Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

 Д.В. Трещев

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Изучается явление мягкой и жесткой потери устойчивости положений равновесия и периодических траекторий в типичных однопараметрических семействах гамильтоновых систем.

1. Положение равновесия. Основную информацию об устойчивости положения равновесия несет спектр S матрицы линеаризации системы. В гамильтоновых системах множество $S \subset \mathbf{C}$ симметрично относительно действительной и мнимой осей. Элементы множества S являются корнями характеристического полинома $f(\lambda^2)$ и называются характеристическими числами положения равновесия.

Пусть имеется однопараметрическое семейство автономных гамильтоновых систем с n степенями свободы, фазовым пространством M и функциями Гамильтона H_ϵ; ϵ – параметр, принимающий значения в окрестности нуля. Пусть $x(\epsilon) \in M$ – гладкое семейство положений равновесия. Пусть характеристические числа положения равновесия $x(0)$ имеют вид $\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_n$, где величины $\omega_1, \ldots, \omega_n$ вещественны и отличны от нуля. Предположим, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и частоты $|\omega|, |\omega_3|, \ldots, |\omega_n|$ попарно различны; при переходе ϵ через нуль две пары мнимых характеристических чисел положения равновесия $x(\epsilon)$ сталкиваются в точках $\pm i\omega$ и начинают образовывать четверку $\pm\alpha\pm i\beta$, $\alpha\beta \neq 0$. Отметим, что необходимым условием такой бифуркации является наличие у жордановой формы матрицы линеаризации системы в положении равновесия $x(0)$ пары жордановых клеток.

При сделанных предположениях для малых по модулю отрицательных ϵ положения равновесия $x(\epsilon)$ устойчивы в линейном приближении. При переходе параметра ϵ через нуль они теряют устойчивость. Можно показать, что в типичных однопараметрических семействах гамильтоновых систем потеря устойчивости положения равновесия происходит лишь таким образом.

Может показаться, что положение равновесия теряет устойчивость, если два мнимых характеристических числа $\pm i\omega$ сталкиваются в нуле и затем расходятся по действительной оси. Однако такой бифуркации, как правило, не происходит, так как в момент столкновения характеристических чисел положение равновесия сталкивается с другим положением равновесия, становится вырожденным и при дальнейшем изменении параметра исчезает [1]. Положение равновесия может не исчезнуть, если система обладает определенной симметрией.

Назовем всякое соотношение вида

$$k\omega + k_3\omega_3 + \ldots + k_n\omega_n = 0$$

с целыми $k, k_3, \ldots, k_n$ резонансом порядка $|k| + |k_3| + \ldots + |k_n|$.

Пусть D_ϵ – дискриминант характеристического полинома $f_\epsilon(\lambda^2)$ положения равновесия $x(\epsilon)$, $U_{\epsilon,\alpha}$, $(\alpha > 0)$ – семейство окрестностей вида

$$U_{\epsilon,\alpha} = \{x \in M: \operatorname{dist}(x, x(\epsilon)) < \alpha\}$$

где расстояние берется в какой-нибудь римановой метрике на M.

Лемма 1. Пусть частоты $\omega, \omega_3, \ldots, \omega_n$ не удовлетворяют резонансам порядков меньших или равных четырем и $dD_\epsilon/d\epsilon|_{\epsilon=0} \neq 0$. Тогда для каждого ϵ из некоторой окрестности нуля в окрестности точки $x(\epsilon)$ на M можно выбрать локальные канонические координаты p, q, y, x; $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-2})$, $x = (x_1, \ldots, x_{n-2})$, такие, что

а) пары переменных p и q; y и x канонически сопряжены;

б) точка $x(\epsilon)$ имеет нулевые координаты;

в) справедливо равенство

$$H_\epsilon = G(p, q, \epsilon) + \sum_{k=1}^{n-2} G_k(y_k, x_k, \epsilon) + G'(p, q, y, x, \epsilon) \tag{1.1}$$

где

$$G = (\omega + \epsilon\omega'(\epsilon))(p_2q_1 - p_1q_2) + 2p^2 - \epsilon g(\epsilon)\, q^2/2 +$$
$$+ q^2[Aq^2 + B(p_2q_1 - p_1q_2) + Cp^2], \quad g(0) > 0 \tag{1.2}$$

$$G_k = (\omega_{k+2} + \epsilon\omega'_{k+2}(\epsilon))(y_k^2 + x_k^2)/2 + A_k(y_k^2 + x_k^2)^2 \tag{1.3}$$

$$G' = \epsilon O_4 + O_5, \quad O_l = O_l(p, q, y, x); \quad p^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad q^2 = q_1^2 + q_2^2$$

(O_l — функция, ряд Маклорена которой начинается с членов степени не ниже l).

Замечания. 1°. В случае $n = 2$ функции G_k и переменные y, x в гамильтониане H_ϵ отсутствуют.

2°. Условия леммы 1, а также неравенства $A \neq 0$, $A_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-2$ являются условиями общего положения, т.е. выполняются для типичных однопараметрических семейств H_ϵ.

3°. Характеристические числа положения равновесия $x(\epsilon)$ имеют вид

$$\pm i\omega_1(\epsilon), \ldots, \pm i\omega_n(\epsilon)$$

$$\omega_k^2(\epsilon) = (\omega + \epsilon\omega')^2 \pm [-8\epsilon g(\epsilon)(\omega + \epsilon\omega')^2 - 16\epsilon^2 g^2(\epsilon)]^{1/2}, \quad k = 1, 2$$

$$\omega_k(\epsilon) = \omega_k + \epsilon\omega'_k(\epsilon), \quad k = 3, \ldots, n$$

4°. Без ограничения общности можно заменить A на $\operatorname{sgn} A/8$.

