Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. С.П. Сосницкий

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПУАССОНУ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

Исследуется задача об устойчивости по Пуассону обратимых систем, не обладающих инвариантным фазовым объемом, примером которых служат, в частности, неголономные системы. Предлагаются критерии устойчивости по Пуассону таких систем, а также обсуждаются вопросы существования для них интегральных инвариантов.

1. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in C^1(D(\mathbf{x}) \subset R^n)$, область $D(\mathbf{x})$ является инвариантным множеством, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$, $t \in R$

Как известно [1, 2], для объема v области $\Delta \subset D$:

$$v = \operatorname{mes}(\Delta) = \int_\Delta dx, \qquad \Delta(t = 0) = \Delta_0$$

в соответствии с теоремой Лиувилля справедливо соотношение

$$\frac{dv}{dt} = \int_\Delta \operatorname{div} \mathbf{X}\, dx, \quad dx = dx_1 \ldots dx_n$$

и, в частности, если $\operatorname{div} \mathbf{X} \equiv 0$, то объем v является инвариантом системы (1.1)

$$\int_\Delta dx = \int_{\Delta_0} dx$$

и к ней применимы методы эргодической теории [3]. Похожая ситуация возникает и в том случае, если $\operatorname{div} \mathbf{X} \not\equiv 0$ и система (1.1) допускает инвариант [1]

$$v^* = \operatorname{mes}(\Delta) = \int_\Delta \rho(\mathbf{x})\, dx \tag{1.2}$$

где $\rho(\mathbf{x}) \in C^1(D(\mathbf{x}) \subset R^n)$ – положительная функция, удовлетворяющая уравнению Лиувилля [1]

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{X}) = 0 \tag{1.3}$$

К сожалению, решение $\rho(\mathbf{x}) \in C^1(D(\mathbf{x}))$ уравнения (1.3) существует не всегда [4, 5]. Поэтому в дальнейшем представляет интерес выделить класс систем с эргодическими свойствами, в частности, устойчивых по Пуассону [1, с. 363], не связывая данный вопрос с существованием интегрального инварианта вида (1.2).

Лемма 1. Пусть $\Omega \subseteq D(\mathbf{x})$ – ограниченная инвариантная область системы (1.1). Если

$$\sup_{t \in R} \left| \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}(\tau))\, d\tau \right| < \infty \tag{1.4}$$

$\forall\, \gamma = \{\mathbf{x}(t) : t \in R\} \subset \Omega$, то почти все траектории $\gamma \subset \Omega$ устойчивы по Пуассону.

Доказательство. Дополним систему (1.1) уравнением

$$dx_{n+1}/dt = -x_{n+1}\operatorname{div}\mathbf{X}(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

представляя далее ее в форме

$$\mathbf{x}^{\cdot *} = \mathbf{X}^*(\mathbf{x}^*) \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x}^* = (x_1, \ldots, x_{n+1})^T$, $\mathbf{X}^*(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{X}, -x_{n+1}\operatorname{div}\mathbf{X})^T \in D \times R$. Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{X}^*(\mathbf{x}^*) \equiv 0$, то фазовый объем системы (1.6) является инвариантом.

Система (1.1) как составная часть (1.6) отделяется. Полагая, что ее решение

$$\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0) \in C^{(1,1)}_{t,\mathbf{x}_0}, \qquad \mathbf{x}_0 \in D \tag{1.7}$$

известно, проинтегрируем уравнение (1.5). В результате получаем

$$x_{n+1}(t) = x_{n+1}(0)\exp\left(-\int_0^t (\operatorname{div}\mathbf{X}|_{\mathbf{x}=\varphi(\tau,\mathbf{x}_0)})\, d\tau\right) \tag{1.8}$$

Из (1.7), (1.8) следует, что $x_{n+1} \in C_{x_0}$, и решение (1.6)

$$\mathbf{x}^* = \psi(t, \mathbf{x}_0^*), \quad \mathbf{x}_0^* \in D \times R_{x_{n+1}}, \quad t \in R$$

является потоком ([6], с. 48, см. также [1], с. 346).

