\beta_{s\lambda}y_\beta\dot{y_\lambda}$$

Это и требовалось.

Примечания. 1°. Завершающее рассуждение хорошо известно и неоднократно применялось [4]. Природа E в лемме 1 несущественна. Эта лемма сохраняет силу и при $\dim E < n - m$; достаточно потребовать лишь $T_xE \cap \Pi_x = 0$.

2°. Пример неправильно расположенного многообразия равновесий дают сани Чаплыгина на горизонтальной плоскости с привешенным к ним маятником. Более того, даже при $\dim E = n - m$ возможны нарушения трансверсальности T_xE и Π_x, и тогда окажется невозможным иметь (2.4) одновременно с (2.5).

Вернемся к условиям (2.3) и предположим, что они задают правильно расположенное многообразие равновесий. Выберем координаты согласно требованиям (2.4)–(2.6).

Заменив (2.2) на уравнения Воронца, наряду с (2.5) получим уравнения вида

$$\Sigma G_{\lambda\mu}(x)\dot{v_\mu} + \Sigma\Gamma_{\lambda\mu\nu}(x)v_\mu v_\nu + \Phi_\lambda(x) = 0, \quad \dot{x_\lambda} = v_\lambda \tag{2.7}$$

где $G_{\lambda\mu}$ – коэффициенты T^*, явный вид $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ сейчас не существен; после этого равновесия оказываются решениями системы

$$\Phi_\lambda(x) \equiv \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} + \Sigma\frac{\partial V}{\partial x_s}c_{s\lambda} = 0 \tag{2.8}$$

Поскольку все $\Phi_\lambda = 0$, когда $x_\alpha = 0$, имеем $\Phi_\lambda = \Sigma\Phi_{\lambda\beta}(x)x_\beta$ ($\beta = 1, \ldots, l$), причем на E

$$\Phi_{\lambda\beta} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda\,\partial x_\beta} + \Sigma\frac{\partial V}{\partial x_s}c^\beta_{s\lambda} \tag{2.9}$$

Будем считать, что вдоль E

$$\det\|\Phi_{\alpha\beta}\| \neq 0 \tag{2.10}$$

Тогда в окрестности E других равновесий заведомо нет.

Примеры с отделением переменных. Возьмем $\dot z = y\dot x$, $L = (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)/2 - W(x, z) - U(y)$ (о физической реализации этой связи рассказано в [10]). Уравнения движения

$$\dot z = y\dot x \tag{2.11}$$

$$(1+y^2)x^{\cdot\cdot}+yy^{\cdot}x^{\cdot}+\partial W/\partial x+y\partial W/\partial z=0 \tag{2.12}$$

$$y^{\cdot\cdot}+\partial U/\partial y=0 \tag{2.13}$$

Как видно, уравнение (2.13) отделяется. Пусть $y=0$ – его равновесие. Тогда в (2.11) получаем $z^{\cdot}=0$ (таким образом, связь интегрируема на подмногообразии $\{y=0\}$), а (2.12) превращается в

$$x^{\cdot\cdot}+\partial W(x,z)/\partial x=0. \tag{2.14}$$

что позволяет говорить о "голономной подзадаче" с параметром z на многообразии $\{y=0\}$. Случай равновесия $y=a$ легко сводится к предыдущему.

Уравнения равновесия (2.8) для системы (2.11) – (2.13) имеют вид

$$F\equiv\partial U/\partial y=0,\quad G\equiv\partial W/\partial x+y\partial W/\partial z=0 \tag{2.15}$$

Составим матрицу

$$\begin{Vmatrix}\partial F/\partial x & \partial F/\partial y & \partial F/\partial z\\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y & \partial G/\partial z\\ -y & 0 & 1\end{Vmatrix} \tag{2.16}$$

Если верхние ее две строки линейно независимы, то многообразие равновесий E одномерно и не имеет особенностей, а если она невырождена, то касательное пространство T_PE в каждой точке $P\in E$ трансверсально плоскости связи Π_P, как это требуется в лемме 1.