5°. Если $n = 2$ и $A \neq 0$, то при малых по модулю отрицательных ϵ положения равновесия $x(\epsilon)$ устойчивы по Ляпунову.

6°. Если $n > 2$, $A \neq 0$ и $A_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n-2$, то при малых по модулю отрицательных ϵ положения равновесия $x(\epsilon)$ метрически устойчивы в том смысле, что для любого $\beta > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что решения с начальными условиями на множестве $V_{\epsilon,\alpha} \subset U_{\epsilon,\alpha}$ вечно остаются в окрестности $U_{\epsilon,\beta}$, причем

$$\lim_{\beta\to 0} \mu(V_{\epsilon,\alpha})/\mu(U_{\epsilon,\alpha}) = 1$$

где $\mu(W)$ — мера множества W.

Сформулируем основную теорему о потере устойчивости положения равновесия.

Теорема 1. Пусть при изменении параметра ϵ положение равновесия аналитической гамильтоновой системы теряет устойчивость согласно описанному выше сценарию и выполняются условия леммы 1. Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. Если постоянная A в формуле (1.2) отрицательна, то при переходе параметра ϵ через нуль происходит жесткая потеря (метрической) устойчивости: для любого малого $\epsilon \geqslant 0$ существует множество $G_\epsilon^u \subset M$, такое, что для любого $\alpha > 0$ решения с начальными условиями из $G_\epsilon^u \cap U_{\epsilon,\alpha}$ выходят за пределы окрестности U_{ϵ,α_0}, где $\alpha_0 > 0$ не зависит от ϵ, α, причем для $\alpha < c*$

$$\mu(G_\epsilon^u \cap U_{\epsilon,\alpha})/\mu(U_{\epsilon,\alpha}) \geqslant c > 0 \tag{1.4}$$

и постоянные $c, c*$ не зависят от ϵ.

2°. Если $A > 0$ и $n = 2$, то при переходе ϵ через нуль происходит мягкая потеря устойчивости: при малых $\epsilon \geqslant 0$ решения с начальными условиями в $U_{\epsilon,\alpha}$, $0 < \alpha < \alpha'$ вечно остаются в окрестности $U_{\epsilon,c'\sqrt{\epsilon+\alpha}}$, где постоянные c', α' не зависят от ϵ.

3°. Если $A > 0$ и $A_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n-2$; $n \geqslant 3$, то при переходе ϵ через нуль происходит мягкая потеря метрической устойчивости: при малых $\epsilon \geqslant 0$ существуют множества G^s_ϵ такие, что решения с начальными условиями в $G^s_\epsilon \cap U_{\epsilon,\alpha}$ вечно остаются в окрестности $U_{\epsilon,c'\sqrt{\epsilon+\alpha}}$, причем

$$\lim_{(\epsilon+\alpha)\to 0} \mu(G^s_\epsilon \cap U_{\epsilon,\alpha})/\mu(U_{\epsilon,\alpha}) = 1$$

и постоянная c' не зависит от ϵ.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 1, то при $n = 2$, $\epsilon = 0$, $A > 0$ положение равновесия устойчиво по Ляпунову; при $n = 3$, $A > 0$ и $A_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-2)$ положение равновесия $x(0)$ метрически устойчиво.

Неформально говоря, теорема 1 утверждает, что для рассматриваемой бифуркации существует два сценария потери устойчивости. При $A < 0$ устойчивость теряется сразу: при $\epsilon \geqslant 0$ решения, близкие к положению равновесия, уходят за пределы окрестности порядка единицы. При $A > 0$ неустойчивость развивается постепенно и практически не чувствуется при малых $\epsilon > 0$.

Замечания. 1°. Термин "метрическая устойчивость" введен В.И. Арнольдом [2]. Эффекты жесткой и мягкой потери устойчивости положений равновесия систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, впервые начали изучаться Пуанкаре и А.А. Андроновым.

2°. Была доказана [3] формальная устойчивость положения равновесия при $n = 2$, $\epsilon = 0$, $A > 0$, а также неустойчивость положения равновесия $x(0)$ при $n = 2$, $A < 0$.

3°. Доказывалась [4, 5] устойчивость по Ляпунову положения равновесия при $n = 2$, $\epsilon = 0$, $A > 0$, причем в доказательстве [4] содержится ошибка: неправильно вычислен интеграл, вводящий переменную действие.

4°. По-видимому, в соотношении (1.4) можно положить $c = 1$.

Рассмотрим плоскую круговую ограниченную задачу трех тел. В безразмерных переменных функция Гамильтона зависит от единственного параметра – массы Юпитера $0 \leqslant \mu \leqslant ½$. При каждом μ система имеет положение равновесия – треугольную точку либрации. Известно, что при $0 \leqslant \leqslant \mu < \mu_1$, $\mu_1(1-\mu_1) = 1/27$, $\mu_1 = 0{,}03852\ldots$ положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Более того, для всех μ из интервала $(0, \mu_1)$, кроме двух исключительных, треугольные точки либрации устойчивы по Ляпунову [6]. При переходе параметра μ через значение μ_1 положение равновесия испытывает изучаемую здесь бифуркацию [7]. Положим $\epsilon = \mu - \mu_1$ и применим теорему 1. В данном случае $n = 2$. Так как характеристический полином равен $\lambda^4 + \lambda^2 + 27\mu(1-\mu)/4$, то $d/d\epsilon|_{\epsilon=0} D_\epsilon = -27(1-2\mu_1) < 0$. Было показано [7], что $A = 0{,}603\ldots > 0$. Таким образом, при переходе параметра μ через значение μ_1 происходит мягкая потеря устойчивости треугольной точки либрации.

