Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. Л.Б. Рапопорт

# УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ И ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТЬ ПУЧКА КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В КОНУСЕ

**Рассматривается задача устойчивости равновесия механической системы, стесненной неудерживающими связями. Предполагается, что в состоянии равновесия связи реализованы, но их реакции отсутствуют. Показано, что условия устойчивости равновесия таких систем можно получить из анализа знакоопределенности пучка квадратичных форм в конусе. Дан метод решения этой алгебраической задачи.**

1: Рассмотрим механическую систему с обобщенными координатами $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и функций Ларганжа $L = T_2 - \Pi$, где

$$T_2 = T_2(q, q^{\cdot}) = ½\langle q^{\cdot}, A(q) q^{\cdot}\rangle, \qquad \Pi = \Pi(q) \tag{1.1}$$

матрица-функция $A(q)$ и функция $\Pi(q)$ являются аналитическими в некоторой области $D$ пространства $R^n$, угловые скобки означают скалярное произведение. Будем предполагать, что движение системы стеснено неудерживающими идеальными связями вида

$$q_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m \leqslant n \tag{1.2}$$

Определим возмущенное движение следующим образом. В промежутках между моментами ударов движение системы подчинено законам механики для систем, не стесненных связями [1]. Коэффициенты восстановления в момент удара равны единице. Если в момент удара реализована не одна связь, а несколько ("кратный удар"), то возможна неединственность продолжения движения после удара. Возможная неединственность в определении возмущенного движения не является препятствием при исследовании устойчивости равновесия, если в определении устойчивости потребовать малость любого возмущенного движения при малых возмущениях начальных условий.

В соответствии с принципом виртуальных перемещений в положении равновесия системы (1.1), (1.2) выполняется неравенство [1, 2]

$$\langle \partial\Pi/\partial q, \delta q\rangle \geqslant 0, \quad \delta q = (\delta q_1, \ldots, \delta q_n) \tag{1.3}$$

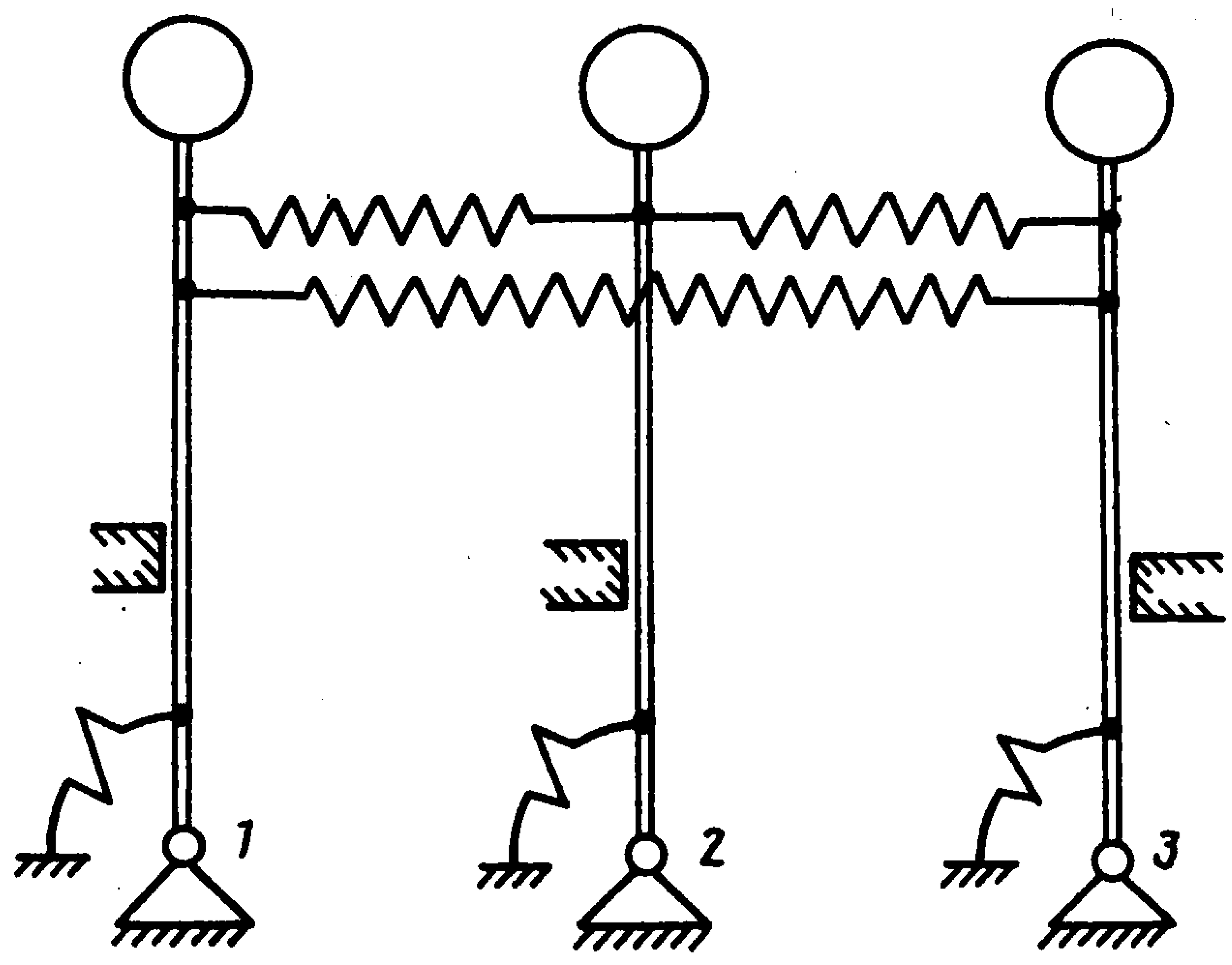
Далее рассматриваются положения равновесия $q^* \in D$, в которых связи $q_1, \ldots, q_m$ реализованы (т.е. $q_i^* = 0, i = 1, \ldots, m$), но их реакции равны нулю.

