Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. П.С. Красильников, В.Н. Тхай

ОБРАТИМЫЕ СИСТЕМЫ. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1 : 1

Исследуются некоторые общие свойства обратимых систем: характер устойчивости тривиального положения равновесия, условия существования некоторых периодических решений, симметрии фазового портрета. Показано, что дискретная группа автоморфизмов (симметрий) порождает интегральные многообразия. Подробно исследуется устойчивость нулевого решения при резонансе 1: 1. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости модельной системы, показано, что ее неустойчивость влечет за собой неустойчивость полной системы.

1. Некоторые свойства обратимых систем. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = f_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

с гладкими правыми частями, фазовый поток которой обратим ([1], с. 100): существует линейное невырожденное отображение

$$\mathbf{M}\colon\ \mathbf{X} \to \mathbf{X}, \quad t \to -t \tag{1.2}$$

удовлетворяющее условию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{M}\mathbf{x}) \tag{1.3}$$
$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{X}$$

где $\mathbf{X}$ – фазовое пространство. Отображение (1.2), (1.3) является линейным автоморфизмом системы (1.1) [2]. Очевидно, $\mathbf{M}^p$: $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $t \to (-1)^p t$, где p – любое целое число, также будет автоморфизмом уравнений (1.1). Совокупность ω этих отображений образует циклическую группу симметрий, порожденную оператором (1.2), (1.3). Группа ω имеет конечный порядок κ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}^\kappa = \mathbf{E}$; в противном случае она бесконечна.

Заметим, что κ может принимать только четные значения.

В самом деле, пусть $\mathbf{A}$ – матрица линейной части, тогда $\mathbf{MA} = -\mathbf{AM}$. Известно [3], что это уравнение допускает нетривиальное решение относительно $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}$ и $(-\mathbf{M})$ имеют общие характеристические числа. Для κ – периодической матрицы $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}^\kappa = \mathbf{E}$) это возможно только лишь в случае $\kappa = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ – интегральная кривая уравнений (1.1)–(1.3), тогда семейство

$$\mathbf{y}_p(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}((-1)^p t, \mathbf{x}_0); \quad p = 0, 1, \ldots, \kappa - 1 \tag{1.4}$$

состоит из интегральных кривых системы. В силу единственности решений (1.1) из равенства $\mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(0, \mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}_0)$ следует равенство $\mathbf{y}_p(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}_0)$. Итак, доказана

Лемма. Линейный автоморфизм (1.2)–(1.3) порождает свободную циклическую группу автоморфизмов, либо циклическую группу конечного, но четного порядка κ (в случае $\mathbf{M}^\kappa = \mathbf{E}$). Если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ – интегральная кривая системы (1.1)–(1.3), то любая кривая семейства (1.4) также является интегральной, при этом $\mathbf{y}_p(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}_0)$.

Покажем, что обратимость фазового потока препятствует появлению асимптотически устойчивого тривиального положения равновесия.

Теорема 1. В обратимой системе (1.1)–(1.3) асимптотическая устойчивость решения $\mathbf{x} = 0$ невозможна.

Доказательство. Пусть нулевое решение асимптотически устойчиво. Тогда существует интегральная кривая $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, обладающая свойством $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \to 0$ при $t \to +\infty$. Очевидно, $\mathbf{y}_1(t, \mathbf{x}_0) \to 0$ при $t \to -\infty$, что противоречит наличию асимптотической устойчивости.

Заметим, что если $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{L}_p^{(1)}$, где $\mathbf{L}_p^{(1)}$ – неподвижное множество оператора $\mathbf{M}^{-p}$, то $\mathbf{y}_p(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Очевидно, для любого $p \in \mathbf{Z}$

$$\mathbf{L}_p^{(1)} = \mathbf{L}(\bigcup_k \mathbf{L}_1^{(\lambda_k)}), \qquad \lambda_k^p = 1, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{L}_1^{(\lambda_k)}$ – собственное подпространство оператора $\mathbf{M}^{-1}$, отвечающее его собственному значению λ_k, а $\mathbf{L}$ – линейная оболочка. Если все характеристические числа матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ имеют значения $\sqrt[\kappa]{1}$ (случай $\mathbf{M}^{-\kappa} = \mathbf{E}$, κ четно), то $\lambda_k = \cos(2k\pi/\kappa) + i\sin(2k\pi/\kappa)$, при этом $1 \leqslant p \leqslant \kappa - 1$, $0 \leqslant k \leqslant \kappa - 1$, $pk \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \kappa)$. В случае свободной группы ($\kappa = \infty$) представление (1.5) также сохраняет силу, поскольку жорданова форма матрицы $\mathbf{M}^{-p}$ повторяет жорданову форму $\mathbf{M}^{-1}$ с точностью до замены $\lambda_k \to \lambda_k^p$.

Предположим, что p четно, тогда $\mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t)$, поэтому $\mathbf{L}_p^{(1)}$ – интегральное многообразие системы (1.1). Положив $p = 2r + 1$, имеем $\mathbf{M}^{-p}\mathbf{x}(-t) = \mathbf{x}(t)$. Отсюда следует, что если многообразие $\mathbf{L}_p^{(1)}$ интегрально, то оно состоит из положений равновесия, так как любая пара решений $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t + \mathrm{const})$, принадлежащая $\mathbf{L}_p^{(1)}$, является четной функцией времени.