2. Периодические решения. Устойчивость периодического решения в линейном приближении определяется структурой спектра S^* матрицы монодромии. В гамильтоновых системах множество $S^* \subset \mathbf{C}$ симметрично относительно вещественной оси и единичной окружности, т.е. для всякого $\mu \in S^*$ величины $\bar{\mu}, \mu^{-1}$ и $\bar{\mu}^{-1}$ также лежат в S^*. Элементы множества S^* являются корнями характеристического полинома $f^*(\mu)$ и называются мультипликаторами. Единица всегда является не менее чем двукратным корнем f^*.

Пусть имеется однопараметрическое семейство автономных гамильтоновых систем с n степенями свободы, фазовым пространством M и функциями Гамильтона H^*_ϵ; ϵ – параметр, изменяющийся в окрестности нуля. Пусть $\gamma(\epsilon)$ – гладкое по ϵ семейство периодических решений.

Отметим, что уже в индивидуальной автономной гамильтоновой системе периодические решения образуют семейства, но так как в качестве параметра такого семейства можно, как правило, взять значение энергии, то этот случай легко сводится к предыдущему (к семействам $\gamma(\epsilon)$, H^*_ϵ).

Пусть мультипликаторы периодического решения $\gamma(0)$ имеют вид $\exp(\pm 2\pi i\omega_1), \ldots$ $\ldots, \exp(\pm 2\pi i\omega_n)$, где величины $\omega_1, \ldots, \omega_n$ вещественны, $\omega_n = 1$. Предположим, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и для любых $3 \leqslant l,\ m \leqslant n-1$ имеем

$$\omega \pm \omega_l \notin \mathbf{Z}, \quad \omega_m \pm \omega_l \notin \mathbf{Z}, \quad 2\omega \notin \mathbf{Z}, \quad 2\omega_l \notin \mathbf{Z}$$

Пусть при переходе ϵ через нуль две пары мультипликаторов $\gamma(\epsilon)$, расположенных на единичной окружности плоскости $\mathbf{C}$, сталкиваются в точках $\exp(\pm 2\pi i\omega)$ и сходят с окружности, превращаясь в четверку вида $\exp(\pm\alpha \pm i\beta)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\beta/\pi \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$. Таким образом, при малых по модулю отрицательных ϵ периодические решения $\gamma(\epsilon)$ орбитально устойчивы в линейном приближении; при переходе через нуль они теряют устойчивость.

Назовем всякое соотношение вида

$$k\omega + k_3\omega_3 + \ldots + k_n\omega_n = 0 \tag{2.1}$$

с целыми $k, k_3, \ldots, k_n$ резонансом порядка $|k| + |k_3| + \ldots + |k_{n-1}|$.

Характеристические полиномы $f_\epsilon^*(\mu)$ периодических решений $\gamma(\epsilon)$ возвратные, т.е. $f_\epsilon^*(\mu) = \mu^{2n} f_\epsilon^*(\mu^{-1})$. Кроме того, $f_\epsilon^*(1) = 0$. Следовательно, уравнение $f_\epsilon^*(\mu) = 0$ равносильно уравнению $(\mu - 1)^2 \varphi_\epsilon(\mu + \mu^{-1}) = 0$, где φ_ϵ — полином степени $n-1$. Обозначим символом D_ϵ^* дискриминант полинома φ_ϵ.

Пусть $U_{\epsilon,\alpha}$, $\alpha > 0$ — семейство окрестностей вида

$$U_{\epsilon,\alpha} = \{ x \in M\colon \operatorname{dist}(x, \gamma(\epsilon)) < \alpha \}$$

где расстояние от точки x до кривой $\gamma(\epsilon)$ берется в какой-нибудь римановой метрике на M.

Лемма 2. Пусть частоты $\omega, \omega_3, \ldots, \omega_n$ не удовлетворяют резонансам порядков, меньших или равных четырем и $d/d\epsilon|_{\epsilon=0} D_\epsilon^* \neq 0$. Тогда для каждого ϵ из некоторой окрестности нуля можно выбрать локальные канонические координаты p, q, y, x, s, ψ; $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-3})$, $x = (x_1, \ldots, x_{n-3})$, $\psi = \psi \bmod 2\pi$ такие, что

а) пары переменных p и q, y и x, s и ψ канонически сопряжены;

б) кривая $\gamma(\epsilon)$ задается равенствами $p = q = 0$, $y = x = 0$, $s = 0$;

в) выполняются соотношения

$$H_\epsilon^* = \frac{2\pi}{T(\epsilon)}\Big(-s + G(p,q,\epsilon) + \sum_{k=1}^{n-3} G_k(y_k, x_k, \epsilon)\Big) + G^*$$

$$G^* = \epsilon O_4 + O_5 + O(s^2) + sO_2, \quad O_l = O_l(p,q,y,x)$$

причем функции G, G_k задаются формулами (1.2), (1.3); $T(\epsilon)$ — период решения $\gamma(\epsilon)$.

Замечания. 1°. По смыслу задачи $n \geqslant 3$. В случае $n = 3$ функции G_k и переменные y, x в гамильтониане H_ϵ^* отсутствуют.

2°. Если $A \neq 0$ и $A_k \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n-2$, то при малых по модулю отрицательных ϵ траектории $\gamma(\epsilon)$ орбитально метрически устойчивы в смысле, указанном в замечании 6 к лемме 1.