В условии (1.3) независимые величины $\delta q_i$ принимают неотрицательные значения при $i = 1, \ldots, m$ и не имеют ограничений на знаки при $i = m + 1, \ldots, n$, а величины $-\partial\Pi/\partial q_i$ пропорциональны реакциям связей. Поэтому в положении $q^*$ выполняется условие

$$\partial\Pi/\partial q = 0 \tag{1.4}$$

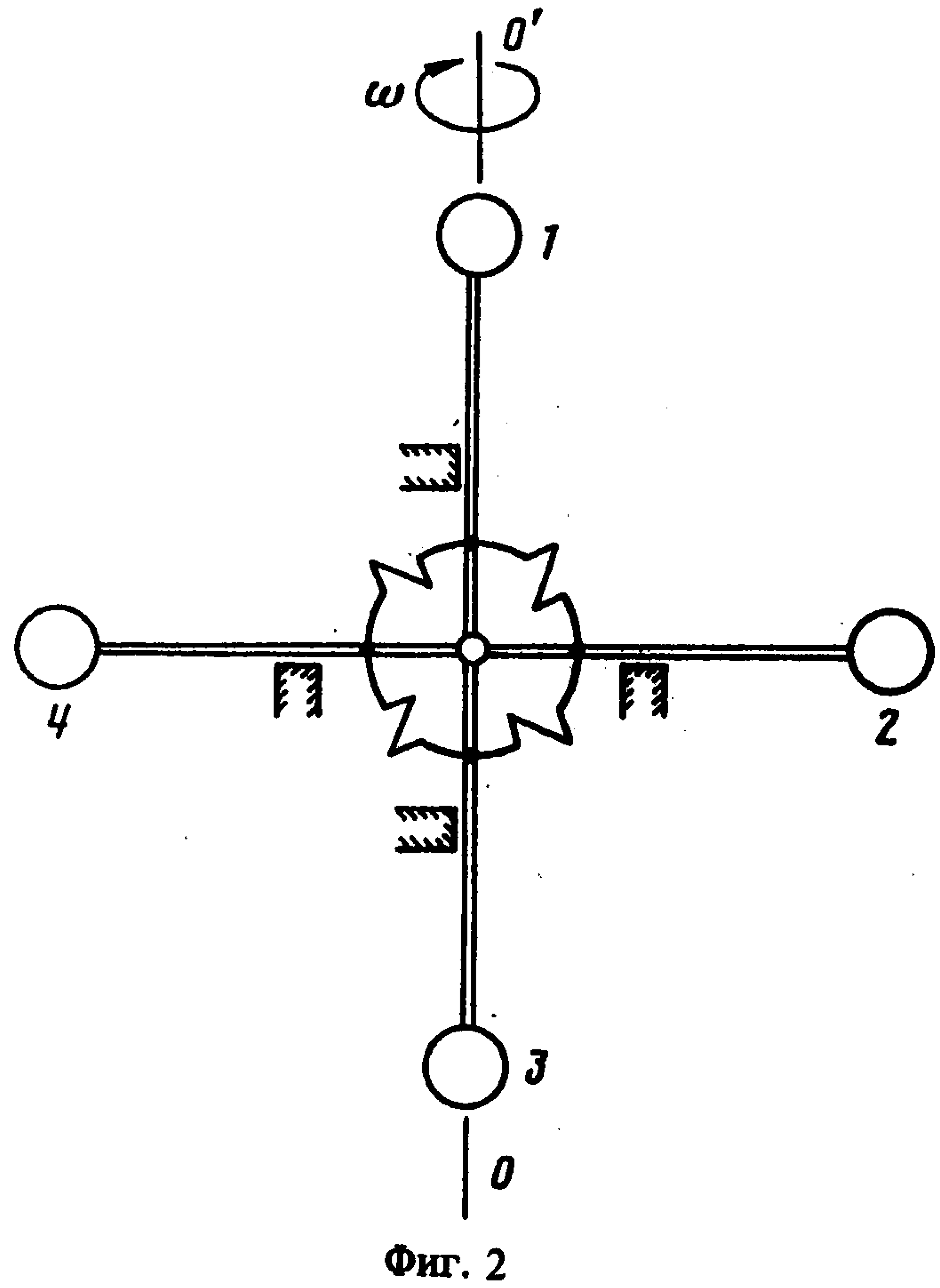
т.е. $q^*$ есть стационарная точка функции $\Pi(q)$. Условие (1.4) необходимо и достаточно для равновесия системы в положении $q^*$ и отсутствия реакций связей $q_i \geqslant 0, i = 1, \ldots$ $\ldots, m$. Имеет место следующее обобщение теоремы Лагранжа–Дирихле [3].