Так как согласно условию леммы решение $x_{n+1}(t)$ ограничено $\forall \gamma \subset \Omega$, $x_{n+1}(0) < \infty$, то тем самым ограничено инвариантное множество (1.6)

$$\Omega^* = \Omega \times x_{n+1}, \; x_{n+1}(0) \in]0, \; b[, \; 0 < b < \infty$$

Множество Ω^* имеет положительную лебегову меру в R^{n+1}. Поэтому согласно теореме Пуанкаре о возвращении [1–3, 7] почти все траектории $\gamma^* \subset \Omega^*$ устойчивы по Пуассону. Отсюда учитывая равенство [8, с. 310]

$$\operatorname{mes}\Omega^* = \operatorname{mes}_{R^n}(\Omega)\operatorname{mes}_R(x_{n+1})$$

делаем вывод об устойчивости по Пуассону почти всех траекторий $\gamma \subset \Omega$ в смысле лебеговой меры, отнесенной к Ω. Лемма 1 доказана.

Следствие. Заключение леммы 1 остается справедливым, если неравенство (1.4) выполняется с точностью до множества траекторий, имеющего лебегову меру нуль.

Эта лемма, если рассматривать ее как достаточный критерий устойчивости по Паусcону, не конструктивна. Поэтому представляет интерес указать класс систем, для которых вывод об устойчивости по Пуассону можно сделать, не располагая явным выражением $\operatorname{div}\mathbf{X}(\mathbf{x}(t))$ на решениях системы (1.1). Оказывается, что такой класс составляют обратимые системы.

2. Рассмотрим голономную обратимую систему ([9], с. 83)

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{\cdot\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \in C^1(D(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \subset R^{2n}) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Представляя (2.1) в форме уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.2}$$

видим, что замена в них t на $(-t)$ эквивалентна замене $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \to (\mathbf{x}, -\mathbf{y})^T$. Стало быть, в качестве следствия из обратимости вытекает: каждому ограниченному (неограниченному) решению системы (2.2) при $t \in R^+ = [0, \infty[$ можно поставить в соответствие (посредством правила $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \to (\mathbf{x}, -\mathbf{y})^T$) ограниченное (неограниченное) решение при $t \in R^- =]-\infty, 0]$.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subseteq D(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \subset R^{2n}$ – ограниченная инвариантная область системы (2.1). Тогда почти все траектории $\gamma \subset \Omega$ устойчивы по Пуассону.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующую лемму.

Лемма 2. В условиях теоремы 1 для почти всех $(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot})^T \subset \Omega$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \in R^+(R^-)} \left| \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i^{\cdot}} \, d\tau \right| < \infty$$

Доказательство. Дополним (2.2) уравнением

$$z^{\cdot} = -z \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.3}$$

представляя полученную систему в форме

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}^{\cdot} = \mathbf{W}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)^T \\ &\mathbf{W} = (\mathbf{F}, -z \operatorname{div} \mathbf{F})^T, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^T \end{aligned} \tag{2.4}$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{W} \equiv 0$, то данная система имеет в качестве инварианта фазовый объем. Так как

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \\ &\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{y} \to (-\mathbf{y})} = -\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

то замена $t \to -t$ в уравнениях (2.4) эквивалентна замене $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \to (\mathbf{x}, -\mathbf{y}, z)$.

Согласно (2.3) имеем равенство

$$z(t) = z(0) \exp(-\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\tau) \tag{2.6}$$

замена в котором t на $(-t)$ с учетом (2.5) эквивалентна замене $\operatorname{div} \mathbf{F}$ на $(-\operatorname{div} \mathbf{F})$.

Поскольку исходная система (2.1) инвариантна относительно замены t на $-t$, следствием чего является возможность свернуть уравнения $\mathbf{x}^{\cdot} = -\mathbf{y}$, $\mathbf{y}^{\cdot} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, полученные из (2.2), заменой t на $(-t)$ снова в (2.1), то преобразованием $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \to (\mathbf{x}, -\mathbf{y})^T$ любая траектория γ системы (2.2) переводится в себя. Поэтому если предположить, что компонента $z(t)$ решения $\mathbf{w}$ системы (2.4) не ограничена при $t \to \infty(-\infty)$, то при $t \to -\infty(\infty)$, согласно (2.6), наоборот, она будет стремиться к нулю.

Пусть ω – образ множества Ω в $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – пространстве, а $\omega^* \subset \omega$ – инвариантное подмножество траекторий (2.2), для которых выполняется равенство

$$\inf_{t \in R^+(R^-)} \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \, d\tau = -\infty \tag{2.7}$$

Предположим, что $\operatorname{mes}(\omega^*) > 0$. Тогда из (2.6), (2.7) следует

$$\lim_{t \to -\infty\,(+\infty)} z(t) = 0, \quad \forall\, (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)^T \in \omega^*$$

независимо от значения $z(0) \in\,]0, b[$, $0 < b < \infty$.