Теорема 2. Пусть при изменении параметра ϵ периодическая траектория γ аналитической гамильтоновой системы испытывает бифуркацию, описанную в начале разд. 2, и выполняются условия леммы 2. Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. Если постоянная A в гамильтониане G отрицательна, то при переходе параметра ϵ через нуль происходит жесткая потеря метрической орбитальной устойчивости: для любого малого $\epsilon \geqslant 0$ существует множество $G_\epsilon^u \subset M$, такое, что для любого $\alpha > 0$ решения с начальными условиями в $G_\epsilon^u \cap U_{\epsilon,\alpha}$ выходят за пределы окрестности U_{ϵ,α_0}, где $\alpha_0 > 0$ не зависит от ϵ, α, причем для $\alpha < c^*$ имеем $\mu(G_\epsilon^u \cap U_{\epsilon,\alpha})/\mu(U_{\epsilon,\alpha}) \geqslant c > 0$.

2°. Если $A > 0$ и $A_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-2)$, то при переходе ϵ через нуль происходит мягкая потеря устойчивости: при малых $\epsilon \geqslant 0$ существуют множества G_ϵ^s, такие, что решения с начальными условиями в $G_\epsilon^s \cap U_{\epsilon,\alpha}$ вечно остаются в окрестности $U_{\epsilon,c'\sqrt{\epsilon+\alpha}}$, причем

$$\lim_{(\epsilon+\alpha)\to 0} \mu(G_\epsilon^s \cap U_{\epsilon,\alpha})/\mu(U_{\epsilon,\alpha}) = 1$$

и постоянная c' не зависит от ϵ.

Рассмотрим треугольное решение плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел. Задача имеет два параметра: μ – масса Юпитера и e – эксцентриситет эллиптического движения в системе Солнце – Юпитер, гамильтониан H периодически зависит от времени t. Задача приводится к автономной с тремя степенями свободы, если считать t фазовой переменной, ввести канонически сопряженный t импульс s, новое время τ и рассмотреть гамильтониан $H - s$.

Численно была построена [8] область орбитальной устойчивости в линейном приближении треугольного решения на прямоугольнике $\{(\mu, e)\colon 0 \leqslant \mu \leqslant ½,\ 0 \leqslant e \leqslant 1\}$. Одна из компонент Г границы этой области берет начало в точке $(\mu, e) = (\mu_1, 0)$ (см. разд. 1) и идет в область положительных значений e. Выход из области устойчивости при изменении параметров вдоль прямой $e = 0$ разобран в разд. 1. При $e = 0$ треугольное решение превращается в точку либрации. Если все-таки рассматривать точки либрации как 2π-периодические решения, то при переходе параметра μ через значение μ_1 происходит бифуркация, рассматриваемая в разд. 2.

Проверим для этого случая выполнение условий теоремы 2. Так как частота ω находится из уравнения $\omega^4 - \omega^2 + ¼ = 0$ (см. разд. 1) и равна $\pm 1/\sqrt{2}$, то резонансы (2.1) отсутствуют. Условие $dD_\epsilon^*/d\epsilon(0) \neq 0$ следует из условия $dD_\epsilon/d\epsilon(0) \neq 0$. Неравенство $A > 0$ также обсуждалось в разд. 1. Следовательно, при $e = 0$ условия теоремы 2 выполнены.

Теперь предположим, что выход из области устойчивости происходит не вдоль прямой $e = 0$, а вдоль некоторой кривой $\sigma = \{\mu(\epsilon), e(\epsilon)\}$, трансверсально пересекающей кривую Г при $\epsilon = 0$ в точке, близкой к точке $(\mu_1, 0)$. По непрерывности условия теоремы 2 выполнены и в этом случае. Таким образом, при изменении параметров μ, e вдоль кривой σ при $\epsilon = 0$ треугольное решение ограниченной плоской эллиптической задачи трех тел испытывает мягкую потерю метрической орбитальной устойчивости.

3. Нормальная форма семейства H_ϵ. Докажем лемму 1 и утверждения из замечаний 4°–6° к ней. Лемма 2 доказывается аналогично с использованием нормальных форм функций Гамильтона в окрестности периодического решения [9].

Доказательство леммы 1 начнем со случая $\epsilon = 0$. Можно считать, что канонические локальные координаты на M уже выбраны так, что положения равновесия $x(\epsilon)$ находятся в нуле. Тогда разложение функции H_ϵ в ряд Маклорена начинается с квадратичных слагаемых (можно считать, что $H_\epsilon(0) = 0$). Квадратичная часть функции H_ϵ при $\epsilon = 0$ приводится к виду [10]

$$H_0^{(2)} = \omega(p_2 q_1 - p_1 q_2) + 2p^2 + \sum_{k=1}^{n-2} \omega_{k+2} \frac{y_k^2 + x_k^2}{2}$$

Используя версальные деформации $H_0^{(2)}$ в классе квадратичных гамильтонианов [1, 11], получаем канонический вид квадратичной части H_ϵ:

$$H_\epsilon^{(2)} = H_0^{(2)} + \epsilon\omega'(\epsilon)(p_2 q_1 - p_1 q_2) - \epsilon g(\epsilon) q^2 + \sum_{k=1}^{n-2} \epsilon\omega'_{k+2}(\epsilon) \frac{y_k^2 + x_k^2}{2}$$

Условие $g(0) > 0$ следует из устойчивости равновесия при $\epsilon < 0$ и неравенства $dD_\epsilon/d\epsilon(0) \neq 0$.