*Теорема* 1. Если в положении $q^* = (0, \ldots, 0, q^*_{m+1}, \ldots, q^*_n) \in D$ функция $\Pi(q)$ име-





Фиг. 1





Фиг. 2

ет строгий локальный минимум в области $q_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $q \in D$, то это положение устойчиво по Ляпунову.

Справедливо также утверждение, обобщающее теорему Ляпунова [4].

*Теорема* 2. Если в положении $q^* = (0, \ldots, 0, q^*_{m+1}, \ldots, q^*_n) \in D$ функция $\Pi(q)$ не имеет локального минимума в области $q_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $q \in D$, и отсутствие минимума устанавливается членами второго порядка в разложении $\Pi(q)$ по степеням $q$ в окрестности $q^*$, то положение $q^*$ неустойчиво.

Ниже рассматриваются системы, у которых функция П зависит не только от координат $q$, но и от числового параметра $\alpha$, принимающего значения из области $R$ числовой оси, причем положение $q^*$ является равновесием для любых значений $\alpha \in R$. Это означает, что условия (1.4) выполнены при $q = q^*$ для любых $\alpha \in R$. Примеры таких систем приведены на фиг. 1, 2.

Система на фиг. 1 состоит из трех стержней, вращающихся в вертикальной плоскости. Координатами $q_1$, $q_2$, $q_3$ являются углы отклонения стержней от вертикали. Положительное направление для $q_1$ и $q_2$ – по часовой стрелке, а для $q_3$ – против. Связи $q_i \geqslant 0$ реализованы упорами. Спиральные пружины, закрепленные на неподвижном основании и на стержнях, создают восстанавливающий момент, пропорциональный $q_i$, и имеют коэффициенты жесткости $\kappa_i$. Пружины, соединяющие концы стержней, имеют коэффициенты жесткости $k_{ij}$. Расстояние от точек закрепления стержней до пружин одинаково для всех стержней и равно $l$. Расстояние между точками закрепления стержней *1*, *2* и *2*, *3* по горизонтали одинаково и равно $r$. Масса $m_0$ каждого из трех одинаковых шаров, закрепленных на концах стержней, играет роль параметра $\alpha$. Потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi(q,\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\kappa_i q_i^2 + m_0 lg \sum_{i=1}^{3}(1-\cos q_i) + K_{12}^-(r) + K_{23}^+(r) + K_{13}^+(2r)$$

$$K_{ij}^{\pm}(r) = \tfrac{1}{2}k_{ij}l\{[(\cos q_2 - \cos q_1)^2 + (\sin q_2 - \sin q_1 + r/l)^2]^{1/2} - r/l\}^2$$

где $g$ – ускорение свободного падения. Здесь $n = m = 3$, $\alpha = m_0$ и $R = [0,+\infty)$. Условие (1.4) при $q^* = (0,0,0)$ будет выполняться для любого $\alpha \in R$.