Подставим произвольное решение $y(t)$ уравнения (2.13) в (2.11), (2.12). Тогда эти два уравнения будут описывать поведение системы с лагранжианом $L=(x^{\cdot 2}+z^{\cdot 2})/2-W(x,z)$ и связью $z^{\cdot}=y(t)x^{\cdot}$. Если вблизи равновесия $y=0$ взять семейство решений $y=\epsilon\eta(t,\epsilon)$, где ϵ – малый параметр, то придем к слабо неголономной системе в смысле [9], причем при $\epsilon=0$ получается (2.14).

После замены времени $dt=(1+y^2)^{-1/2}d\tau$ уравнение (2.12) получает вид

$$x''+\partial W/\partial x+y\partial W/\partial z=0 \tag{2.17}$$

Приведем примеры некоторых неправильностей в строении многообразия E.

Многообразие равновесий может состоять из единственной изолированной точки. Возьмем

$$V=W+U=x^3/6+xz^2/2+z+y^2/2$$

Тогда уравнения (2.5) дают

$$y=0,\quad x^2+z^2=0$$

Стоит подчеркнуть, что точка $x=y=z=0$ является регулярной и для уравнения связи, и для потенциала.

В точках, где регулярное многообразие E не трансверсально связи, происходит смена устойчивости. Возьмем

$$V=x^3/6-zx+y^2/2$$

Из (2.15) получаем $y=0$, $z=x^2/2$. По y всегда происходят устойчивые колебания. Если же $y=0$, то в плоскости x, z имеем

$$x^{\cdot\cdot}=z-x^2/2,\quad z=\mathrm{const}$$

Равновесие $x=(2z)^{1/2}$ устойчиво, $x=-(2z)^{1/2}$ неустойчиво. В точке $x=y=z=0$ происходит смена устойчивости, и как раз в ней вырождается матрица (2.16). Соответствующий общий результат вытекает из доказательства леммы 2 ниже.

Механизм устойчивости для одномерного многообразия равновесий заслуживает внимания.

Если взять $U=y^2/2$, $W=\omega^2x^2/2+z$, то получится известный пример ([11], § 11]). Речь шла о том, что для равновесия в некритической точке потенциала (здесь это $x=y=0$, z произвольно) нет аналога теоремы Лагранжа–Дирихле, так что устойчивость требует специального доказательства даже если в первом приближении (здесь это $z=\mathrm{const}$) потенциальная энергия имеет минимум. С помощью интегрального признака Ляпунова было получено достаточное условие устойчивости $\omega<\pi^{-1/2}$. Этот результат можно расширить до необходимого условия, показав, как может развиваться неустойчивость.

Решение уравнения (2.13) возьмем в виде $y=\epsilon\sin t$; по этой переменной равновесие $x=y=0$ устойчиво; после перехода в новое время (2.17) получит вид неоднородного линейного уравнения

$$x''+\omega^2x=-y,\quad y=\epsilon\sin t(\tau,\epsilon) \tag{2.18}$$

причем период y по τ равен

$$\theta(\epsilon) = \int_0^{2\pi} (1 + \epsilon^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt = (1 + \epsilon^2)^{-1/2} F(2/\pi, \epsilon(1 + \epsilon^2))^{-1/2} \tag{2.19}$$

При $\epsilon \to 0$, разумеется, $\theta(\epsilon) \to 2\pi$. Следовательно, для устойчивости равновесия $x = y = 0$ достаточно потребовать, чтобы $\omega \neq n$.

Несмотря на устойчивость, при фиксированном $\epsilon \neq 0$ уравнение (2.18) может давать неограниченные по x решения, когда $\theta(\epsilon) = 2\pi n/\omega$. Поскольку в силу (2.19) $\theta(\epsilon)$ убывает, таких значений ϵ конечное число.

Неустойчивость при $\omega = n$ очевидна.

Если взять $V = \omega^2 x^2/2 + xz + y^2/2$, то для уравнения (2.17) могут иметь место, в частности, явления параметрического резонанса.