Используя отсутствие резонансов низких порядков между частотами $\omega, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и теорему о нормальной форме гамильтониана, зависящего от параметра [12], приводим H_ϵ к виду

$$H_\epsilon = H_\epsilon^{(2)} + H^{(4)}(p, q) + \sum_{k=1}^{n-2} A_k (y_k^2 + x_k^2)^2 + \epsilon O_4 + O_5$$

где $H^{(4)}$ – однородная форма четвертой степени.

Наконец, канонической заменой переменных, оставляющей на месте y, x и преобразующей только p и q, приводим гамильтониан к виду (1.1) (см. [3]). Лемма доказана.

Утверждение замечания 4 доказывается следующим образом. Замена переменных

$$p' = \alpha p,\ q' = \alpha q,\ y' = \alpha y,\ x' = \alpha x,\quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } A = 0 \\ |8A|^{-1/2}, & \text{если } A \neq 0 \end{cases}$$

оставляет систему гамильтоновой, при этом новый гамильтониан

$$H'_\epsilon(p', q', y', x', \epsilon) = \alpha^2 H_\epsilon(p, q, y, x, \epsilon)$$

будет иметь ту же форму, что и H_ϵ. В функциях G_k, G коэффициенты A_k, B, C домножатся на положительную постоянную и A перейдет в $\operatorname{sgn} A/8$.

Утверждение замечания 5 вытекает из теоремы об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [2, 13].

Метрическая устойчивость в замечании 6 следует из существования в малой окрестности нуля при малых $\epsilon < 0$ у системы с гамильтонианом H_ϵ большого количества инвариантных торов [2].

4. **Бифуркация положений равновесия.** Приведем основные этапы доказательства теоремы 1. Докажем сначала утверждение 1 теоремы 1.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = p_1 q_1 + p_2 q_2 - \sum_{k=1}^{n-2} (y_k^2 + x_k^2)$$

Так как

$$dV/dt = 4p^2 + 2q^2[-2Aq^2 + \epsilon g(\epsilon) + B(p_2 q_1 - p_1 q_2) + 2Cp^2] + \epsilon O_4 + O_5$$

то $dV/dt > 0$ при $A < 0$ и малых $\epsilon \geqslant 0$ в $U^+_{\epsilon,\alpha} = U_{\epsilon,\alpha} \cap \{V > 0\}$. Таким образом, на траектории с начальными условиями в $U^+_{\epsilon,\alpha}$ функция V растет, пока траектория не выйдет из $U_{\epsilon,\alpha}$. Кроме того, $\mu(U^+_{\epsilon,\alpha})/\mu(U_{\epsilon,\alpha}) \geqslant c > 0$, так как множества $\{V > 0\}$ и $U_{\epsilon,\alpha}$ являются соответственно внутренностью конуса и шаром, причем центры симметрии конуса и шара совпадают.

Доказательство утверждений 2°, 3° теоремы 1 начнем с преобразования гамильтониана H_ϵ. Произведем последовательно следующие замены переменных:

$$\begin{aligned} &q = \delta^{1/2} q',\ p = \delta p',\ x = \delta^{3/4}\sqrt{2\eta}\cos\xi,\ y = \delta^{3/4}\sqrt{2\eta}\sin\xi \\ &q'_1 = p''_1 - q''_2,\ q'_2 = p''_2 - q''_1,\ p'_1 = (p''_2 + q''_1)/2,\ p'_2 = (p''_1 + q''_2)/2 \\ &p''_k = \sqrt{2r_k}\sin\varphi_k,\ q''_k = \sqrt{2r_k}\cos\varphi_k,\ k = 1, 2 \\ &\rho_1 = r_1,\ \rho_2 = -r_1 + r_2,\ \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2,\ \psi_2 = \varphi_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

(При последних трех заменах переменные η, ξ не образуются).

В результате получаем гамильтонову систему с гамильтонианом $H_{\epsilon,\delta}(\rho, \psi, \eta, \xi) = \delta^{-3/2} H_\epsilon(p, q, y, x)$.

Прежде чем записать функцию $H_{\epsilon,\delta}$ в явном виде, отметим следующее.

1°. Параметр δ в дальнейшем считается заключенным в промежутке

$$0 \leqslant 2\epsilon \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \tag{4.2}$$

где $\delta_0 > 0$ достаточно мал.

2°. Далее считаем, что $g(\epsilon) \equiv 1$, так как в противном случае можно сделать замену параметра $\epsilon \to \epsilon g(\epsilon)$.

3°. При учете неравенства $A > 0$ и замечания 4 к лемме 1 можно положить $A = 1/8$. Итак, имеем