Пусть $\mathbf{L}_p^{(1)}$ не является интегральным множеством, тогда любую траекторию, пересекающую $\mathbf{L}_p^{(1)}$ в двух разных точках, соответствующих последовательным моментам времени $t_1^{(p)}$, $t_2^{(p)}$, будем [4] называть $\mathbf{L}_p^{(1)}$ – нормальной. Видно, что $\mathbf{L}_p^{(1)}$ – нормальная траектория является периодической. Итак, доказана

Теорема 2. Пусть циклическая группа автоморфизмов ω имеет порядок $\kappa \geqslant 2$. Тогда если p четно, то каждое из нетривиальных множеств (1.5) интегрально. Если p нечетно и при этом $\mathbf{L}_p^{(1)}$ не является интегральным множеством, то любая $\mathbf{L}_p^{(1)}$ нормальная траектория замкнута, имеет период $T = 2\,|\,t_1^{(p)} - t_2^{(p)}\,|$; $\mathbf{L}_p^{(1)}$ состоит из положений равновесия, если оно интегрально.

В случае $\kappa = 2$ интегральное множество $\mathbf{L}_2^{(1)}$ тривиально: $\mathbf{L}_2^{(1)} = \mathbf{X}$. Периодичность $\mathbf{L}_1^{(1)}$ – нормальной траектории известна [4]. Условно периодические решения исследованы ранее [5].

В механических задачах $\kappa = 2$, т.е. $\mathbf{M}$ – инволюция: $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$ [4, 6, 7]. В этом случае канонический вид матрицы $\mathbf{M}$ таков

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}_l & 0 \\ 0 & -\mathbf{E}_m \end{Vmatrix} \qquad (l + m = n) \tag{1.6}$$

($\mathbf{E}_j$ – единичная матрица порядка j). Отсюда следует, что $\mathbf{M}$ – ортогональное отображение.

Следующее утверждение вытекает из леммы, сформулированной выше, а также свойства инволютивной ортогональности $\mathbf{M}$ [8].

Следствие. Если система (1.1) допускает линейный инволютивный автоморфизм (1.2), (1.3), (1.6), то ее фазовый портрет симметричен либо относительно начала координат (случай $l = 0$), либо относительно l – плоскости $\mathbf{L}_1^{(1)}$ (случай $l > 0$, $m > 0$), являющейся собственным подпространством оператора $\mathbf{M}$.

Заметим, что при $\det \mathbf{M} = -1$ (несобственное преобразование) симметрия относительно $\mathbf{L}_1^{(1)}$ является зеркальной, так как она меняет ориентацию пространства.

Пример 1. Рассмотрим уравнения движения голономной механической системы с позиционными силами и стационарными связями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j^{\cdot}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j(\mathbf{q}), \quad Q_j(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.7}$$

$$2T = \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) q_i^{\cdot} q_j^{\cdot}, \quad q = (q_1, \ldots, q_n)$$

Здесь $\mathbf{q}$ – вектор обобщенных координат, T – кинетическая энергия, Q_j – обобщенные силы. Известно [9, 10], что фазовый поток системы (1.7) обратим, поскольку уравнения (1.7) инвариантны относительно замены $\mathbf{q} \to \mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot} \to -\mathbf{q}^{\cdot}$, $t \to -t$. Отсюда следует, что, во-первых, фазовый портрет симметричен относительно координатной плоскости $\mathbf{q}^{\cdot} = 0$; во-вторых, асимптотическая устойчивость положения равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ невозможна на при каких позиционных силах, воздействующих на систему.

Если уравнение частот

$$\det \| c_{ij} + \omega^2 a_{ij}(0) \| = 0, \quad c_{ij} = (\partial Q_i / \partial q_j)_0$$

имеет отрицательные или комплексные решения относительно ω^2, то, согласно теореме Адамара – Перрона [11], уравнения (1.7) допускают гладкие интегральные многообразия $\mathbf{W}^s$ (устойчивое), $\mathbf{W}^u$ (неустойчивое), $\mathbf{W}^c$ (центральное), проходящее через нуль, при этом $\mathbf{W}^u$ является образом $\mathbf{W}^s$ при отражении относительно плоскости $\mathbf{q}^{\cdot} = 0$ и наоборот. Множество $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}^s \cap \mathbf{W}^u$, состоящее из двоякоасимптотических к нулю решений, отображается в себя. Любая траектория, имеющая две точки с нулевой скоростью, является периодической, симметричной относительно плоскости $\mathbf{q}^{\cdot} = 0$.

2. Резонанс 1 : 1. Линейная нормализация. Обратимую систему (1.1)–(1.3), удовлетворяющую дополнительному условию (1.6), можно записать в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_*^{\cdot} = \mathbf{U}(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), \quad \mathbf{v}_*^{\cdot} = \mathbf{V}(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*); \quad \mathbf{u}_* \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v}_* \in \mathbf{R}^m, \quad l + m = n \\ \mathbf{U}(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}_*, -\mathbf{v}_*) = \mathbf{V}(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Будем считать, что $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – голоморфные функции $\mathbf{u}_*, \mathbf{v}_*$, при этом $l \geqslant m$. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\mathbf{u}_*^{\cdot} = \mathbf{A}_* \mathbf{v}_*, \quad \mathbf{v}_*^{\cdot} = \mathbf{B}_* \mathbf{u}_* \tag{2.2}$$

($\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$ – постоянные матрицы). В случае $l > m$ матрица $\mathbf{D}$ системы (2.2) вырожденная, так как она содержит заполненный нулями квадрат, у которого сумма высоты и ширины больше n ([12], с. 170). Кратность κ нулевого собственного значения $\mathbf{D}$ не меньше $l - m$:

$$\kappa = \dim \mathbf{N}_\mathbf{D} \kappa \geqslant \dim \mathbf{N}_\mathbf{D} = n - \operatorname{rank} \mathbf{D} = n - \operatorname{rank} \mathbf{A}_* - \operatorname{rank} \mathbf{B}_* \geqslant l - m$$

($\mathbf{N}_\mathbf{D}$ – ядро оператора $\mathbf{D}$).

