Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 4, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. Л.М. Мархашов

О ГРУППОВОЙ КОНЦЕПЦИИI КЛЕЙНА В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Цель работы – показать, что физический принцип инвариантности и условие лагранжевости механики позволяют распространить концепцию Клейна, предложенную им для геометрии, на механику материальной точки. Результат позволяет подвести единую теоретическую базу под известные механики (классическую и релятивистскую), доказав их единственность, и указать способ конструирования новых альтернативных механик.

Это может оказаться полезным для истолкования новых экспериментальных факторов. Следует принять во внимание, что группы преобразований – один из наиболее естественных и универсальных инструментов исследования и классификации фундаментальных явлений в точном естествознании. Как математический объект группы могут быть теоретически изучены заранее и независимо от эксперимента. Поэтому физические принципы инвариантности, развивающие концепцию Клейна, можно рассматривать как один из наиболее простых и эстетически оправданных источников научных предсказаний, способных претендовать на достоверность.

Логический анализ схем построения классической и релятивистской механик приводит к констатации их существенного различия, отсутствия единой базы в основе этих наук. Между тем все части единой концепции для механики уже давно существуют. Они подготовлены классиками естествознания.

Клейн сформулировал свою концепцию для геометрии, позволяющую строить различные геометрии по общему правилу. Согласно идее Клейна, каждая геометрия представляет собой теорию инвариантов некоторой группы преобразований [1]. Идея аксиоматизации точного естествознания, в частности механики, была высказана Гильбертом (шестая проблема). Он предложил для этой цели использовать непрерывные группы и изучить все возникающие при этом математические альтернативы. Эйнштейн сформулировал свой принцип относительности, обобщающий принцип относительности Галилея. Но эффективно теоретико-групповое мировоззрение проникло в физику лишь с созданием Пуанкаре релятивистской динамики.

Именно Пуанкаре открыл фундаментальную роль в физике группы Лоренца.

Теоретико-групповой подход позволил сделать важные открытия в теоретической физике. Развивая его, Вигнер [2] провозгласил приоритет физических принципов инвариантности над физическими законами. Однако в механике идея инвариантности для обоснования известных и создания новых моделей не прижилась.

1. Постановка задачи. На базе теоретико-групповой концепции Клейна требуется построить механику материальной точки (и возможные ее модификации): определить основные понятия и найти способ построения динамического закона.

Введем основные понятия.

1°. Система отсчета $[x, t]$ – это физическое тело (тело отсчета), имеющее в каждой точке свои часы. Точки тела арифметизированы переменными x_1, x_2, x_3, которые могут рассматриваться как декартовы координаты. Время арифметизировано переменной t.

Движения относительно тела отсчета системы отнесены к единому времени, устанавливаемому по синхронизированным показаниям часов в этой системе.

2°. Инерциальные системы отсчета – это системы отсчета, которые преобразуются одна в другую преобразованиями заданной группы

$$G_n\colon\ x' = \varphi(x, t, \tau), \qquad t' = \psi(x, t, \tau); \qquad [x', t'] \xleftrightarrow{G_n} [x, t]$$

и изолированная точка, покоящаяся в каждой такой системе в некоторый момент времени, сохраняет это состояние.

3°. **Движение материальной точки по инерции – это движение изолированной материальной точки в любой инерциальной системе отсчета.**

Замечание. Не всякая группа преобразований пригодна для построения содержательной механики точки. Но среди подходящих групп преобразований имеются такие, для которых движения по инерции не являются ни прямолинейными, ни равномерными. Это означает, что в таких механических моделях закон инерции Галилея не имеет места, т.е. "неподвижный" инерциальный наблюдатель будет видеть подвижные инерциальные тела отсчета не твердыми, а расплывающимися.

Пусть выполнены следующие условия: а) конструируемая механика является лагранжевой и функция Лагранжа описывает "пустое" пространство – время; б) эта механика подчиняется принципу инвариантности относительно заданной группы преобразований.

Из условия а) следует, что движения материальной точки в любой инерциальной системе отсчета должны описываться уравнениями Лагранжа, в частности движения по инерции, – уравнениями Лагранжа с нулевыми правыми частями ("ковариантность"). Из условия б) следует, что уравнения движения в любой инерциальной системе отсчета должны иметь одну и ту же функцию Лагранжа ("инвариантность").