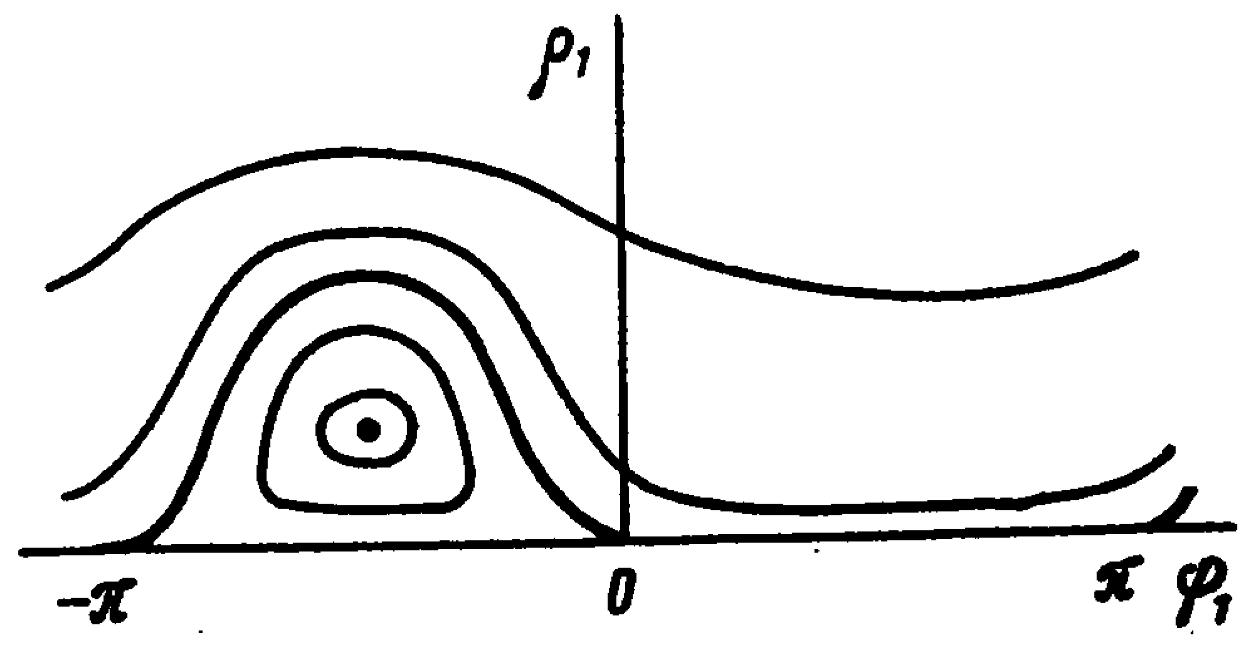
$$H_{\epsilon,\delta} = F_0(\rho_2, \eta, \epsilon) + \delta^{1/2} F_1(\rho, \psi_1, \frac{\epsilon}{\delta}) + \delta F_2(\rho, \psi, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta) + \delta^{3/2} F_3(\eta) + \\ + \delta^2 F_4(\rho, \psi, \eta, \xi, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta)$$

$$F_0 = -\omega\rho_2 + \sum_{k=1}^{n-2} (\omega_{k+2} + \epsilon\omega'_{k+2}(0))\,\eta_k$$

$$F_1 = (1 - \frac{\epsilon}{\delta})(2\rho_1 + \rho_2) + 2(1 + \frac{\epsilon}{\delta})\sqrt{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)}\sin\psi_1 +$$

$$\frac{1}{2}(2\rho_1 + \rho_2 - 2\sqrt{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)}\sin\psi_1)^2$$

$$F_3 = \sum_{k=1}^{n-2} 4A_k\eta_k^2$$



Фиг. 1

Гамильтониан $H_{\epsilon,\delta}$ является аналитической функцией переменных

$\sqrt{\rho_1}$, $\sqrt{\rho_1 + \rho_2}$, $\sqrt{\eta_1}, \ldots, \sqrt{\eta_{n-2}}$, ψ, ξ.

Изучаемая система с точностью до членов порядка δ является композицией быстрой (невозмущенной) и медленной системы (гамильтониан которой равен F_1). Анализ функции F_1 требует громоздких рассуждений.

Приведем основные результаты, получающиеся при этом. Гамильтониан F_1 зависит от параметра ρ_2. В дальнейшем достаточно считать, что $-1 \leqslant \rho_2 \leqslant 1$. Более того, так как

$$F_1(\rho_1, \rho_2, \psi_1, \epsilon/\delta) = F_1(\rho_1 + \rho_2, -\rho_2, \psi_1, \epsilon/\delta)$$

то можно рассматривать лишь значения ρ_2 из отрезка $[0, 1]$. Линии уровня функции F_1 при фиксированных $\rho_2 \in [0, 1]$, $\epsilon/\delta \in [0, ½]$ (фазовый портрет медленной системы) изображены на фиг. 1.

Фазовое пространство $\{(\psi_1, \rho_1): \rho_1 \geqslant 0, \ \psi_1 \bmod 2\pi\}$ является замкнутым полуцилиндром. Все непустые некритические уровни $F_1 = \mathrm{const}$ связаны и диффеоморфны окружностям. При каждом значении параметров функция F_1 имеет минимум на оси $\psi_1 = -\pi/2$. Кроме того, имеется еще один критический уровень $F_1 = F_* \equiv (1 - \epsilon/\delta)\rho_2 + \rho_2^2/2$. Он состоит из окружности $\rho_1 = 0$ и особой кривой, примыкающей к окружности в точках $(-\pi, 0)$ и $(0, 0)$ (см. фиг. 1). Так как ψ_1, ρ_1 фактически являются полярными координатами, то окружность $\{\rho_1 = 0, \ \psi_1 \bmod 2\pi\}$ следует считать одной точкой, так что уровень $F_1 = F_*$ также является инвариантной окружностью медленной системы. Введем переменную действие

$$I_1(f, \rho_2, \frac{\epsilon}{\delta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\{F_1 = f\}} \rho_1 d\psi_1 \geqslant 0$$

Пусть $\Phi(\cdot, \rho_2, \epsilon/\delta)$ – функция, обратная к функции $I_1(\cdot, \rho_2, \epsilon/\delta)$ при фиксированных значениях параметров ρ_2, ϵ/δ. В сущности Φ – медленный гамильтониан, выраженный через $I_1, \rho_2, \epsilon/\delta$.

Пусть Z_α, $\alpha > 0$ – множество вида $\{(\psi_1, \rho_1): 0 \leqslant \rho_1 \leqslant \alpha\}$.