Возьмем теперь потенциал

$$V = -\tfrac{1}{4}\lambda \cos 2x + z + \tfrac{1}{2} y^2 \tag{2.20}$$

При соответствующем выборе координат и единиц измерения такова потенциальная энергия в задаче о движении пластинки в некотором поле тяготения (ср. с [10]; в частности, x – угол поворота пластинки). Голономная подзадача здесь – это "удвоенный" математический маятник (в (2.20) стоит $\cos 2x$, а не $\cos x$). Уравнение (2.17) приобретает вид

$$x'' + \tfrac{1}{2}\lambda \cos 2x = -\epsilon \sin\tau + O(\epsilon^2)$$

Отличия его от уравнения математического маятника, возмущенного малым периодическим моментом, несущественны, так что на рассматриваемую задачу переносятся как некоторые общетеоретические результаты [12, 13], так и конкретные выводы [14–16].

Подчеркнем, что возникновение многообразия равновесий в неголономной механике обусловлено не неинтегрируемостью связей, а их дифференциальным представлением: если в (2.5) $c_{s\lambda} = 0$, то замечания о структуре E сохраняют силу.

С точки зрения изложенного разд. 1 роль ξ_κ играют x_α, v_α, v_a, а роль X_k остается x_a, x_s. Обозначим $(\,\cdot\,) = (0, x_a, x_s)$. Уравнения первого приближения таковы:

$$\Sigma G_{\lambda\mu}(\,\cdot\,) v_\mu^{\cdot} + \Sigma \Phi_{\lambda\alpha}(\,\cdot\,) x_\alpha = 0, \quad x_\alpha^{\cdot} = v_\alpha, \quad x_a^{\cdot} = x_r^{\cdot} = 0 \tag{2.21}$$

Обратим внимание, что $x_a^{\cdot} = 0$, хотя v_a участвуют в (2.21).

Лемма 2 (стандартная). Введем (вообще говоря, прямоугольную) матрицу $\|F_{\lambda\beta}\| = \|G_{\lambda\mu}\|^{-1} \|\Phi_{\lambda\alpha}\|$ и предположим, что собственные значения ее квадратной части $\|F_{\alpha\beta}\|$ положительны и различны (а если совпадают, то имеют простые жордановы клетки). Обозначим их $\omega_1^2, \ldots, \omega_l^2$. Тогда без уменьшения общности можно считать, что в (2.21)

$$\|G_{\lambda\mu}\| = E^m, \quad \|\Phi_{\alpha\beta}\| = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_l^2), \quad \|\Phi_{a\beta}\| = 0$$

так что в переменных $X = (x_a, a_r)$, $\xi = (p_{-\alpha}, p_{+\alpha}, v_a)$, где

$$p_{-\alpha} = x_\alpha - i v_\alpha/\omega_\alpha(X), \quad p_{+\alpha} = x_\alpha + i v_\alpha/\omega_\alpha(X) \equiv \overline{p_{-\alpha}}$$

Уравнения уже второго приближения таковы:

$$\begin{aligned} p_{-\alpha}^{\cdot} &= i\omega_\alpha(X) p_{-\alpha} + p_{-\alpha}^{[2]}(X, \xi) \\ v_a^{\cdot} &= v_a^{[2]}(X, \xi), \quad x_a^{\cdot} = v_a, \quad x_r^{\cdot} = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Последнее имеет место по лемме 1.

3. Общий вид нормальной формы. Система (2.5), (2.7) обратима в том смысле, что если $x(t)$, $v(t)$ – решение, то и $x(-t)$, $-v(-t)$ – тоже решение. Кроме того, она обладает первым интегралом, а именно квадратичным по скоростям интегралом энергии

$$H = T^* + V = \tfrac{1}{2} \Sigma G_{\lambda\mu}(x) v_\lambda v_\mu + V(x)$$

В дальнейшем существенны именно эти ее свойства; следовательно, связь $G_{\lambda\mu}$, $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$, Φ_λ с исходным лагранжианом L сейчас можно не уточнять.