Рассмотрим случай $\kappa = l - m$ (тогда $\operatorname{rank} \mathbf{A}_* = \operatorname{rank} \mathbf{B}_* = m$). Оставшиеся собственные значения $\mathbf{D}$ разбиваются на пары $\lambda, -\lambda$, так как $\mathbf{D}$ и $-\mathbf{D}$ подобны, поэтому в надлежащем базисе $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\mathbf{0}, \mathbf{A}, -\mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ – невырожденная матрица $m \times m$. Отсюда следует, что систему (2.2) можно привести к виду

$$\boldsymbol{\xi}^{\cdot} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad (\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{l-m}; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^m) \tag{2.3}$$

так как

$$\operatorname{diag}(\mathbf{A}, -\mathbf{A}) \sim \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}$$

Отличные от нуля корни характеристического уравнения системы (2.3) определяются из уравнения

$$\det(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{E}) = 0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \| c_{ij} \| \tag{2.4}$$

и распадаются на пары $\pm\lambda_s$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$. Система (2.1) может быть устойчива только в случае $\lambda_s^2 \leqslant 0$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$.

Пусть все $\lambda_s^2 < 0$ и среди них есть пара равных: $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ (резонанс 1 : 1). Предполагая отсутствие других резонансов, порядок которых не превосходит четырех, приведем систему линейного приближения (2.3) к каноническому виду.

Так как в рассматриваемом случае rank $\mathbf{A}$ = rank $\mathbf{C} = m$, то поставленная задача сводится к преобразованию линейной системы

$$\mathbf{u}^{\cdot\cdot} = \mathbf{C}\mathbf{u} \tag{2.5}$$

Пусть r = rank $\mathbf{C}^* = m - 1$, где $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \lambda_1^2\mathbf{E}$. Тогда искомое линейное отображение, $\mathbf{u}, \mathbf{u}^\cdot \to \mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}$ имеет вид (выписана лишь первая группа из всей совокупности комплексно-сопряженных преобразований)

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{j=1}^{m} p_{1j}(u_j^\cdot + \lambda_1 u_j) + i\mu \sum_{j=1}^{m} p_{2j}u_j \\ z_s &= \sum_{j=1}^{m} p_{sj}(u_j^\cdot + \lambda_s u_j) \quad (s = 2, 3, \ldots, m) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $\mu = 1$, матрица $\mathbf{P} = \| p_{sj} \|$ содержит чисто мнимые элементы, удовлетворяющие системам линейных уравнений

$$(\mathbf{C} - \lambda_s^2\mathbf{E})^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s^{\mathrm{T}} = 2i\mu\lambda_1\delta_{1s}\mathbf{p}_2^{\mathrm{T}} \quad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.7}$$

где $\mathbf{p}_s = (p_{s1}, \ldots, p_{sm})$, δ_{js} – символ Кронекера. Согласно (2.4), определители этих систем равны нулю, поэтому при $s \neq 1$ уравнения (2.7) имеют нетривиальные решения. В случае $s = 1$ уравнения (2.7) также имеют нетривиальное решение $\mathbf{p}_1^{\mathrm{T}}$, принадлежащее множеству $\mathbf{N}_2\backslash\mathbf{N}_1$, где $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ – ядра операторов $\mathbf{C}^{*\mathrm{T}}$, $(\mathbf{C}^{*\mathrm{T}})^2$ соответственно. Действительно, rank$(\mathbf{C}^{*\mathrm{T}})^2 = m - 2$, поэтому $\mathbf{N}_2\backslash\mathbf{N}_1$ не пусто, при этом $\mathbf{C}^{*\mathrm{T}}$: $\mathbf{N}_2\backslash\mathbf{N}_1 \to \mathbf{N}_1$.

Матрица $\mathbf{P}$ невырожденная.

Очевидно, последние $m - 1$ строк этой матрицы независимы, так как они образуют совокупность собственных векторов оператора $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, соответствующих попарно различным собственным значениям $\lambda_2^2, \ldots, \lambda_m^2$. Предположим, что $\mathbf{p}_1 = \alpha_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{p}_m$, где α_k – некоторые действительные числа. Первое уравнение системы (2.7) примет вид

$$(\alpha_2\mathbf{C}^{*\mathrm{T}} - 2i\lambda_1\mathbf{E})\mathbf{p}_2^{\mathrm{T}} = -\mathbf{C}^{*\mathrm{T}} \sum_{k=3}^{m} \alpha_k\mathbf{p}_k^{\mathrm{T}}$$

Определитель левой части отличен от нуля, поэтому векторы $\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_m$ зависимы, что невозможно.