Лемма 3. Существуют положительные постоянные c_*, c_2, c_3, c'_3, c_4, такие, что для любых $-1 \leqslant \rho_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant \epsilon/\delta \leqslant 1/2$:

1) подмножество фазового полуцилиндра $X = \{0 \leqslant I_1 \leqslant c_2\}$ удовлетворяет соотношению $Z_1 \subset X \subset Z_{c_*}$

2) для любого $I_1 \in [0, c_2]$ выполняются неравенства

$c_3 \leqslant \partial\Phi/\partial I_1 \leqslant c'_3$, $\quad 0 \not\equiv |\partial^2\Phi/\partial I_1^2| \leqslant c_4$

Пусть I_1, ϑ_1 – переменные "действие – угол" в системе с гамильтонианом F_1. Переход ρ_1, $\psi_1 \to I_1, \vartheta_1$ задается производящей функцией $S(\rho_1, \vartheta_1, \rho_2, \epsilon/\delta)$. Замена переменных $\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2 \to I_1, I_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ при помощи производящей функции $\rho_2\nu_2 + S$ задает переменные действие – угол в системе с гамильтонианом $-\omega\rho_2 + \sqrt{\delta}F_1$. При этом $I_2 = \rho_2$. Гамильтониан $H_{\epsilon,\delta}$ в переменных I, ϑ, η, ξ принимает вид

$$H'_{\epsilon,\delta} = F_0(I_2, \eta, \epsilon) + \delta^{1/2}\Phi(I, \frac{\epsilon}{\delta}) + \delta F'_2(I, \vartheta, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta) + \delta^{3/2} F_3(\eta) + \delta^2 F'_4(I, \vartheta, \eta, \xi, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta)$$

Канонической заменой переменных, оставляющей η, ξ на месте, можно отнести зависимость от переменной ϑ_2 в члены порядка δ^2. Гамильтониан $H'_{\epsilon,\delta}$ при этом преобразуется к виду

$$H''_{\epsilon,\delta} = F_0(I'_2, \eta, \epsilon) + \delta^{1/2}\Phi(I', \frac{\epsilon}{\delta}) + \delta F''_2(I', \vartheta'_1, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta) + \delta^{3/2} F_3(\eta) + \delta^2 F''_4(I', \vartheta', \eta, \xi, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta)$$

Далее подправим переменные I', v' так, чтобы они стали переменными действие – угол в системе с функцией Гамильтона $-\omega I'_2 + \sqrt{\delta}\Phi + \delta F''_2$. Исходный гамильтониан в новых переменных становится следующим:

$$H'''_{\epsilon,\delta} = F_0(I''_2, \eta, \epsilon) + \delta^{1/2}\Phi'(I''_2, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta) + \delta^{3/2} F_3(\eta) + \delta^2 F'''_4(I'', \vartheta'', \eta, \xi, \frac{\epsilon}{\delta}, \delta) \tag{4.3}$$

$$\Phi'(I, \epsilon/\delta, \delta) = \Phi(I, \epsilon/\delta) + O(\delta^{1/2}) \tag{4.4}$$

Система с гамильтонианом (4.3) интегрируема с точностью до $O(\delta^2)$. Невозмущенная система (система с гамильтонианом F_0) вырождена и изоэнергетически вырождена. Однако изоэнергетическое вырождение снимается слагаемыми $\sqrt{\delta}\Phi'$ и $\delta^{3/2} F_3$ для значений I'', при которых $\partial^2\Phi'/\partial I_1^2 \neq 0$. В силу аналитичности Φ' почти все I'' удовлетворяют этому условию.

Пусть $V^\beta_{\epsilon,\delta}$ – окрестность положения равновесия $x(\epsilon)$ следующего вида:

$V^\beta_{\epsilon,\delta} = \{(\rho, \psi, \eta, \xi): |\rho_l| < \beta^2/2, \ |\eta_k| < \beta^2/2, \ l = 1, 2; \ k = 1, \dots, n-2\}$

и $W^\beta_{\epsilon,\delta}$ – замыкание множества точек фазового пространства, лежащих на инвариантных торах $\mathbf{T}_\nu$ системы с гамильтонианом $F_0 + \delta^{1/2}\Phi' + \delta^{3/2} F_3$, таких, что $\mathbf{T}_\nu \cap V^\beta_{\epsilon,\delta} \neq \phi$. Очевидно, для некоторой постоянной $c_5 > 0$ выполняется включение

$$V^1_{\epsilon,\delta} \subset W^1_{\epsilon,\delta} \subset V^{c_5}_{\epsilon,\delta} \tag{4.5}$$

Кроме того, из анализа замены переменных (4.1) $p, q, y, x \to \rho, \psi, \eta, \xi$ следует включение

$$V^{c_6\alpha/\sqrt{\delta}}_{\epsilon,\delta} \subset U_{\epsilon,\alpha} \subset V^{c_7\alpha/\delta}_{\epsilon,\delta}; \quad c_6, c_7 > 0, \quad 0 < \alpha < \text{const}. \tag{4.6}$$

Пусть L_h – уровень энергии $\{H'''_{\epsilon,\delta} = h\}$ и μ_h – мера на L_h, индуцированная какой-нибудь метрикой фазового пространства, например метрикой

$$\sum_{k=1}^{2} (dI_k^2 + d\vartheta_k^2) + \sum_{s=1}^{n-2} (d\eta_s^2 + d\xi_s^2)$$

Лемма 4. Существуют функции $d_k(\delta) \geqslant 0$, $\lim d_k(\delta) = 0$ при $\delta \to 0$, $k = 1, 2$, такие, что для любых ϵ, δ, удовлетворяющих условиям (4.2), большинство торов $\mathrm{T}_\nu \subset W^1_{\epsilon,\delta}$ не разрушается, а переходит в инвариантные торы $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta)$ возмущенной системы (системы с гамильтонианом (4.3)), испытывая при этом деформацию, не превосходящую $d_1(\delta)$, т.е. $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta)$ можно получить из T_ν сдвигом всех его точек не более чем на $d_1(\delta)$. При этом для $h \in [-\omega/4, \omega/4]$ мера множества $X_{\epsilon,\delta} \subset V_{\epsilon,\delta} \cap L_h$, состоящего из точек, не лежащих на инвариантных торах невозмущенной системы, не превосходит $d_2(\delta)\,\mu(V_{\epsilon,\delta} \cap L_h)$.