После того как функция Лагранжа будет найдена, закон динамики изобразится уравнениями Лагранжа с проекциями силы, действующей на точку, в правых частях. Одновременно это позволит построить закон преобразования силы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Таким образом, задача приводится к поиску функции Лагранжа.

2. Результат. Пусть n-мерная группа преобразований G_n, действующая в четырехмерном вещественном пространстве $R^4 = \{x_1, x_2, x_3, t\}$ задана своей алгеброй Ли A_n и выполнены условия ковариантности и инвариантности. Тогда наиболее общая функция Лагранжа L определится уравнениями

$$X_i^* L = (a_i - d\eta_i/dt)L + d\varphi_i(x, t)/dt, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

$$X_i\varphi_j - X_j\varphi_i = \overset{e}{c_{ij}}\varphi_e + a_i\varphi_j - a_j\varphi_i + d_{ij} \tag{2.2}$$

$$\overset{e}{c_{ij}} d_{eh} + \overset{e}{c_{jh}} d_{ei} + \overset{e}{c_{hi}} d_{ej} = a_i d_{jh} + a_j d_{hi} + a_h d_{ij} \tag{2.3}$$

$$\overset{e}{c_{ij}} a_e = 0; \qquad e, j, h = 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Здесь операторы

$$X_i^* = X_i + \overset{i}{\zeta}_{\dot{x}_\alpha}(t, x, \dot{x})\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

суть продолжения инфинитезимальных операторов

$$X_i = \eta_i(t, x)\frac{\partial}{\partial t} + \overset{i}{\xi}_\alpha(t, x)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

на компоненты скорости $\dot{x}_\alpha$, вычисляемые по стандартным формулам

$$\overset{i}{\zeta}_{\dot{x}_\alpha} = \frac{d\overset{i}{\xi}_\alpha}{dt} - \dot{x}_\alpha\frac{d\eta_i}{dt}$$

Множество операторов X_i образует базис алгебры Ли A_n группы G_n

$$A_n\colon\ X_1, \ldots, X_n \quad [X_i, X_j] = \overset{e}{c_{ij}} X_e$$

где φ_i – произвольные решения уравнений (2.2), a_i, d_{jh} – произвольные постоянные, удовлетворяющие соотношениям (2.3), (2.4). По повторяющимся индексам производится суммирование.

3. Упрощение результата. Введем обозначения

$$\Sigma_a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad \Sigma_\eta = \sum_{i=1}^{n} (d\eta_i/dt)^2$$

Утверждение. Пусть выполнены условия:

1) операторы $X_1, \ldots, X_4$ образуют базис идеала A_4 в алгебре

A_n: $[X_\alpha, X_l] = c_{\alpha l}^{\beta} X_\beta$; $\quad \alpha, \beta = 1, \ldots, 4$.

2) из соотношений $c_{kl}^{p}\delta_p = 0$ следует $\delta_p = 0$; $k, l, p = 5, \ldots, n$;

3) группа G_4, которой соответствует идеал A_4, локально транзитивна: $\operatorname{rank} \| \xi_\alpha^A, \eta_A \| = 4$.

Тогда, без нарушения общности, для почти всех значений $a \neq 0$ можно принять:

если $\Sigma_a \neq 0$, $\Sigma_\eta \neq 0$, то $X_i^* L = (a_i - d\eta_i/dt)L$;

если $\Sigma_a \neq 0$, $\Sigma_\eta = 0$, то $L = 0$;

если $\Sigma_a = 0$, $\Sigma_\eta \neq 0$, то $X_i^* L = -(d\eta_i/dt)L + d\varphi_i^*/dt$;

если $\Sigma_a = 0$, $\Sigma_\eta = 0$, то $X_i^* L = d\varphi_i^*/dt$.

Здесь $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ – какое-либо частное решение уравнений (2.2).

Заметим, что условия утверждения не являются необходимыми, а способ упрощения–единственным.

Примеры: группы Галилея и Лоренца. Эти группы содержат по 10 параметров и удовлетворяют указанным выше условиям. Они включают в качестве подгруппы одну и ту же группу G_7: объединение группы движений евклидова пространства и группы трансляций времени t. Нормальный делитель G_4 обеих групп, которому соответотвует идеал A_4, образован трансляциями координат и времени.