В результате преобразований (2.6) система (2.3) будет иметь следующее комплексное представление:

$$\begin{aligned} &\xi^\cdot = \mathbf{0}, \quad z_1^\cdot = \lambda_1 z_1 + i z_2, \quad \overline{z}_1^\cdot = -\lambda_1\overline{z}_1 - i\overline{z}_2 \\ &z_s^\cdot = \lambda_s z_s, \quad \overline{z}_s^\cdot = -\lambda_s\overline{z}_s \quad (s = 2, 3, \ldots, m) \end{aligned}$$

Обратное преобразование находится из уравнений (суммирование от $j = 1$ до $j = m$)

$$\begin{aligned} &\Sigma(p_{1j}\lambda_1 + i\mu p_{2j})u_j = ½(z_1 + \overline{z}_1), \quad \Sigma p_{1j}u_j^\cdot = ½(z_1 - \overline{z}_1) \\ &\Sigma p_{sj}u_j = ½\lambda_s^{-1}(z_s + \overline{z}_s), \quad \Sigma p_{sj}u_j^\cdot = ½(z_s - \overline{z}_s) \quad (s = 2, 3, \ldots, m) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}^\cdot$ – линейные комбинации действительного и мнимого выражений $\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}$ соответственно.

В случае $r = m - 2$ система (2.3) приводится к виду

$$\xi^\cdot = \mathbf{0}, \quad z_s^\cdot = \lambda_s z_s, \quad \overline{z}_s^\cdot = -\lambda_s\overline{z}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.8}$$

при помощи преобразований (2.6), (2.7), в которых следует положить $\mu = 0, p_{1,m-1} = p_{2m} = 1, p_{1m} = p_{2,m-1} = 0$.

3. Неустойчивость. Случай непростых элементарных делителей. Рассмотрим задачу устойчивости нулевого решения системы (2.1) при резонансе 1 : 1. Известно, что решение этой задачи для гамильтоновой системы с двумя степенями свободы получено в работах [13, 14]. Основную роль в решении задачи устойчивости играет резонансная подсистема [15], поэтому рассмотрим сначала случай $l = m = 2$. Введем обозначения

$$\rho_1 = z_1\bar{z}_1, \quad \rho_2 = z_2\bar{z}_2, \quad x = i(\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2), \quad x_1 = i(\bar{z}_1\bar{z}_2 - z_1 z_2)$$

После нормализации до членов третьего порядка включительно, система примет вид:

$$\begin{aligned}
&\rho_1^{\cdot} = x[\mu + (B_{11} - C_{12})\rho_1 + B_{12}\rho_2 + C_{11}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{5/2})\\
&\rho_2^{\cdot} = -x[A_{21}\rho_1 + (A_{22} - C_{21})\rho_2 + C_{22}y] + O((\rho_1 + \rho_2)^{5/2})\\
&x^{\cdot} = R(\rho_1, \rho_2, y) + O((\rho_1 + \rho_2)^{5/2})\\
&x_1^{\cdot} = R_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) + O((\rho_1 + \rho_2)^{5/2})\\
&R = 2[\mu\rho_2 - A_{21}\rho_1^2 + (B_{11} - A_{22} - C_{12} + C_{21})\rho_1\rho_2 + B_{12}\rho_2^2] +\\
&+ y[(A_{11} - B_{21} - C_{22})\rho_1 + (A_{12} - B_{22} + C_{11})\rho_2] + (C_{12} - C_{21})y^2\\
&y = \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2, \quad x^2 + y^2 = 4\rho_1\rho_2
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где R_1 – полином четвертой степени, точный вид которого не понадобится, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – действительные коэффициенты. При этом $\mu = 1$ в случае непростых элементарных делителей; $\mu = 0$, если элементарные делители простые.

Теорема 3. Нулевое решение системы (2.1) при резонансе 1 : 1 неустойчиво по Ляпунову, если функция $R(\rho_1, \rho_2, y)$ знакоопределена в достаточной малой окрестности начала координат, принадлежащей конусу $\rho_1 \geqslant 0, \rho_2 \geqslant 0$.

Справедливость этой теоремы при $m = l = 2$ следует из того факта, что для системы (3.1) x – функция Четаева, если функция R знакоопределена при $\rho_1 \geqslant 0$, $\rho_2 \geqslant 0$ (порядок R не превосходит степени однородности $\rho_1^2 + \rho_2^2$). В случае произвольных l и m функция Четаева строится в виде

$$V = x^2 - \gamma^2 \sum_{j=1}^{l-m} \xi_j^2 - \sum_{s=3}^{m} z_s\bar{z}_s$$

где γ – надлежащим образом выбранная постоянная; неустойчивость также выводится из знакоопределенности R. Поэтому при $\mu = 1$ из неравенств

$$|\rho_1 y| \leqslant 2\rho_1^{3/2}\rho_2^{1/2}, \quad \rho_2 + |A_{21}|\rho_1^2 \geqslant 2(|A_{21}|\rho_2)^{1/2}\rho_1$$

следует, что условие $A_{21} < 0$ гарантирует неустойчивость.

Следствие[1]. Если $l = m$ и матрица **C** имеет непростые элементарные делители, то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову при $A_{21} < 0$.

4. Устойчивость в случае непростых элементарных делителей. Покажем, что при $\mu = 1$ и $A_{21} > 0$ нулевое решение модельной системы, полученной из (3.1) отбрасыванием членов $O((\rho_1 + \rho_2)^{5/2})$ и уравнения для x_1, устойчиво.