Стало быть,

$$\lim_{t \to -\infty\,(+\infty)} \operatorname{mes}(\omega^* \times z) = \lim_{t \to -\infty\,(+\infty)} \operatorname{mes}_{R^n}(\omega^*) \operatorname{mes}_R(z) = 0$$

что противоречит инвариантности фазового объема системы (2.4). Таким образом, если траектории (2.2), для которых выполняется равенство (2.7), и существуют, то их лебегова мера равна нулю. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1.

На основании леммы 2

$$\sup_{t \in R} \left| \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{x}^{\cdot}(\tau)) \, d\tau \right| < \infty$$

для почти любой траектории $\gamma = \{(\mathrm{x}(t), \mathrm{x}^{\cdot}(t)) : t \in R\} \subset \Omega$. Отсюда и следствия леммы 1 заключаем о справедливости теоремы.

3. Рассмотрим неголономную систему

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} \right) \delta \mathrm{q} = 0, \quad \mathrm{q} \in D \subset R^n \times R^l \tag{3.1}$$

$$\dot{q}_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\mathrm{q}) \dot{q}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, l \tag{3.2}$$

$$L(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) = T(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) - \Pi(\mathrm{q}) = \tfrac{1}{2} \mathrm{q}^{\cdot T} A(\mathrm{q}) \mathrm{q}^{\cdot} - \Pi(\mathrm{q})$$

где $L(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot})$, $b_{ij}(\mathrm{q}) \in C^2_{\mathrm{q}}(D)$, квадратичная форма $\mathrm{q}^{\cdot T} A(\mathbf{0}) \mathrm{q}^{\cdot}$ положительно определена. Предположим вначале, что лагранжиан L и коэффициенты $b_{ij}(\mathrm{q})$ не зависят от координат $q_{n+1}, \ldots, q_{n+l}$. В этом случае система (3.1), (3.2) сводится к уравнениям Чаплыгина [10, 11]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n+i}} \right)^* \beta^i_{jm} \dot{q}_m = 0 \tag{3.3}$$

$$\beta^i_{jm} = \partial b_{ij} / \partial q_m - \partial b_{im} / \partial q_j, \quad j, m = 1, 2, \ldots, n$$

где звездочка означает результат исключения из L и $\partial L / \partial \dot{q}_{n+i}$ обобщенных скоростей $\dot{q}_{n+i}$ при помощи уравнений связей (3.2).

Поскольку квадратичная форма $\mathrm{q}^{\cdot T} A(\mathbf{0}) \mathrm{q}^{\cdot}$ положительно определена, то уравнения (3.3) разрешимы относительно старших производных в некоторой области $D^*(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) \subset R^{2n}$ и сводятся к виду

$$\mathrm{q}^{\cdot\cdot} = \psi(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) = \psi_1(\mathrm{q}) + \psi_2(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) \tag{3.4}$$

где $\psi(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) \in C^1(D^*(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}))$, а функция ψ_2 квадратична относительно $\mathrm{q}^{\cdot}$. Так как $\psi(\mathrm{q}, \mathrm{p}) = \psi(\mathrm{q}, -\mathrm{p})$, то тем самым приходим к обратимой системе вида (2.1).

Теорема 2. Пусть $\Omega \subseteq D^*(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) \subset R^{2n}$ – ограниченная инвариантная область системы (3.3). Тогда почти все траектории $\gamma \subset \Omega$ устойчивы по Пуассону.

Пусть теперь в (3.1), (3.2) отсутствуют ограничения, характерные для систем Чаплыгина. Тогда приходим к более общим уравнениям Воронца [12, 13]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L^*}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L^*}{\partial q_{n+i}} b_{ij} + \tag{3.5}$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n+i}} \right)^* \beta^i_{jm} \dot{q}_m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\beta^i_{jm} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_m} - \frac{\partial b_{im}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{l} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_{n+\mu}} b_{\mu m} - \frac{\partial b_{im}}{\partial q_{n+\mu}} b_{\mu j} \right)$$

К уравнениям (3.5) необходимо присоединить уравнения связей (3.2). В данном случае уравнения движения не сводятся к уравнениям вида (2.1).

Теорема 3. Пусть $\Omega \subseteq D^*(\mathrm{q}, \mathrm{q}^{\cdot}) \subset R^{n+l} \times R^n$ – ограниченная инвариантная область системы (3.2), (3.5). Тогда почти все траектории $\gamma \subset \Omega$ устойчивы по Пуассону.