Система фиг. 2 состоит из четырех стержней шарнирно закрепленных концами в общей точке, и движущихся в одной плоскости. В качестве координат $q_1$ и $q_3$ выбраны углы отклонения стержней *1* и *3* от вертикали. Координатами $q_2$ и $q_4$ являются углы отклонения стержней *2* и *4* от горизонтали. Положительное направление углов $q_1$ и $q_4$ – по часовой стрелке, а углов $q_2$ и $q_3$ –против. Связи $q_i \geqslant 0$ реализованы упорами. Стержни соединены спиральными пружинами, создающими (при учете выбранных положительных направлений) моменты

$$M_{12} = \kappa_{12}|q_1 + q_2|, \quad M_{23} = \kappa_{23}|q_2 - q_3|$$

$$M_{34} = \kappa_{34}|q_3 + q_4|, \quad M_{14} = \kappa_{14}|q_1 - q_4|$$

Предполагается, что сила тяжести отсутствует. Плоскость, в которой движутся стержни, вращается вокруг оси $O - O'$ с постоянной угловой скоростью $\omega$. На концах стержней закреплены массы $m_i$, $l_i$ – длина $i$-го стержня.

Измененная потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = -\tfrac{1}{2}\omega^2[m_1(l_1\sin q_1)^2 + m_3(l_3\sin q_3)^2 + m_2(l_2\cos q_2)^2 + m_4(l_4\cos q_4)^2] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\kappa_{12}(q_1+q_2)^2 + \kappa_{14}(q_1-q_4)^2 + \kappa_{23}(q_2-q_3)^2 + \kappa_{34}(q_3+q_4)^2] \tag{1.5}$$

Здесь $\alpha = \omega^2$, $m = n = 4$ и условие (1.4) при $q^* = (0,0,0,0)$ выполняется для любого $\alpha \in R = [0,+\infty)$.

Рассматриваемая задача состоит в получении условий на параметр $\alpha$, при выполнении которых положение равновесия системы (1.1), (1.2) в соответствии с теоремами 1, 2 будет устойчиво.

2. При отсутствии неудерживающих связей выполнение условия теоремы Лагранжа–Дирихле проверяется применением критерия Сильвестра к матрице вторых частных производных потенциальной энергии в положении равновесия. Наличие неудерживающих связей $q_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,m$ и параметра $\alpha$ существенно усложняют задачу. Обозначим $x = q - q^*$ и представим функцию $\Pi(q,\alpha)$ в виде

$$\Pi(q,\alpha) = \Pi(q^*,\alpha) + \tfrac{1}{2}Q(x,\alpha) + P(x,\alpha) \tag{2.1}$$

для любого $\alpha \in R$, где $Q(x,\alpha)$ – квадратичная форма относительно переменных $x_i$ с коэффициентами, зависящими от $\alpha$, и $|P(x,\alpha)|/|x|^2 \to 0$ при $|x| \to 0$, для любого $\alpha \in R$. Ограничимся случаем линейной зависимости $\Pi(q,\alpha)$ от $\alpha$. Тогда

$$Q(x,\alpha) = (x,Ax) + \alpha(x,Bx) \tag{2.2}$$

представляет собой пучок квадратичных форм, где $A$ и $B$ – симметрические матрицы. Через

$$C = \{x \in R^n \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,m\} \tag{2.3}$$

обозначим конус в пространстве $R^n$.

Имеет место следующее утверждение [5].

*Лемма* 1. Для существования у функции $\Pi(q,\alpha)$ в точке $q^*$ строгого локального минимума по области $C \cap D$ необходимо, чтобы $Q(x, \alpha) \geqslant 0$ при $x \in C$, и достаточно, чтобы $Q(x, \alpha) > 0$ при $x \in C$.

Обозначим через $r$ множество тех значений $\alpha$, при которых квадратичная форма $Q(x, \alpha)$ (2.2) положительно определена. Квадратичную форму, принимающую положительные значения в области $C$, будем называть положительно определенной в области $C$ и через $\rho \subseteq R$ обозначим множество тех значений $\alpha$, при которых форма $Q(x, \alpha)$ положительно определена в области $C$. Симметрическую матрицу будем называть положительно определенной в области $C$, если в этой области положительно определена соответствующая квадратичная форма.

Очевидно, что $r \subseteq \rho$. Оба эти множества незамкнуты. Сформулируем и докажем утверждения о строечии множеств $r$ и $\rho$.

*Лемма* 2. Множество $\rho$ есть открытый интервал вида $(\rho_1, \rho_2)$. Если $B \neq 0$, то возможны случаи: а) $\rho_1 > -\infty$, $\rho_2 < +\infty$; б) $\rho_1 = -\infty$, $\rho_2 < +\infty$; в) $\rho_1 > -\infty$, $\rho_2 = +\infty$. То же относится и к множеству $r = (r_1, r_2)$.