В алгебру группы Галилея, кроме подалгебры A_7, соответствующей группе G_7, входят операторы

$$X_8 = t\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad X_9 = t\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_{10} = t\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Уравнения (2.1) – (2.4) имеют единственное решение (с точностью до несущественной аддитивной постоянной), соответствующее классическому выражению кинетической энергии $L_G = 1/2mv^2$.

В алгебру группы Лоренца, кроме подалгебры A_7, входят операторы (c – скорость света)

$$X_8 = t\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_9 = t\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad X_{10} = t\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_3}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$$

Уравнения (2.1) – (2.4) для функции Лагранжа L_L с использовщанием предельного условия $\lim\limits_{c \to \infty} L_L = L_G$ дают решение, которое с точностью до несущественной аддитивной постоянной является единственным. Это функция Лагранжа в релятивистской механике: $L_L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Таким образом, существование и единственность классической и релятивистской механик оказались простым следствием предположений об их лагранжевости, галилеевой и лоренцовой инвариантности.

Замечание. Приложение принципов инвариантности естественно не ограничивается рассмотренными примерами. К содержательным механическим моделям приводят, например, конформная группа, группа движений пространства де-Ситтера и ее обобщение. Для этих групп автором найдены: движения по инерции, допускаемые конформной группой [3, 4], лагранжиан для пространства, ассоциированного с пространством де-Ситтера [5]

$$L = -mc^2(1 + \alpha t)^{-1}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad \alpha = \mathrm{const}$$

и его предельно широкое (в определенном смысле) обобщение

$$L = -mc^2(1+\alpha t+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3)^{-1}\sqrt{1-v^2/c^2}, \qquad \beta_i = \mathrm{const}$$

(последний результат здесь публикуется впервые).

Новые подходящие группы преобразований могут и не быть, подобно группе Галилея, группами движений какого-либо четырехмерного риманова пространства – времени. В этом случае невозможно пользоваться методами римановой геометрии, тогда как подход Клейна остается в силе.

4. **Доказательства.** *Операторная техника.* Алгебра Ли A_n и ее продолжение на компоненты скорости были определены (разд. 2). Второе продолжение

$$X_i^{**} = X_i^* + \zeta_i(t,x,\dot{x},L)\,\partial/\partial L$$

это продолжение на новую переменн ю L. Компоненты ζ_i заранее неизвестны и подлежат вычислению в дальнейшем. Но известно правило, по которому при помощи функций ζ_i строится третье продолжение

$$X_i^{***} = X_i^{**} + \overset{i}{\zeta}_{P_\epsilon}\partial/\partial P_\epsilon,\ \epsilon = 1,\ldots,7$$

на частные производные функции L по переменным $t, x, \dot{x}$. Функции $\overset{i}{\zeta}_{P_\epsilon}$ вычисляются при помощи условия инвариантности дифференциальной формы

$$dL = P_\alpha dx_\alpha + P_{\alpha+3}d\dot{x}_\alpha + P_4 dt$$

Таким же образом строится продолжение на частные производные второго порядка.

Продолжение на компоненты ускорения материальной точки строятся аналогично продолжению на компоненты скорости.

Операторы, продолженные на все нужные переменные, обозначим X_i'.

Условия ковариантности дифференциальных уравнений

$$\Phi_\alpha(t,x,\dot{x},L,P,\ldots) = 0 \tag{4.1}$$

выражаются соотношениями

$$X_i'\Phi_\alpha \mid_{\Phi_\alpha=0} = 0 \tag{4.2}$$

При этом уравнения (4.1) рассматриваются как алгебраические относительно всех входящих в них переменных $t, x, \dot{x}, L, P, \ldots$.

Условия инвариантности (функция Лагранжа одна и та же во всех инерциальных системах отсчета) записывается в форме

$$X_i^{**}(L - L(t,x,\dot{x}))\mid_{L=L(t,x,\dot{x})} = 0 \tag{4.3}$$

Получение формул разд. 2. Ближайшая задача – вычисление функций ζ_i из условия ковариантности уравнений Лагранжа.