Доказательство. Производя замену

$$\partial L^* / \partial \dot{q}_j = p_j$$

систему (3.2), (3.5) приводим к виду

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad \dot{q}_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{3.6}$$

$$p_j^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \Pi}{\partial q_{n+i}} b_{ij} + \varphi_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

$$H = \sum_{j=1}^{n} q_j^{\cdot} p_j - L^* = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T B(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \Pi(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{p}^T B(\mathbf{0}) \mathbf{p} \geqslant \mu^* \| \mathbf{p} \|^2, \quad \mu^* = \mathrm{const}$$

$$\varphi_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left[\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L^*}{\partial q_{n+i}} b_{ij} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{n+i}^{\cdot}} \right)^{\cdot} \beta_{jm}^{i} q_m^{\cdot} \right] \Bigg|_{q_j^{\cdot} = \partial H / \partial p_j}$$

Так как функции $\varphi_j(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ квадратичны относительно $\mathbf{p}$, то

$$\varphi_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \varphi_j(\mathbf{q}, -\mathbf{p}) \tag{3.7}$$

Из структуры уравнений (3.6) следует, что замена в них t на $(-t)$ эквивалентна $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{q}, -\mathbf{p})$. Обозначая вектор правых частей системы (3.6) через $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial q_{n+i}} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_j}$$

откуда, учитывая (3.7), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p})|_{\mathbf{p} \to (-\mathbf{p})} = -\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

В результате приходим к ситуации, рассмотренной при доказательстве теоремы 1, на основании чего делаем вывод о справедливости теоремы 3, поскольку уравнения (3.2), (3.5) инвариантны относительно замены t на $-t$.

4. Рассмотрим неавтономную систему вида

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^{\cdot\cdot} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \in C_{t\mathbf{x}\mathbf{x}^{\cdot}}^{(0,2,2)} (R \times D, D \subset R_{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\cdot}}^{2n}) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Предполагая, что решения системы (4.1) с начальными условиями в некоторой области $D^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot}) \subset D$ продолжаемы на всю ось $t \in R$, обобщим понятие обратимости, рассматривая в качестве определения последней выполнение равенства

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(-t, \mathbf{x}, -\mathbf{y}) \tag{4.2}$$

Представим уравнения (4.1) в форме

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}^{\cdot} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{4.3}$$

Теорема 4. Пусть обратимая система (4.1) удовлетворяет условиям:

1) существует ограниченное множество траекторий $G = \{ (\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^{\cdot}(t)) : t \in R \} \subset D$;
2) $\operatorname{mes}(G) > 0$.

Тогда система (4.3) как эквивалент системы (4.1) допускает интегральный инвариант вида

$$v^* = \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dx dy, \quad \Omega \subset G|_{\mathbf{x}^{\cdot} \to \mathbf{y}} = G^* \tag{4.4}$$

с плотностью $0 < \rho(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C_{t\mathbf{x}\mathbf{y}}^{(1,1,1)}(R \times G^*)$, ограниченной почти всюду на множестве $R \times G^*$.

Доказательство. Полагая, что решение системы (4.3) известно, представим его в форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad \boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_{2n})^T \tag{4.5}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$z^{\cdot} = -z \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_i} \tag{4.6}$$

подставляя вместо x, y выражения, определяемые равенством (4.5). Интегрируя (4.6), получаем

$$z = a\alpha(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad a = \text{const} \tag{4.7}$$

где согласно исходным предположениям в отношении (4.1) $\alpha \in C^{(1,1,1,1)}_{t t_0 \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0}$. Обращая затем векторное равенство (4.5) и подставляя результат обращения в (4.7), имеем

$$z = a\beta(t, t_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^{(1,1,1,1)}_{t_0 t \mathbf{x}\mathbf{y}} (R \times D) \tag{4.8}$$

В соответствии с (4.6) $\beta > 0, \forall\ (t_0, t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R \times D$.

Пользуясь выражением (4.8), представим уравнение (4.6) в виде

$$a\left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y} + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}\right) = -a\beta \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{f} \tag{4.9}$$

Разделив обе части равенства (4.9) на постоянную a, получаем

$$\partial\beta/\partial t + \operatorname{div}(\beta \mathbf{F}) = 0, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{y}, \mathbf{f})^T$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega} \beta\, dx\, dy\right) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \operatorname{div}(\beta \mathbf{F})\right) dx\, dy$$

Отсюда, полагая $\beta(t, 0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, заключаем, что интегральный инвариант (4.4) с плотностью $0 < \rho \in C^{(1,1,1)}_{t\,\mathbf{x}\mathbf{y}}$ существует. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что ограниченность плотности ρ почти всюду в области $R \times G^*$ следует из применения схемы доказательства леммы 2 к системе (4.3), (4.6).