*Доказательство.* Докажем утверждения леммы о множестве $\rho$. Утверждения о множестве $r$ доказываются аналогично. Предположим, что $\rho$ отрезком не является. Тогда найдутся такие числа $\alpha < \beta < \gamma$, что $\alpha, \gamma \in \rho$ и $\beta \in \rho$. Следовательно, для некоторого $x' \in C$ ($x' \in R^n$ для случая $r$) выполняется неравенство $Q(x', \beta) \leqslant 0$. Так как $Q(x', \alpha) > 0$, то из (2.2) при учете $\beta - \alpha > 0$ следует $(x', Bx') < 0$, что противоречит условию $\gamma \in \rho$, поскольку

$$Q(x', \gamma) = Q(x', \beta) + (\gamma - \beta)(x', Bx') < 0$$

Если матрица $B$ ненулевая, то отрезок $\rho$ не совпадает со всей числовой осью. Лемма доказана.

Через $\bar{\rho}$ и $\bar{r}$ обозначим замыкания множеств $\rho$ и $r$. Если $\alpha \notin \bar{\rho}$, то найдется такой вектор $x'$, что $Q(x', \alpha) < 0$. Из лемм 1 и 2 следует

*Теорема* 3. Пусть функция $\Pi(q, \alpha)$ аналитична в некоторой окрестности $D$ точки $q^* = (0, \ldots, 0, q^*_{m+1}, \ldots, q^*_n) \in D$, в точке $q^*$ выполнено условие (1.4) для всех $\alpha \in \in R$, квадратичная форма в разложении (2.1) имеет вид (2.2) и $B \neq 0$. Тогда найдется такой интервал $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, что при $\alpha \in \rho$ функция $\Pi(q, \alpha)$ имеет в точке $q^*$ строгий локальный минимум в области $C \cap D$, а при $\alpha \notin \rho$ локальный минимум в точке $q^*$ отсутствует.

При $\alpha \in \rho \cap R$ теорема 1 гарантирует устойчивость по Ляпунову положения равновесия $q^*$, а теорема 2 при $\alpha \notin \rho \cap R$ – неустойчивость $q^*$.

3. Опишем метод определения границ $\rho_1$ и $\rho_2$ интервала положительной определенности пучка квадратичных форм (2.2) в конусе $C$. Введем обозначения: $N = \{1, 2, \ldots \ldots, n\}$, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множества индексов. Для любого подмножества $I \subseteq M$ обозначим: $m(I)$ – количество индексов в множестве $I$, $n(I) = n - m + m(I)$. Для произвольной симметрической матрицы $D$ размера $n \times n$ через $D(I)$ обозначим матрицу размера $n(I) \times n(I)$, полученную из $D$ вычеркиванием строк и столбцов с номерами $i \notin I$.

Пусть $I \subseteq M$, $I \neq 0$ и $E_\alpha \equiv A + \alpha B$. Через $C(I)$ обозначим конус вида $\{x \in \in R^{n(1)} \mid x_i \geqslant 0,\ i \in I\}$ и через $\rho(I) = (\rho_1(I), \rho_2(I))$ – интервал положительной определенности пучка квадратичных форм с матрицей $E_\alpha(I)$ в конусе $C(I)$. Аналогичный смысл имеют обозначения $r(I)$, $r_1(I)$ и $r_2(I)$.

Предлагаемый метод получения интервала $\rho = \rho(M)$ основан на индуктивном понижении размерности и использует результат [6]. Первый шаг индукции дает

*Лемма* 3. Пусть $i \in M$. Для положительной определенности матрицы $E_\alpha(\{i\})$ в конусе $C(\{i\})$ необходимо и достаточно ее положительной определенности во всем пространстве $R^{n(\{i\})}$, т.е. $\rho(\{i\}) = r(\{i\})$.

*Доказательство.* В доказательстве нуждается только необходимость. Предположим, что матрица $E_\alpha(\{i\})$, положительно определенная в конусе $C(\{i\})$, не является положительно определенной в $R^{n(\{i\})}$. Тогда найдется такой вектор $y \in R^{n(\{i\})}$, $y \notin C(\{i\})$, что $\langle y, E_\alpha(\{i\}) y \rangle \leqslant 0$. Это означает, что $y_i < 0$. Но тогда $z = -y \in C(\{i\})$, что противоречит предположению, так как $\langle z, E_\alpha(\{i\}) z\rangle = \langle y, E_\alpha(\{i\}) y\rangle$.