Для этого, согласно правилу, запишем последние в виде системы алгебраических уравнений

$$\Phi_\alpha \equiv P_{\alpha+3,4} + \dot{x}_\beta P_{\alpha+3,\beta} + \ddot{x}_\beta P_{\alpha+3,\beta+3} - P_\alpha = 0; \qquad \alpha,\beta = 1,2,3$$

$$P_{\alpha+3,4} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\alpha\partial t}, \qquad P_{\alpha+3,\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\alpha\partial x_\beta}, \qquad P_{\alpha+3,\beta+3} = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}_\alpha\partial\dot{x}_\beta}.$$

Затем используем условия ковариантности (4.2). После упрощений получим уравнения

$$\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial L^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\zeta_i}{\partial\dot{x}_\alpha\partial\dot{x}_\beta} = 0, \qquad \frac{\partial^2\zeta_i}{\partial L\partial\dot{x}_\alpha} + \frac{\partial\eta_i}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial t\,\partial\dot{x}_\alpha} + \dot{x}_\beta\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial\dot{x}_\alpha\partial x_\beta} - \frac{\partial\zeta_i}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial L\,\partial t} + \dot{x}_\alpha\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial L\,\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2\eta_i}{\partial t^2} + 2\dot{x}_\alpha\frac{\partial^2\eta_i}{\partial x_\alpha\partial t} + \dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta\frac{\partial^2\eta_i}{\partial x_\alpha\partial x_\beta} = 0$$

После интегрирования этой системы найдем

$$\zeta_i(t,x,\dot{x};L) = \left(a_i - \frac{d\eta_i}{dt}\right)L + \frac{d\varphi_i(t,x)}{dt} \tag{4.4}$$

Здесь a_i – произвольные постоянные, φ_i – произвольные дифференцируемые функции.

Из коммутационных соотношений $[X_i^{**}, X_j^{**}] = c_{ij}^{e} X_e^{**}$ получим уравнения

$$X_i^* \frac{d\eta_j}{dt} - X_j^* \frac{d\eta_i}{dt} - c_{ij}^{e}\left(a_e - \frac{d\eta_e}{dt}\right) = 0$$

$$X_i^* \frac{d\varphi_j}{dt} - X_j^* \frac{d\varphi_i}{dt} - c_{ij}^{e} \frac{d\varphi_e}{dt} - \left(a_i - \frac{d\eta_i}{dt}\right)\frac{d\varphi_j}{dt} + \left(a_j - \frac{d\eta_j}{dt}\right)\frac{d\varphi_i}{dt} = 0$$

При помощи легко доказываемого коммутационного соотношения

$$X_i^* \frac{d\psi(t,x)}{dt} - \frac{d}{dt} X_i \psi(t,x) = -\frac{d\eta_i}{dt}\frac{d\psi(t,x)}{dt}$$

справедливого для произвольной функции $\psi(t,x)$, получим уравнения (2.4) и (2.2). Постоянные интегрирования d_{ij} должны удовлетворять условиям полноты системы (2.2) и могут быть найдены в форме

$$X_i(X_j\varphi_h - X_h\varphi_j) + X_j(X_h\varphi_i - X_i\varphi_h) + X_h(X_i\varphi_j - X_j\varphi_h) = X_i\chi_{jh} + X_j\chi_{hi} + X_h\chi_{ij}$$

где χ_{ij} – правые части уравнений (2.2). После упрощений получаем уравнения (2.3). Наконец, условия инвариантности (4.3) при учете выражений (4.4) приводят к уравнениям (2.1).

Доказательство утверждения из разд. 3. Докажем сначала, что при выполнении условий утверждения наиболее общее решение уравнений (2.2) имеет вид

$$\varphi_i = \varphi_i^* + X_i\nu_1 - a_i\nu_1, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4.5}$$

где $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ – какое-либо частное решение этих уравнений, ν_1 – произвольная дифференцируемая функция. Доказательство формул (4.5) разбивается на семь простых этапов.

1°. Из соотношений (2.4) и условий 1, 3 утверждения следует существование функции μ, вычисляемой по формулам $X_\alpha \ \mu = a_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, 4$.