Следствия. 1°. Имеет место оценка

$$\lambda_1 \leqslant \operatorname{mes}(\Delta_t) \leqslant \lambda_2, \quad 0 < \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2$$

где

$$\operatorname{mes}(\Delta_t) = \int_{\Delta_t} dx\, dy$$

$$0 < \operatorname{mes}(\Delta|_{t=t_0}) = \operatorname{mes}(\Delta_0) < \infty, \quad \Delta_0 \subset G^*$$

2°. Положение равновесия обратимой системы (4.1) не может быть асимптотически устойчивым.

3°. При условиях теоремы 4 и предположении о периодичности функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{\cdot})$ относительно t имеет место почти всюду на множестве G устойчивость по Пуассону.

Для доказательства следствия достаточно воспользоваться известной схемой ([14], с. 214).

Замечание. На основании доказательства теоремы 4 можно заключить, что интегральный инвариант с зависящей от t плотностью имеет место и в самом общем случае удовлетворяющих свойству продолжаемости решений неавтономных систем

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x})$$

при достаточной гладкости правых частей. Однако вопрос об ограниченности плотности $\rho(t, \mathbf{x})$ в данной ситуации остается открытым.

5. *Замечание* из разд. 4 можно использовать в качестве наводящего соображения для получения критериев несуществования интегральных инвариантов вида (1.2) для автономных систем (1.1). В частности, имеет место близкая по содержанию к теоремам 1, 2 из [5]

Теорема 5. Если в системе (1.1) $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in C^r(D(\mathbf{x}))$ $(r > 1)$ и существует ограниченная полутраектория $\gamma^{+(-)} = \{\mathbf{x}^*(t) : t \in R^+(R^-)\}$ – положительная или отрицательная, такая, что

1) $\bar{\gamma}^{+(-)} \subset D(\mathbf{x})$

2) $$\inf_{t \in R^+(R^-)} \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}^*(\tau))\, d\tau = -\infty \ .$$

то система (1.1) в области D не имеет интегрального инварианта вида (1.2).

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует положительная функция $\rho(\mathbf{x}) \in C^1(D(\mathbf{x}))$, удовлетворяющая уравнению Лиувилля (1.3). Представляя последнее в форме $\rho^\cdot = -\rho \operatorname{div} \mathbf{X}$ и производя его интегрирование при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, получаем

$$\rho(\mathbf{x}^*(t)) = \rho_0 \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}^*(\tau))\, d\tau\right) \tag{5.1}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 > 0$$

На основании условия *2* теоремы из равенства (5.1) следует соотношение

$$\sup_{t \in R^+(R^-)} \rho(\gamma^{+(-)}(\mathbf{x}^*)) = \infty \tag{5.2}$$

С другой стороны, поскольку $\bar{\gamma}^{+(-)}$, как замыкание ограниченной полутраектории $\gamma^{+(-)}$, является компактом, причем $\bar{\gamma}^{+(-)} \subset D$, $\rho(\mathbf{x}) \in C^1(D)$, то $\max \rho(\bar{\gamma}^{+(-)}) < \infty$, что противоречит (5.2).

Теорема 5 доказана.

Следствие. (ср. с [5]). Пусть точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ – положение равновесия системы (1.1), в окрестности которого она представляется в виде

$$\mathbf{x}^\cdot = A\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|), \quad A = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Тогда, если $\operatorname{tr} A \neq 0$, то система (1.1) в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ не имеет интегрального инварианта вида (1.2).

Приложение теоремы 5 представляет интерес в случаях, когда известно какое-либо ограниченное частное решение (1.1), необязательно сводящееся к положению равновесия.

В заключение отметим, что при рассмотрении задачи устойчивости по Пуассону свойство обратимости системы (инвариантности относительно замены t на $-t$) можно использовать в качестве некоторого эквивалента инвариантной меры.

Автор благодарит В.В. Румянцева за замечания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
3. *Халмош П.Р.* Лекции по эргодической теории. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 147 с.
4. *Козлов В.В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики//Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 3. С. 85–107.
5. *Козлов В.В.* О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538–545.
6. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
7. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
9. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 1. С. 3–149.
10. *Чаплыгин С.А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 1949. 112 с.
11. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1977. 543 с.
12. *Воронец П.В.* Об уравнениях движения для неголономных систем//Мат. сб. 1902. Т. 22. Вып. 4. С. 559–686.
13. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

Киев

Поступила в редакцию
17.IX.1991 г.