Пусть $l = m = 2$. Модельная система обратима с линейным автоморфизмом $x \to -x$, $y \to y$, $\rho_1 \to \rho_1$, $\rho_2 \to \rho_2$. Рассмотрим сначала поведение траектории, на которой x обращается в нуль не более одного раза. Пусть в момент t_0 значения ρ_1, ρ_2 удовлетворяют условию $\rho_{10} + \rho_{20} \leqslant \delta^2$ (δ – некоторое малое положительное число), а при $t > t_0$ x

---

[1] *Хазин Л.Г.* О резонансной неустойчивости положения равновесия при кратных частотах: Препринт № 97. М., ИПМ АН СССР. 1975. 19 с.

сохраняет знак, пока ρ_1, ρ_2 принадлежат σ-окрестности $\rho_1 + \rho_2 < \sigma$ $(\sigma > \delta)$. Отметим, что в силу симметрии фазового портрета случай $t < t_0$ сводится к рассматриваему.

При $x \neq 0$ из первых двух уравнений модельной системы имеем

$$d\rho_2/d\rho_1 = f(\rho_1, \rho_2, y), \quad |f(\rho_1, \rho_2, y)| \leqslant k(\rho_1 + \rho_2) \quad (k = \text{const})$$

Поэтому в области $\rho_1 + \rho_2 \leqslant \delta$ приращения переменных ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют неравенству $|\Delta\rho_2| \leqslant k\delta\,|\Delta\rho_1|$. На границе $\rho_1 + \rho_2 = \delta$ имеем

$$|\Delta\rho_2| \leqslant k\delta^2, \quad \rho_2 \leqslant \rho_{20} + |\Delta\rho_2| \leqslant (1+k)\delta^2, \qquad \rho_1 = \delta - \rho_2 \geqslant \delta - (1+k)\delta^2$$

Отсюда следует, что при $x < 0$ траектория не выйдет на границу δ – окрестности, так как $\rho_1^{\cdot} < 0$. Если $x > 0$, то на границе этой окрестности (если она достигается) величины ρ_1^2 и ρ_2 имеют один и тот же порядок независимо от выбора начальных значений. Так как $\rho_1^{\cdot} > 0, \rho_2^{\cdot} < 0$, то в дальнейшем движении имеем

$$\rho_1^2 \geqslant [1 - (1+k)\delta]^2 (1+k)^{-1} \rho_2.$$

При этом

$$d\rho_2/d\rho_1 = -A_{21}\rho_1 + f^*(\rho_1, \rho_2, y), \quad |f^*| \leqslant k^* \rho_1^{3/2} \quad (k^* = \text{const} > 0)$$

Предположим, что ρ_1 возрастает с величины $\epsilon_1 \geqslant \delta - (1+k)\delta^2$ до $\epsilon = \alpha\epsilon_1$ ($\alpha = \text{const} > 1$). Тогда $\Delta\rho_1 = (\alpha - 1)\epsilon_1$, $\Delta\rho_1^2 = (\alpha^2 - 1)\epsilon_1^2$ и $\Delta\rho_2 \leqslant -\tfrac{1}{2} A_{21}(\alpha^2 - 1)\epsilon_1^2 + k^*(\alpha^{5/2} - 1)\epsilon_1^{5/2}$. Следовательно,

$$\rho_2 \leqslant (1+k)\delta^2 + \Delta\rho_2 < \tfrac{1}{2}[(1+k) - A_{21}(\alpha^2 - 1)]\epsilon_1^2 + k^*(\alpha^{5/2} - 1)\epsilon_1^{5/2}$$

Если $\alpha^2 > 2(1+k)A_{21}^{-1} + 1$, то при достаточно малых ϵ_1 имеем $\rho_2 < 0$, что невозможно. Итак, ни одна исследуемая траектория не выйдет на границу ϵ-окрестности, если ее начальные условия принадлежат δ^2-окрестности (δ – минимальный корень уравнения $\epsilon/\alpha = \delta - (1+k)\delta^2$).

Рассмотрим траектории, на которых x обращается в нуль по крайней мере дважды. Из теоремы 2 следует, что эти траектории представляют собой замкнутые кривые. Семейство таких периодических решений $\{\eta(t) = (x(t), \rho_1(t), \rho_2(t))\}$ не приводит к неустойчивости.

Предположим противное, тогда при некотором $\epsilon > 0$ существует последовательность $\{\eta_{0k}'\}$ точек пересечения этого семейства со сферой S_ϵ. Пусть $\{\eta_{0k}\}$ - сходящаяся подпоследовательность (сфера S_ϵ компактна), $\{t_k\}$ – соответствующая последовательность моментов времени, удовлетворяющая требованиям

$$\{t_k\} \to -\infty, \quad \eta(\eta_{0k}, t_k) = \min_{-T_k \leqslant t < 0} \|\eta(\eta_{0k}, t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

(T_k – период $\eta(\eta_{0k}, t)$). Пусть $\eta_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \eta_{0k}$. Очевидно, $\lim \eta(\eta_0, t_k) = 0$ при $k \to \infty$. Это означает, что решение $\eta(\eta_0, t)$ приводит к неустойчивости. Функция x обращается в нуль на $\eta(\eta_0, t)$ не более одного раза, иначе $\eta(\eta_0, t)$ будет периодической функцией времени и, следовательно, фазовая точка достигнет $\eta = 0$ за конечное время, что невозможно. Полученный результат приводит к противоречию: с одной стороны, траектория $\eta(\eta_0, t)$ не может покинуть ϵ – окрестности (как это следует из предыдущих выводов), с другой стороны, она ее покидает. Устойчивость доказана.