В разложениях (1.1) положим $j = \rho\sigma\tau$, после чего $\xi^j = p_-^\rho p_+^\sigma v^\tau$.

Лемма 3. Специфика коэффициентов разложения правых частей выражается в следующем:

$$p_-^{[\rho\sigma\tau]} = \bar{p}_+^{[\rho\sigma\tau]} = -(-1)^{|\tau|}\bar{p}_-^{[\rho\sigma\tau]}$$

$$v^{[\rho\sigma\tau]} = \bar{v}^{[\sigma\rho\tau]} = (-1)^{|\tau|}\bar{v}^{[\rho\sigma\tau]}$$

$$X^{[\rho\sigma\tau]} = \bar{X}^{[\sigma\rho\tau]} = -(-1)^{|\tau|}X^{[\rho\sigma\tau]}$$

Действительно, в силу свойства обратимости система и переменных p_-, p_+, v, X должна выдерживать замену t на $-t$, v на $-v$ и перестановку $p_- \rightleftarrows p_+$ (все одновременно).

Следствие. Будем писать τ_0 при $|\tau|$ четном, τ_1 при $|\tau|$ нечетном. Если $j = \rho\sigma\tau_0$, то коэффициенты v действительны, p_-, p_+, X – чисто мнимы; если $j = \rho\sigma\tau_1$, то наоборот. При $\rho = \sigma$ и $\tau = \tau_0, \tau_1$ соответственно равны нулю коэффициенты X и v.

Теорема 1. Допустим, что между частотами $\omega_\alpha(\cdot)$ нет соизмеримостей до порядка $N+1$ включительно. Переменные в нормальной форме N-го приближения обозначим q_-, q_+, w, Y и условимся больше не упоминать о том, что они зависят от N (см. (1.2)).

Введем "полярные координаты" $\psi_\alpha = \arg p_{-\alpha}$, $\Delta_\alpha = |p_{-\alpha}|$. Нормальная форма N-го приближения приводится к виду

$$\dot\Delta_\alpha = \Delta_\alpha \Sigma \Delta_\alpha^{\{\rho\tau_1\}}(Y)\Delta^{2\rho}w^{\tau_1}, \qquad 1 \leqslant 2|\rho| + |\tau_1| \leqslant N-1 \tag{3.1}$$

$$\dot w_a = \Sigma w^{\{\rho\tau_0\}}(Y)\Delta^{2\rho}w^{\tau_0}, \qquad 2 \leqslant 2|\rho| + |\tau_0| \leqslant N \tag{3.2}$$

$$\dot Y_s = \Sigma Y_s^{\{\rho\tau_1\}}(Y)\Delta^{2\rho}w^{\tau_1}, \qquad 3 \leqslant 2|\rho| + |\tau_1| \leqslant N-1 \tag{3.3}$$

$$\dot Y_a = w_a + \Sigma Y_a^{\{\rho\tau_1\}}(Y)\Delta^{2\rho}w^{\tau_1}, \qquad 3 \leqslant 2|\rho| + |\tau_1| \leqslant N-1 \tag{3.4}$$

$$\dot\psi_\alpha = \omega_\alpha(Y) + \Sigma\psi_\alpha^{\{\rho\tau_0\}}(Y)\Delta^{2\rho}w^{\tau_0}, \qquad 2 \leqslant 2|\rho| + |\tau_0| \leqslant N-1 \tag{3.5}$$

Доказательство. Вектор λ имеет вид $(i\omega, -i\omega, 0)$ так что $(\lambda, j) = i(\omega, \rho - \sigma)$, причем $|(\rho-\sigma), | \leqslant |\rho| + |\sigma| = |j| - |\tau|$. Соотношения (1.4)–(1.6) и лемма 3 показывают, что нормализация сохраняет свойства вещественности ($\bar q_+ \equiv q_-$) и обратимости. Выпишем коэффициенты, обязательно присутствующие в нормальной форме (неуничтожимые), и переобозначим их:

$$Y_k^{[\rho\rho\tau_1]} = Y_k^{\{\rho\tau_1\}}, \quad w_a^{[\rho\rho\tau_0]} = w_a^{\{\rho\tau_0\}}$$

$$q_{-\alpha}^{[\rho\rho'\tau_1]} = \Delta_\alpha^{\{\rho\tau_1\}}, \quad q_{-\alpha}^{[\rho\rho'\tau_0]} = i\psi_\alpha^{\{\rho\tau_0\}}, \quad \rho' = \rho + e_\alpha$$