Матрицу $D(I)$ размера $n(I) \times n(I)$ будем называть минимальной относительно множества индексов $I$, если она не является положительно определенной, но все матрицы $D(I \setminus \{i\})$, $i \in I$ положительно определены. При учете введенных обозначений минимальность матрицы $E_\alpha(I)$ относительно множества $I$ означает выполнение условий $\alpha \notin r(I)$ и $\alpha \in r(I \setminus \{i\})$ для всех $i \in I$. Если при данном $\alpha$ матрица $E_\alpha$ не является положительно определенной и матрицы $E_\alpha(\{i\})$ положительно определены при всех $i \in I$ (а это необходимо для положительной определенности матрицы $E_\alpha$ в области $C$ в силу леммы 3), то найдутся множества $I$, относительно которых матрицы $E_\alpha(I)$ минимальны.

Сформулированное ниже утверждение приводится без доказательства, которое почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [6].

*Теорема* 4. Пусть $I \subseteq M$ и $m(I) \geqslant 2$. Тогда для выполнения условия $\alpha \in \rho(I)$ необходимо и достаточно выполнения одного из трех условий: а) $\alpha \in r(I)$, б) $\alpha \notin r(I)$, для всех $i \in I$ $\alpha \in \rho(I \setminus \{i\})$ и хотя бы для одного $i_0 \in I$ $\alpha \notin r(I \setminus \{i_0\})$ (т.е. матрица $E_\alpha(I)$ не минимальна относительно $I$), в) матрица $E_\alpha(I)$ минимальна относительно $I$ и какой-нибудь (любой) вектор $y \neq 0$, удовлетворяющий условиям $Q(y, \alpha) \leqslant 0$, $y_i = 0$ при $i \notin I$, имеет среди компонент $y_i$, $i \in I$ компоненты разного знака.

*Замечание.* Если матрица $E_\alpha(I)$ минимальна относительно $I$, то в силу определения она не является положительно определенной и вектор $y$, доставляющий квадратичной форме $Q(x, \alpha)$ неотрицательное значение и удовлетворяющий условиям $y_i = 0$ при $i \in I$, всегда можно найти. Если при некотором $\alpha$ матрица $E_\alpha(I)$ минимальна относительно $I$, то выполняется хотя бы одно из условий

$$r_1(I) > \max_{i \in I} r_1(I \setminus \{i\}) \tag{3.1}$$

$$r_2(I) < \min_{i \in I} r_2(I \setminus \{i\}) \tag{3.2}$$

Пусть для определенности выполнено условие (3.1). По определению $r_1(I)$ матрица $E_\alpha(I)$ положительно определена для $\alpha = r_1(I) + \epsilon$ при достаточно малых $\epsilon > 0$ и не является положительно определенной при $\alpha < r_1(I)$. Значит, при $r_1(I) \neq -\infty$, найдется вектор $y \neq 0$, удовлетворяющий условиям $Q(y, r_1(I)) = 0$ и $y_i = 0$ при $i \notin I$. Этот вектор есть решение системы линейных уравнений

$$\sum_{j \in N \setminus M \cup I} (a_{ij} + \alpha b_{ij}) x_j = 0, \quad i \in N \setminus M \cup I \tag{3.3}$$

$$x_i = 0, \quad i \in M \setminus I$$

при $\alpha = r_1(I)$, где $a_{ij}$ и $b_{ij}$ – элементы матриц $A$ и $B$. Поскольку для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеем $Q(y, r_1(I) + \epsilon) > 0$, то $(y, By) < 0$ и, следовательно, $Q(y, \alpha) < 0$ для любых $\alpha < r_1(I)$. Таким образом, если выполняется условие (3.1), а вектор $y \neq 0$ удовлетворяет условию (3.3), то вектор $y$ может использоваться при проверке условия в теоремы 4 для любых $r_1(I) < \alpha < \max_{i \in I} r_1(I \setminus \{i\})$. Наличие у вектора $y$ компонент разного знака означает, что $y \neq 0$ и $y \notin C \cup (-C)$, где $-C = \{z \mid -z \in C\}$.

Если выполняется (3.2), то, заменив в (3.3) $\alpha$ на $r_2(I)$, получим вектор $y \neq 0$, удовлетворяющий условиям $y_i = 0$ при $i \notin I$ и $Q(y, r_2(I)) = 0$ и $Q(y, \alpha) < 0$ при $\max_{i \in I} r_2(I \setminus \{i\}) < \alpha < r_2(I)$.