Объединяя полученные выше результаты, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть $A_{21} \neq 0$, $l = m = 2$, матрица $\mathbf{C}$ имеет непростые элементарные делители. Необходимым и достаточным условием устойчивости модельной системы является требование $A_{21} > 0$.

5. Случай простых элементарных делителей. Пусть $l = m = 2$. Модельная система третвего приближения примет вид

$$\mathbf{z}^{\cdot} = x\mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = (\rho_1, \rho_2, y)^{\mathrm{T}}, \quad x = \pm\sqrt{4\rho_1\rho_2 - y^2} \tag{5.1}$$

$$\mathbf{A} = \| a_{ij} \|_1^3, \quad a_{11} = B_{11} - C_{12}, \; a_{12} = B_{12}, \; a_{13} = C_{11}, \; a_{21} = -A_{21}$$

$$a_{22} = C_{21} - A_{22}, \; a_{23} = -C_{22}, \; a_{31} = B_{21} - A_{11} - C_{22}, \; a_{32} = B_{22} + C_{11} - A_{12}$$

$$a_{33} = C_{21} - C_{12}.$$

Конус

$$\mathbf{K} = \{ \rho_1, \rho_2, y: \; 4\rho_1\rho_2 \geqslant y^2, \;\; \rho_1 \geqslant 0, \rho_2 \geqslant 0 \} \tag{5.2}$$

является интегральным множеством, так как в силу (3.1) неравенство $4\rho_1\rho_2 \geqslant y^2$ выполняется во все время движения. На гиперболоидальной конической поверхности $y^2 = 4\rho_1\rho_2$ функция x обращается в нуль, меняя знак на противоположный, поэтому граница области **K** отражает фазовые кривые системы (5.1), вызывая попятное движение фазовой точки. Поверхность $y^2 = 4\rho_1\rho_2$ является особой, так как на ней нарушаются требования единственности решения. Заметим, что отражение фазовых кривых (5.1) вызвано обратимостью фазового потока.

Очевидно, фазовая точка системы (5.1) перемещается вдоль фазовых кривых линейной системы

$$\dot{\mathbf{z}}_* = \mathbf{A}\mathbf{z}_* \tag{5.3}$$

При этом двукратному ее отражению отвечает периодическое движение вдоль некоторого участка фазовой кривой (5.3), принадлежащего конусу **K**.

Получим необходимые и достаточные условия существования особых направлений (инвариантных лучей)

$$\rho_2 = k\rho_1, \;\; y = k_1\rho_1, \;\; k_1^2 < 4k \tag{5.4}$$

где $k_1, k > 0$ – постоянные параметры. Для этого положим:

$$G_3 = C_{11}^2(B_{22} - A_{12} + C_{11}) + B_{12}(B_{12}C_{22} + C_{11}C_{12} - C_{11}A_{22})$$

$$G_2 = C_{11}^2(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + 2C_{11}C_{22}(B_{22} - A_{12} + C_{11}) + B_{12}(B_{11}C_{22} - C_{22}C_{21} - $$
$$- C_{11}A_{21}) + (B_{11} - C_{12} + A_{22} - C_{21})(B_{12}C_{22} + C_{12}C_{11} - C_{11}A_{22})$$

$$G_1 = 2C_{11}C_{22}(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + C_{22}^2(B_{22} - A_{12} + C_{11}) + A_{21}(B_{12}C_{22} + C_{11}C_{12} - $$
$$- C_{11}A_{22}) + (B_{11} - C_{12} + A_{22} - C_{21})(B_{11}C_{22} - C_{22}C_{21} - C_{11}A_{21})$$

$$G_0 = C_{22}^2(B_{21} - A_{11} - C_{22}) + A_{21}(B_{11}C_{22} - C_{22}C_{21} - C_{11}A_{21})$$

$$A_1 = -[k(B_{11} + A_{22} - C_{12} - C_{21}) + k^2B_{12} + A_{21}]\,[2\sqrt{k}(kC_{11} + C_{22})]^{-1}$$

Вычисления показывают, что справедлива следующая

Теорема 5. Уравнения (5.1) допускают частные решения вида (5.4) тогда и только тогда, когда существует положительное число k, удовлетворяющее двум условиям одновременно:

$$G_3k^3 + G_2k^2 + G_1k + G_0 = 0, \quad |A_1| < 1 \tag{5.5}$$

При этом $k_1 = 2A_1\sqrt{k}$.

В предельном случае $k_1^2 = 4k$ ($|A_1| = 1$) инвариантный луч принадлежит границе конуса **K**, при этом наблюдается его вырождение, сопровождающееся распадом луча на бесконечное множество положений равновесия.

Покажем, что в невырожденном случае система устойчива, если она не имеет инвариантных лучей (5.4).

Рассмотрим грубую ситуацию, когда $\mathbf{z}_* = \mathbf{0}$ – гиперболическая особая точка уравнений (5.3). При этом характеристическое уравнение не имеет корней с одинаковой вещественной частью (исключая случай комплексно – сопряженных собственных чисел). Возможны 10 случаев взаимного расположения характеристических корней λ_1, λ_2, λ_3:

$$1)\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0;\quad 2)\ \lambda_1 < \lambda_2 < 0,\ \ \lambda_3 > 0$$
$$3)\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2,\ \mathrm{Re}\,\lambda_1 < \lambda_3 < 0;\quad 4)\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2,\ \lambda_3 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0 \tag{5.6}$$
$$5)\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2,\ \ \mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0,\ \ \lambda_3 > 0$$

Остальные пять случаев можно получить из (5.6) при помощи замены $\lambda_j \to -\lambda_j$. Фазовый портрет уравнений (5.3) имеет наглядное представление в трехмерном пространстве (см., например, [16]).