Здесь учтено также следствие из леммы 3. Цель и смысл преобразований очевидны. Специфика второго приближения учтена в (3.3), (3.4).

Замечания. 1°. Система (3.1) – (3.4) отделяется; она описывает изменение "медленных" переменных. При переходе от $2M$-го приближения к $(2M+1)$-му медленные переменные изменяются так же, а в силу (3.5) угловые переменные получают поправки к частоте порядка ϵ^{2M}.

2°. В случае, если силы не консервативные, а лишь являются функциями координат, нормальная форма будет такой же.

3°. Выражения исходных переменных через переменные Δ, ψ, w, Y из нормальной формы N-го приближения можно взять в виде

$$x_i = y_i + \Sigma[A_i^{(\rho\sigma\tau)}(Y)\cos(\rho-\sigma, \psi) + B_i^{(\rho\sigma\tau)}(Y)\sin(\rho-\sigma, \psi)]\,\Delta^{\rho+\sigma}w^\tau \tag{3.6}$$

причем, если $i = \alpha$, то $y_\alpha = \Delta_\alpha \cos\psi_\alpha$, больше нигде $\cos\psi_\alpha$ или $\sin\psi_\alpha$ с коэффициентом $F(X, \Delta, w)$ не встречается, при суммировании $2 < |j| < N$; если $i = a$ или s, то $y_a = Y_a$, $y_s = Y_s$, коэффициенты $A^{(\rho\rho\sigma)} = 0$, при суммировании $|j| < N$ и, как и выше, $|j| \geqslant 2$, что связано со специальным видом уравнений второго приближения. После постановки в (3.6) решений системы (3.1) – (3.5) получается N-е приближение для решений точных уравнений в окрестности E (с ошибкой, о которой говорилось в разд. 1).

4°. Если $\dim E = n - m$, то переменные w_a, X_a в теореме 1 отсутствуют, а уравнения (3.1), (3.4) приобретают вид $\dot\Delta_\alpha = 0$, $\dot Y_r = 0$. Последнее позволяет считать связи как бы интегрируемыми, поскольку в силу (3.6) X_s осциллируют около постоянных значений. Эти колебания – главное проявление неголономности (поскольку нормальная форма (3.1) , (3.5) имеет место также для голономных систем с позиционными силами и параметрами Y_r).

5°. Контрпримером к замечанию 4° служит такая система:

$$L = (x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2})/2 - (x^2 + y^2)/2, \qquad z^{\cdot} = xy^{\cdot} - yx^{\cdot}$$

Уравнения движения здесь $x^{\cdot\cdot} + x = y^{\cdot\cdot} + y = 0$ плюс уравнение связи, в силу которого $z^{\cdot}$ имеет смысл постоянной площадей, и z неуклонно растет (эффект простейшего резонанса $\omega_1 = \omega_2$).

Теорема 2. Разложим интеграл энергии:

$$H = \Sigma H^{(\rho\sigma\tau)}(Y) q_-^{\rho} q_+^{\sigma} w^{\tau}$$

В силу обратимости (четности H по $x^{\cdot}$) величины $H^{(\rho\sigma\tau_0)}$ и $iH^{(\rho\sigma\tau_1)}$ действительны, так что

$$H = \Sigma\, [H^{(\rho\sigma\tau_0)}(Y)\cos(\rho - \sigma,\ \psi) + iH^{(\rho\sigma\tau_1)}(Y)\sin(\rho - \sigma,\ \psi)]\, \Delta^{\rho+\sigma} w^{\tau} \tag{3.7}$$