Если $r_1(I) > -\infty$, то уравнения (3.3) имеют при $\alpha = r_1(I)$ нетривиальные решения. Обозначим через $y_1(I)$ любое из них. Аналогично через $y_2(I)$ обозначим произвольное нетривиальное решение системы (3.3) при $\alpha = r_2(I)$, если $r_2(I) < +\infty$. Для тех $I \subseteq M$, которые содержат не менее двух индексов, обозначим

$$r_1'(I) = \max_{i \in I} r_1(I \setminus \{i\}), \qquad \rho_1'(I) = \max_{i \in I} \rho_1(I \setminus \{i\})$$

Из теоремы 4 и замечания к ней следуют рекуррентные соотношения для последовательного определения значений $\rho_k(I)$, $k = 1, 2$, $I \subseteq M$.

Для любого $i = 1, \ldots, m$ имеем $\rho_1(\{i\}) = r_1(\{i\})$. Пусть $m(I) \geqslant 2$. Тогда, если $r_1(I) = \rho_1'(I)$, то $\rho_1(I) = \rho_1'(I)$. Если же $r_1(I) > \rho_1'(I)$, то

$$\rho_1(I) = \begin{cases} r_1(I), & \text{если } r_1'(I) = \rho_1'(I) > -\infty \text{ и } y_1(I) \in C \cup (-C) \\ \rho_1'(I) & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{3.4}$$

Аналогично для любого $i = 1, \ldots, m$ $\rho_2(\{i\}) = r_2(\{i\})$. Пусть $m(I) \geqslant 2$. Если $r_2(I) = \rho_2'(I)$, то $\rho_2(I) = \rho_2'(I)$. Если же $r_2(I) < \rho_2'(I)$, то

$$\rho_2(I) = \begin{cases} r_2(I), & \text{если } r_2'(I) = \rho_2'(I) < +\infty \text{ и } y_2(I) \in C \cup (-C) \\ \rho_2'(I) & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{3.5}$$

$$r_2' = \min_{i \in I} r_2(I \backslash \{i\}), \qquad \rho_2' = \min_{i \in I} \rho_2(I \backslash \{i\})$$

4. Предложенный метод позволяет определить по индукции значения $\rho_1(M)$, $\rho_2(M)$ границ интервала положительной определенности пучка квадратичных форм (2.2) в

| $I$ | $r(I)$ | $y_1(I)$ | $y_2(I)$ | $\rho(I)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\{1\}$ | $(-\infty; 2)$ | – | – | $(-\infty; 2)$ |
| $\{2\}$ | $(-3; \infty)$ | – | – | $(-3; \infty)$ |
| $\{3\}$ | $(-\infty; 1{,}5)$ | – | – | $(-\infty; 1{,}5)$ |
| $\{4\}$ | $(-3; \infty)$ | – | – | $(-3; \infty)$ |
| $\{1, 2\}$ | $(-2{,}86; 1{,}86)$ | $[1; -7{,}29]$ | $[1; -0{,}21]$ | $(-3; 2)$ |
| $\{1, 3\}$ | $(-\infty; 1{,}5)$ | – | – | $(-\infty; 1{,}5)$ |
| $\{1, 4\}$ | $(-2{,}39; 1{,}39)$ | $[1; 3{,}28]$ | $[1; 0{,}46]$ | $(-2{,}39; 1{,}39)$ |
| $\{2, 3\}$ | $(-2{,}5; 1)$ | $[1; 0{,}25]$ | $[1; 2]$ | $(-2{,}5; 1)$ |
| $\{2, 4\}$ | $(-3; \infty)$ | – | – | $(-3; \infty)$ |
| $\{3, 4\}$ | $(-2{,}89; 1{,}39)$ | $[1; -9{,}0]$ | $[1; -0{,}21]$ | $(-3; 1{,}5)$ |
| $\{1, 2, 3\}$ | $(-2{,}32; 0{,}89)$ | $[-0{,}6; 3{,}8; 1]$ | $[-0{,}37; 0{,}61; 1]$ | $(-2{,}5; 1)$ |
| $\{1, 2, 4\}$ | $(-2{,}21; 1{,}21)$ | $[0{,}4; -0{,}5; 1]$ | $[2{,}1; -0{,}5; 1]$ | $(-2{,}39; 1{,}39)$ |
| $\{1, 3, 4\}$ | $(-2{,}23; 1{,}08)$ | $[0{,}3; -0{,}13; 1]$ | $[0{,}72; -1{,}19; 1]$ | $(-2{,}39; 1{,}39)$ |
| $\{2, 3, 4\}$ | $(-2{,}35; 0{,}85)$ | $[3{,}1; 1; -1{,}53]$ | $[0{,}52; 1; -0{,}26]$ | $(-2{,}5; 1)$ |
| $\{1, 2, 3, 4\}$ | $(-1{,}27; 0)$ | $[0{,}6; -0{,}95; -0{,}53; 1]$ | $[1; -1; -1; 1]$ | $(-2{,}39; 1)$ |