Отсутствие инвариантных лучей у системы (5.1) означает, что ни один вещественный собственный вектор ξ_k оператора **A**, ни ему противопложный $-\xi_k$, не принадлежат конусу **K**. Из вида общего решения

$$\mathbf{z}_*(t) = \sum_{k=1}^{3} C_k e^{\lambda_k t} \xi_k \tag{5.7}$$

уравнений (5.3) следует, что **K** не содержит целиком ни одной положительной (отрицательной) полутраектории уравнений (5.3), так как фазовая точка покидает конус **K** как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

В самом деле, в случаях 1), 2) это утверждение вытекает из следующего асимптотического представления $\mathbf{z}_*(t)$:

$$\mathbf{z}_*(t) \sim C_k e^{\lambda_k t} \xi_k \quad \text{при} \quad t \to +\infty \quad (t \to -\infty)$$

(ξ_k – соответствующий собственный вектор). В случаях 3) – 5) фазовая точка $\mathbf{z}_*$ движется по спирали вокруг прямой, содержащей вектор ξ_3, и следовательно, может находиться в конусе **K** ограниченное время.

Итак, если конус **K** не содержит инвариантных лучей, то решения, принадлежащие **K**, являются периодическими функциями времени, поэтому модельная система (5.1) устойчива. Появление невырожденных инвариантных лучей приводит к неустойчивости, сохраняющейся в полной системе (теорема 3). Заметим, что неустойчивость полной системы следует также из ранее полученных результатов [17][2].

Результаты исследований сформулируем в виде отдельной теоремы. Будем говорить, что тривиальное решение уравнений (5.3) является "грубым", если выполняется одно из условий (5.6), либо противоположное ему, порожденное заменой $\lambda_j \to -\lambda_j$.

Теорема 6. Пусть тривиальное решение уравнений (5.1) является "грубым" для системы (5.3) и при этом $\partial\mathbf{K}$ не содержит вырожденных инвариантных лучей. Для устойчивости модельной системы (5.1) необходимо и достаточно, чтобы совокупность (5.5) не имела решений относительно $k \in (0, +\infty)$; неустойчивость модельной системы сохраняется в полной.

6. Пример. Рассмотрим механическую систему, находящуюся в горизонтальной плоскости и состоящую из двух одинаковых стержней массы m и длины l, соединенных друг с другом и с неподвижным основанием при помощи идеальных шарниров и спиральных пружин жесткости c_2 и c_1 соответственно. Будем считать, что на свободный конец второго стержня действует постоянная следящая сила **F**, направленная вдоль его оси, при этом недеформированному состоянию пружин отвечает прямолинейная конфигурация системы.

Приведенная система может служить дискретной моделью упругого стержня, нагруженного следящей силой.

Проводились [18–20] подробные исследования поведения упругих балок, канатов, тросов на основе адекватных стержневых моделей.

---

[2]См. также: *Медведев С.В.* Одно доказательство леммы о неустойчивости // Деп. ВИНИТИ № 1088–82, 1982, 9 с.

Движение рассматриваемой системы описывается уравнениями (1.7), в которых обобщенными координатами являются углы отклонения стержней от равновесного состояния, т.е. φ_1, φ_2, причем

$$T = {}^1/_6\, ml^2 [4\dot\varphi_1^2 + 3\dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot\varphi_1^2]$$
$$Q_1 = -c_1\varphi_1 + c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - Fl\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad Q_2 = c_2(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (6.1)$$

Характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет вид

$$7\lambda^4 + \frac{6}{ml^2}(2c_1 + 16c_2 - 5Fl)\lambda^2 + \frac{36}{m^2l^4}c_1c_2 = 0 \qquad (6.2)$$

Отсюда следует ([21], с. 212), что система устойчива в первом приближении, если

$$a = 2c_1 + 16c_2 - 5Fl \geqslant 0, \quad a^2 - 28c_1c_2 \geqslant 0 \qquad (6.3)$$

Были получены [10] некоторые строгие выводы об устойчивости в этой области, в частности, показано, что значениям параметров, удовлетворяющих резонансному соотношению 1:3, отвечают неустойчивые режимы. На границе области (6.3), т.е. при $a^2 = 28c_1c_2$, собственные частоты удовлетворяют резонансу $\omega_1 = \omega_2$, если $a > 0$, при этом

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \quad \omega^2 = \frac{3}{7}\,\frac{2c_1 + 16c_2 - 5Fl}{ml^2}, \quad \omega > 0$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{Vmatrix} -\dfrac{3}{7ml^2}(2c_1 - 6c_2 + Fl) & \dfrac{6}{7ml^2}(5c_2 - 2Fl) \\ \dfrac{6}{7ml^2}(3c_1 + 11c_2 - 3Fl) & \dfrac{3}{7ml^2}(2c_1 - 6c_2 + Fl) \end{Vmatrix}$$