Лемма 4 доказывается с помощью стандартной техники теории КАМ. Аналогичные результаты были получены ранее, например [14]. Доказательство леммы опирается на равномерные оценки для производных функций Φ' типа оценок, полученных в лемме 3, которые сразу следуют из равенства (4.4). Также используется аналитичность гамильтониана $H'''_{\epsilon,\delta}$ и оценка $|F''_4| < c_8$ в $V^{c_5}_{\epsilon,\delta}$. Определенным препятствием для доказательства леммы является тот факт, что в некоторых точках производная $\partial^2\Phi'/\partial I_1^2$ может обращаться в нуль. Поэтому следует, задавшись постоянной $\gamma > 0$, сначала доказывать сохранение торов T_ν, для которых $|\partial^2\Phi'/\partial I_1^2| \geqslant \gamma$, а затем устремлять γ к нулю. Для перехода на уровень энергии L_h используется изоэнергетическая редукция. Подробное доказательство леммы 4 опускаем.

Пусть $0 < \epsilon < \delta_0/2$ и $0 < \alpha < (\delta_0 - 2\epsilon)/c_9$, где c_9 – положительная постоянная, $c_0 \geqslant \max\{c_7, 2\}$. Положим $\delta = c_9(\alpha + \epsilon)$. Тогда, очевидно, ϵ, δ удовлетворяют условиям (4.2). В силу (4.6) имеем

$$U_{\epsilon,\alpha} \subset V^{c_7\alpha/\delta}_{\epsilon,\delta} \subset V^{c_7/c_9}_{\epsilon,\delta} \subset V^1_{\epsilon,\delta}$$

Более того, если постоянная c_9 достаточно велика, то $|H'''_{\epsilon,\delta}| < \omega/4$ в окрестности $V^{c_7/c_9}_{\epsilon,\delta}$ и можно применить лемму 4.

Утверждение 2 теоремы 1 доказывается теперь следующим образом. Возьмем δ_0 таким малым, что $d_k(\delta) < d_k(\delta_0) < 1/2$, $k = 1, 2$. Тогда на поверхностях L_h, пересекающихся с окрестностью $V^{c_7/c_9}_{\epsilon,\delta}$, расположено большое количество инвариантных торов $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta)$. Так как число степеней свободы n равно двум, то торы $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta)$ делят уровни энергии L_h. Если постоянная c_9 достаточно велика, то любая точка из $V^{c_7/c_9}_{\epsilon,\delta}$ лежит внутри одного из торов вида $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta)$. В силу леммы 4 и включения (4.5) имеем: $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta) \subset V^{c_5+1/2}_{\epsilon,\delta}$, следовательно, решения с начальными условиями в $U_{\epsilon,\alpha}$ не выйдут из окрестности

$$V^{c_5+1/2}_{\epsilon,\delta} \subset U_{\epsilon,(c_5+1/2)\sqrt{\delta}/c_6} = U_{\epsilon,\, c\sqrt{\alpha+\epsilon}}, \quad c = (c_5 + 1/2)\sqrt{c_9}/c_6$$

что и требовалось.

Аналогично докажем утверждение 3 теоремы 1. Рассмотрим произвольную малую величину $\gamma > 0$. Подберем δ_0 так, чтобы выполнялись неравенства $d_k(\delta) < d_k(\delta_0) < \gamma$; $k = 1, 2$. Тогда в окрестности $U_{\epsilon,\alpha}$ содержится множество меры большей, чем $(1 - \gamma)\,\mu(U_{\epsilon,\alpha})$, каждая точка которого лежит на инвариатном торе $\mathrm{T}_\nu(\epsilon, \delta) \subset U_{\epsilon,c\sqrt{\alpha+\epsilon}}$.

Автор благодарит В.В. Козлова и М.Б. Севрюка за многочисленные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
2. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91–192.
3. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 791–799.
4. *Сокольский А.Г.* Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс // Письма в астрон. журн. 1978. Т. 4. № 3. С. 148–152.

5. *Ковалев А.М., Чудненко А.Н.* К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 11. С. 1010–1013.
6. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
7. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 24–33.
8. *Маркеев А.Г., Сокольский А.Г.* Численное исследование устойчивости лагранжевых решений эллиптической ограниченной задачи трех тел // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 49–55.
9. *Брюно А.Д.* Нормализация системы Гамильтона вблизи инвариантного цикла или тора // Успехи. Мат. Наук. 1989. Т. 44. Вып. 2. С. 49–78.
10. *Williamson J.* On an algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // Amer. J. Math. 1936. V. 58. № 1. P. 141–163.
11. *Галин Д.М.* Версальные деформации линейных гамильтоновых систем // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 1. С. 63–74.
12. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы Гамильтона // Успехи. Мат. Наук. 1988. Т. 43. № 1. С. 23–56.
13. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
14. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.

Москва

Поступила в редакцию
6.VI.1991