Средняя энергия (функция только медленных переменных)

$$H_0 = \Sigma H_0^{[2L]} = \sum_{L=0}^{M} \sum_{|j|=2L} H^{(\rho\rho\tau_0)}(Y)\Delta^{2\rho} w^{\tau}, \quad 2M \leqslant N + 1 \tag{3.8}$$

в силу системы (3.1)–(3.4) имеет производную порядка $2M + 2$, что дает следующие ограничения на коэффициенты системы:

$$\sum_a \frac{\partial H^{(\rho\rho\tau_0)}}{\partial Y_a} Y_a^{\{\mu\nu_1\}} + \sum_r \frac{\partial H^{(\rho\rho\tau_0)}}{\partial Y_r} Y_r^{\{\mu\nu\}} + \tag{3.9}$$

$$+ \sum_\alpha 2H^{(\rho\rho\tau_0)} \rho_\alpha \Delta_\alpha^{\{\mu\nu_1\}} + \sum_a H^{(\rho,\rho,\nu_1+e_a)} (\dot{\nu}_a + 1)\, w^{\{\mu\tau_0\}} = 0$$

где $\rho + \mu$, $\tau_0 + \nu_1$ – произвольные фиксированные целочисленные векторы. Наинизшая по степени непостоянная форма $H_0^{[2k]}$ является точным интегралом уравнений второго приближения.

В частности, $H^{[0]} = V(0, Y_a, Y_r)$, причем зависимости от Y_a на деле нет в силу (2.9). Далее

$$2H_0^{[2]} = \Sigma k_\alpha(Y)\Delta_\alpha^2 + \Sigma k_\alpha(Y) w_a^2$$

Если $H_0^{[0]} = \text{const}$, т.е. E – многообразие критических точек V, то $H_0^{[2]}$ – интеграл для медленных переменных в первом (что тривиально), втором и третьем приближениях.

Примеры. Выпишем по теореме 1 нормальную форму второго приближения для $l = 2$, $m = 3$, $n = 5$

$$\begin{aligned} &\Delta_1^{\cdot} = c_1 \Delta_1 w_3, \quad \Delta_2^{\cdot} = c_2 \Delta_2 w_3 \\ &w_3^{\cdot} = d_1 \Delta_1^2 + d_2 \Delta_2^2 + d_3 w_3^2, \qquad Y_3^{\cdot} = w_3 \\ &Y_4^{\cdot} = Y_5^{\cdot} = 0, \quad \psi_1^{\cdot} = \omega_1, \quad \psi_2^{\cdot} = \omega_2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Коэффициенты пусть будут постоянными. Система вида (3.10) возникла [8] в задаче о качении твердого тела по плоскости. Правда, там $d_3 = 0$. Оказывается, это универсальный факт, и следует он из наличия интеграла

$$2H_0^{[2]} = k_1 \Delta_1^2 + k_2 \Delta_2^2 + k_3 w_3^2$$

так как по теореме 2 получается

$$k_1 c_1 + k_3 d_1 = k_2 c_2 + k_3 d_2 = k_3 d_3 = 0$$

Анализ системы (4.1) [8] переносится на широкий класс систем, для которых $c_1 c_2 < 0$. Возможен аналогичный анализ других случаев. Система вида (3.10) с непостоянными коэффициентами возникает в задаче о качении плоской пластинки по шероховатой поверхности в поле тяжести. Приведение ее к нормальной форме в высших приближениях весьма громоздко (ср. с разд. 4).