конусе $C$ в предположении, что известны $r_1(I)$ и $r_2(I)$ для всех $I \subseteq M$. Рассмотрим метод определения чисел $r_1(I)$ и $r_2(I)$. Пусть $I \subseteq M$, $m(I) < m$ и числа $r_1(I), r_2(I)$ известны. Если $\alpha \in (r_1(I), r_2(I))$, то симметрические матрицы $E_\alpha(I)$ размера $n(I) \times n(I)$ положительно определены. Тогда в соответствии с критерием Сильвестра для любого $J = I \cup \{i\}$, $i \in M \backslash I$ матрица $E_\alpha(J)$ положительно определена тогда и только тогда, когда положительно определена матрица $E_\alpha(I)$ и выполняется условие $\det E_\alpha(I) > 0$. Поскольку в силу леммы 2 множества $r(I)$ и $r(J)$ являются интервалами и выполняется включение $r(J) \subset r(I)$, то интервал $r(J)$ выделяется из интервала $r(I)$ одним или двумя корнями уравнения $\det E_\alpha(J) = 0$, принадлежащими интервалу $r(I)$, и условием $\det E_\alpha(J) > 0$ при $\alpha \in r(J)$.

Если $m = n$, то для любого $i \in M$ матрицы $E_\alpha(\{i\})$ являются числами и интервал $r(\{i\})$ определяется из условия $a_{ii} + \alpha b_{ii} > 0$. При этом либо $r_1(\{i\}) = -\infty$, либо $r_2(\{i\}) = +\infty$. Все остальные $r(I)$ определяются по индукции, как показано выше. Если же $m < n$, то отрезок $r(\phi)$ определяется также по индукции последовательным окаймлением, начиная с произвольного индекса $i \in N \backslash M$, исходя из приведенных выше соображений.

5. В качестве примера рассмотрим систему на фиг 2. Требуется найти интервал частот вращения $\omega$, при которых теоремы 1, 2 гарантируют устойчивость состояния равновесия $q_1^* = q_2^* = q_3^* = q_4^* = 0$. Считая в формуле (1.5) $\alpha = \omega^2$, получим выражения для матриц $A$ и $B$ в разложении (2.1), (2.2).

$$A = \begin{Vmatrix} \kappa_{12} + \kappa_{14} & \kappa_{12} & 0 & -\kappa_{14} \\ \kappa_{12} & \kappa_{12} + \kappa_{23} & -\kappa_{23} & 0 \\ 0 & -\kappa_{23} & \kappa_{23} + \kappa_{34} & \kappa_{34} \\ -\kappa_{14} & 0 & \kappa_{34} & \kappa_{14} + \kappa_{34} \end{Vmatrix}$$

$$B = \operatorname{diag}\{-m_1 l_1^2, m_2 l_2^2, -m_3 l_3^2, m_4 l_4^2\}$$

Пусть $\kappa_{12} = \kappa_{34} = 1$, $\kappa_{23} = \kappa_{14} = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$, $m_1 = 1{,}5$; $m_2 = m_4 = 1$, $m_3 = 2$. Интервалы $r(I)$ определены способом, изложенным в разд. 4. Интервалы $\rho(I)$ установлены в соответствии с соотношениями (3.4), (3.5). Результаты вычислений представлены в таблице, третий и четвертый столбцы которой содержат векторы $y_1(I)$ и $y_2(I)$. Для $I = \{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ и $\{4\}$ эти векторы не определялись, поскольку $m(I) = 2$. Для подмножеств $I = \{1, 3\}$ и $\{2, 4\}$ $y_1(I)$ и $y_2(I)$ не определялись, поскольку выполнялись условия $r_k(I) = \rho_k'(I)$ $k = 1, 2$. Итак, $\rho = \rho(M) = (-2{,}5;\ 1)$. Так как $\alpha$ имеет смысл $\omega^2$, то $R = [0, +\infty)$. Теорема 1 гарантирует устойчивость положения равновесия $q^*$ при $0 \leqslant \omega < 1$ и теорема 2 гарантирует неустойчивость $q^*$ при $\omega > 1$.

Автор благодарит Е.С. Пятницкого за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.М.* Сборник задач по аналитической механике. М.: Наука, 1980. 320 с.
3. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
5. *McCormick G.P.* Second order conditions for constrained minima // SIAM J. Appl. Mathematics. 1967. V. 15. № 3. P. 641–652.
6. *Рапопорт Л.Б.* Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 674–679.


Москва

Поступила в редакцию 21.V.1991