Очевидно, rank $\mathbf{C}^* = 0$ только в случае $c_1 = c_2 = 0$, $F = 0$, поэтому матрица $\mathbf{C}$ имеет непростые элементарные делители, если она невырождена. Матрица $\mathbf{P}$ линейного преобразования (2.6) имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \dfrac{2(5c_2 - 2Fl)}{\omega}i & \left(\dfrac{2c_1 - 6c_2 + Fl}{\omega} + \dfrac{14}{3}ml^2\omega\right)i \\ 2(5c_2 - 2Fl)i & (2c_1 - 6c_2 + Fl)i \end{Vmatrix}$$

Раскладывая правые части уравнений движения в ряды, получим, что члены второго порядка малости отсутствуют, а члены третьего порядка, содержащиеся в уравнениях по φ_1, φ_2 соответственно, таковы:

$$\Phi_1 = \frac{108}{49ml^2}c_1\varphi_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{49ml^2}(207c_2 - 94Fl)(\varphi_2 - \varphi_1)^3 + \frac{1}{7}(9\dot\varphi_1^2 + 6\dot\varphi_2^2)(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\Phi_2 = -\frac{162}{49ml^2}c_1\varphi_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{49ml^2}(673c_2 - 246Fl)(\varphi_2 - \varphi_1)^3 - \frac{1}{7}(24\dot\varphi_1^2 + 9\dot\varphi_2^2)(\varphi_2 - \varphi_1)$$

При помощи подстановки, обратной (2.6), выразим правые части (6.4) через новые переменные $z_j, \bar z_j$:

$$\Phi_1 = i\alpha_1 z_2 z_1 \bar z_1 + \ldots, \quad \Phi_2 = i\alpha_2 z_2 z_1 \bar z_1 + \ldots$$

Тогда из второго равенства (2.6), имеющего вид

$$\dot z_2 = p_{21}(\ddot\varphi_1 - i\omega\dot\varphi_1) + p_{22}(\ddot\varphi_2 - i\omega\dot\varphi_2)$$

следует, что $A_{21} = p_{21}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2$. Вычисления показывают, что коэффициент A_2 определяется выражением

$$A_{21} = -\frac{p_{21} + p_{22}}{56\omega\Delta^3}\left\{\frac{3}{49}\,\frac{p_{21} + p_{22}}{ml^2\omega^2}[(108p_{21} - 162p_{22})p_{22}c_1 - ((207c_2 - 94Fl)p_{21} +\right.$$
$$\left. + (673c_2 - 246Fl)p_{22})(p_{21} + p_{22})] + (24p_{22} - 9p_{21})p_{22}^2 + (9p_{22} - 6p_{21})p_{21}^2\right\}. \qquad (6.4)$$

Согласно теореме 4 неравенство $A_{21} > 0$ является необходимым и достаточным условием устойчивости в третьем порядке. В случае $A_{21} < 0$ имеет место неустойчивость в строгой нелинейной постановке. Анализ показывает, что в зависимости от значений c_1, c_2, m, l, F коэффициент A_{21} может принимать тот или иной знак.

Отдельно рассмотрим случай $5c_2 - 2Fl = 0$, соответствующий вырождению $(\det \mathbf{P})^2 + (4c_1 - 7c_2)^2 = 0$. Имеем $c_1 = 7c$, $c_2 = 4c$, $Fl = 10c$. Для переопределения матрицы **P** вновь обратимся к уравнениям (2.7). Получим

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} i & \dfrac{ml^2}{30c} i \\ 0 & i \end{Vmatrix}$$

Учитывая, что $\omega^2 = 12c/(ml^2)$, находим из (6.4) $A_{21} = -2359/(94\omega) < 0$, поэтому исследуемое положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Д.* Динамические системы. М.; Л.: ОГИЗ, 1941. 320 с.
2. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
4. *Heinbockel J.N., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Soc. Indust. and Appl. Math. 1965. V. 13. № 2. P. 425–440 = Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1966. № 1. С. 3–17.
5. *Sevryuk M.B.* Reversible systems // Lect. Notes Math. B.: Springer, 1986. V. 1211. 319 p.
6. *Hale J.K.* Oscillations in nonlinear systems. N.Y.: McGraw-Hill, 1963. 180 p. = М.: Мир, 1966. 230.
7. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
8. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 647 с.
9. *Уитнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 523 с.
10. *Тхай В.Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 40–48.
11. *Marsden I.E., McCracken M.* The Hopf bifurcation and its Applications // N.Y.: Springer, 1976. 408 p. = = М.: Мир, 1980. 368 с.
12. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 279 с.
13. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 791–799.
14. *Ковалев А.М., Чудненко А.Н.* К устойчивости положения равновесия двумерной гамильтоновой системы в случае равных частот // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. № 11. С. 1010–1013.
15. *Куницын А.Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 4. С. 58–139.
16. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 239 с.
17. *Фурта С.Д.* Об асимптотических решениях систем дифференциальных уравнений в случае чисто мнимых собственных значений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 8. С. 1348–1351.
18. *Herrman G.* Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconcervative forces // Appl. Mech. Revs. 1967. V. 20. № 2. P. 103–108.
19. *Huston R.L., Kamman J.W.* Validation of finite segment cable models // Comput. and Struct. 1982. V. 15. № 6. P. 653–660.
20. *Захарова Е.Е., Красильников П.С., Макаров Б.В.* Оценка точности формирования лечебного дозного поля тросового внутриполосного гамма-терапевтического аппарата // Мед. техника. 1990. № 3. С. 5–9.
21. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.V.1991