4. Задача о качении палочки по наклонному цилиндру. Пусть в цилиндрической системе координат $P(r, \varphi, z)$ – точка соприкосновения палочки и цилиндра, S – ее центр масс, $PS = s\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ – направляющий вектор палочки, θ – угол между $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}$. Тогда без учета связей

$$T = \tfrac{1}{2}M([r\varphi^{\cdot} + (s\cos\theta)^{\cdot}]^2 + [z^{\cdot} + (s\sin\theta)^{\cdot}]^2 + [s\cos\theta\varphi^{\cdot}]^2) + \tfrac{1}{2}I(\theta^{\cdot 2} + \varphi^{\cdot 2}\cos^2\theta)$$

где I – центральный момент инерции палочки, M – масса. Уравнения связей

$$dz + ds\cdot\sin\theta = 0, \quad rd\varphi + ds\cdot\cos\theta = 0 \tag{4.1}$$

Для движения по инерции имеем систему Чаплыгина с независимыми переменными s, θ. Более того, замена времени $dt = \cos\theta(I + M s^2)^{1/2}d\tau$ приводит уравнения движения по инерции к лагранжеву виду.

Потенциальная энергия при подходящем выборе φ имеет вид

$$V = Mg[\sin\alpha(z + s\sin\theta) + \cos\alpha(r\cos\varphi - s\cos\theta\sin\varphi)]$$

где α – угол между осью цилиндра и горизонтальной плоскостью. Можно считать $M = g = r = 1$.

Координаты, предписанные леммой 1, вводятся формулами

$$\Phi = \varphi + s/\cos\theta, \quad Q = z + s\sin\theta$$

поскольку многообразие равновесий есть $E = \{s = 0\}$.

Следствия теорем 1 и 2. Нормальная форма уравнений второго приближения (3.1) – (3.2) при $l = 1$, $m = 2$ имеет вид ($\Delta \equiv \Delta_1$, $w \equiv w_2$)

$$\Delta^{\cdot} = c(Y)\Delta w, \quad w^{\cdot} = d_1(Y)\Delta^2 + d_2(Y)w^2$$

В третьем приближении к $\psi^{\cdot} = \omega$ по (3.5) добавятся поправки, квадратичные по Δ и по w. В четвертом приближении в правых частях $\Delta^{\cdot}$, $w^{\cdot}$ появятся слагаемые четвертых степеней по Δ, w (которые уточнять и дописывать не будем), и, главное, может начаться трансгрессия в смысле [9]: нетривиальная эволюция зависимых координат

$$Y_s^{\cdot} = w(E_{s1}(Y)\Delta^2 + E_{s2}(Y)w^2), \quad s = 3, 4, \ldots$$

(похожие слагаемые добавятся также к $Y_2^{\cdot} = w$).

Интеграл энергии имеет вид

$$H = V(Y_s) + \tfrac{1}{2}[k_1(Y)\Delta^2 + k_2(Y)w^2] + \ldots$$

а соотношения (3.9) дают

$$\Sigma\frac{\partial V}{\partial Y_s}E_{s\lambda} + \frac{\partial k_\lambda}{\partial Y_2} + 2k_2 d_\lambda - 2(\lambda - 2)k_1 c_1 = 0, \quad \lambda = 1, 2$$

Результаты вычислений. В рассматриваемой задаче

$$\Delta^2 \approx s^2 + s'^2/\omega^2, \quad w \approx \theta'/\cos\theta + s'F/\omega^2, \quad Y_3 \approx \Phi, \quad Y_4 \approx Z$$

$$\omega^2(\Phi) = \cos\alpha\cos\Phi, \quad F = \cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\Phi\sin\theta$$

$$c_1 = \sin\theta, \quad d_1 = d_2 = 0, \quad k_1 = \cos^2\theta\cos\alpha\cos\Phi, \quad k_2 = 1$$

$$E_{31} = -\frac{3}{4}\frac{\sin\alpha}{\cos^3\theta}, \quad E_{41} = -\frac{3}{4}\frac{\cos\alpha\sin\Phi}{\cos^2\theta}, \quad E_{32} = E_{42} = 0$$

Процесс движения качественно можно представить как колебания по s, φ, z с амплитудой порядка ϵ около положения равновесия с координатами Φ, Q, сочетающиеся с медленным поворотом палочки (в первом приближении этот эффект отсутствует). За время порядка $1/\epsilon$ угол θ изменится на конечную величину, а равновесие, около которого происходят колебания, сместится на величину порядка ϵ^2 (трансгрессия). Смещение происходит по кривой

$$Q = Q_0 + \operatorname{ctg}\alpha[\cos(\Phi - \Phi_0) - 1]$$

Амплитуда колебаний имеет порядок Δ. Во втором приближении $\Delta\cos\theta = \Delta_0\cos\theta_0$, так что в зависимости от направления изменения θ величина Δ уменьшается или увеличивается, оставаясь величиной порядка ϵ.

5. Заключение. Идея слабой неголономности, предложенная в [9] и использованная в [10, 17, 18] состояла в рассмотрении неголономной системы, зависящей от малого параметра, при нулевом значении которого получалось семейство гамильтоновых систем. Теперь же возмущение такого семейства возникает при исследовании одной неголономной системы.

Главные выводы таковы (см. также [19]).

Если размерность многообразия равновесий равна числу связей, то в динамике с независимыми частотами уравнения связей "интегрируемы в среднем", т.е. в подходящих определяющих координатах движение происходит вблизи координатных плоскостей, причем отклонение от них имеет второй порядок малости и носит колебательный характер.

Если размерность многообразия равновесий больше числа связей, то во втором приближении возникает тривиальное смещение вдоль него со скоростью первого порядка малости, а в четвертом приближении может быть уловлен ранее не отмечавшийся эффект дополнительной эволюции вдоль многообразия равновесий со скоростью третьего порядка малости, так что об "интегрируемости в среднем" говорить уже не приходится.

Приведенные выше примеры показывают, что вблизи многообразия равновесий одной неголономной системы может проявиться все богатство явлений гамильтоновой механики. Вместе с тем с точки зрения нормальных форм в отсутствие соизмеримостей между частотами поведение неголономных систем около многообразия равновесий весьма однообразно и определяется главным образом его размерностью. Исключение составляют задачи, в которых по тем или иным причинам (например, какая-то симметрия) обращаются в нуль коэффициенты нормальной формы; так, в задаче о колебаниях тела на плоскости точка соприкосновения никуда не эволюционирует. Наличие интеграла энергии позволяет делать определенные заключения о коэффициентах высших приближений, когда известны коэффициенты низших.

Автор благодарит С.В. Болотина за замечание в начале разд. 3 и В.В. Румянцева за требовательность при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уитткер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
2. *Bottema O.* On the small vibrations of non holonomic systems. // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam. 1949. V. 52. N. 8. P. 848–850.
3. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
4. *Карапетян А.В., Румянцева В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. С. 3–128.
5. *Козлов В.В.* Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 2. С. 289–291.
6. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 448 с.
7. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
8. *Маркеев А.П.* О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 575–582.
9. *Татаринов Я.В.* Слабо неголономные системы // Шестой всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986. Аннотации докладов. С. 592.
10. *Татаринов Я.В.* Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: Модельные задачи малой размерности // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 741–749.
11. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
12. *Нейштадт А.И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
13. *Козлов В.В.* Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // Успехи мат. наук (УМН). 1986. Т. 41. Вып. 5. С. 177–178.
14. *Златоустов В.А., Сазонов В.В., Сарычев В.А.* Вынужденные периодические колебания математического маятника // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 250–261.

15. *Маркеев А.П., Чуркина Н.И.* О вынужденных колебаниях и вращениях математического маятника // МАИ, М.: 1985. Деп. в ВИНИТИ 20.08.85, № 6140 – 85 ДЕП.
16. *Буров А.А.* О движении одномерного осциллятора в поле с периодическим потенциалом// Вестн. МГУ. Мат. мех. 1984. № 3. С. 63–65.
17. *Козлов В.В.* О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538–545.
18. *Татаринов Я.В.* Слабо неголономное представление задачи о качении твердого тела и возможности усреднения по фазовым торам // МТТ. 1988. № 1. С. 25–33.
19. *Татаринов Я.В.* Сложение нелинейных колебаний с эволюцией вблизи многообразия равновесий обратимых систем. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 5. С. 93–95.

Москва

Поступила в редакцию
15.1.1990