2°. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – первые четыре функции произвольно фиксированного решения уравнений (2.2), отвечающие идеалу A_4 алгебры A_n. Тогда из существования функции μ следует существование функции ν: $X_\alpha \nu = (\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^*)e^{-\mu}$.

3°. Остальные функции $\varphi_5, \ldots, \varphi_n$ фиксированного решения заменим новыми переменными $\gamma_5, \ldots, \gamma_n$ по формулам $\varphi_k = \varphi_k^*(X_k\nu + \gamma_k)$; $\quad k = 5, \ldots, n$.

Из соответствующих уравнений для φ_k следуют уравнения для γ_k: $X_\alpha\gamma_k = (X_k\mu - a_k)X_\alpha\nu$.

4°. Обозначим $a_k^* = X_k\mu$. Так как функция μ существует, выполняются условия полноты системы n уравнений, куда она входит. Это приводит к коммутационным соотношениям $X_\alpha a_k^* = c_{\alpha k}^{\beta} a_\beta =$ $= 0$, которым можно удовлетворить лишь постоянными $a_k^* = \mathrm{const}$.

5°. Из постоянства a_k^* и условия 2 утверждения следует $a_k^* = a_k$.

Но тогда из уравнений для γ_k и условия 3 утверждения следует, что $\gamma_k = \mathrm{const}$.

6°. Для величин γ_k выполняются уравнения $X_k\gamma_l - X_l\gamma_k = c_{kl}^{p}\gamma_p$; $k, l, p = 5, \ldots, n$. Так как $\gamma_k =$ $= \mathrm{const}$, из условия *2*. Утверждения следует $\gamma_k = 0$.

7°. Итак получено, что все функции φ_i, которые по предположению образуют заданное решение уравнений (2.2), представимы в однотипной форме

$$\varphi_i = \varphi_i^* + e^{\mu}X_i\nu = \varphi_i^* + X_i\nu_1 - a_i\nu_1, \qquad \nu_1 = \nu e^{\mu}$$

Формулы (4.5) доказаны. С их помощью уравнения (2.1) могут быть представлены в форме

$$X_i^*\left(L - \frac{d\nu_1}{dt}\right) = \left(a_i - \frac{d\eta_i}{dt}\right)\left(L - \frac{d\nu_1}{dt}\right) + \frac{d\varphi_i^*}{dt}$$

Отсюда следует, что в формулах (2.1) общее решение $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнений (2.2) без нарушения общности может быть заменено частным $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$.

Покажем теперь, что если не все постоянные a равны нулю, то все функции $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ можно принять постоянными.

Обозначим эти предполагаемые постоянные через $b_1, \ldots, b_n$. Пусть $a_1 \neq 0$. Тогда из уравнений (2.2) получим

$$\chi_{1i}^{0} \equiv c_{1i}^{e} b_e + a_1 b_i - a_i b_1 + d_{1i} = 0; \qquad i, e = 2, \ldots, n$$

Если $b_1 = 0$, то из этих $n-1$ уравнений можно найти все остальные числа b_i. Действительно, если $d_{1i} = 0$, то можно принять $b_i = 0$. Если $d_{1i} \neq 0$, то b_i можно найти для всех тех вещественных значений a_1, для которых определитель системы не равен нулю. Очевидно, число значений a_1, для которых этого сделать нельзя, не превосходит $n-1$. Таким образом, для всех почти значений a, будет $\chi^0_{1i} = 0$.

Теперь покажем, что найденные значения b_i обращают в нуль остальные величины $\chi^0_{ij} = \chi_{ij}\big|_{\varphi_e = b_e}$ и, значит, удовлетворяются остальные уравнения (2.2). Воспользуемся уравнениями (2.3). Заменим в них числа d_{ij} числами χ^0_{ij} по формулам

$$d_{ij} = \chi^0_{ij} - \overset{e}{c}_{ij} b_e - a_i b_j + a_j b_i$$

Убедимся, что числа χ^0_{ij} удовлетворяют тем же уравнениям, что и d_{ij}

$$\overset{e}{c}_{ij}\chi^0_{eh} + \overset{e}{c}_{jh}\chi^0_{ei} + \overset{e}{c}_{hi}\chi^0_{ej} = a_i\chi^0_{jh} + a_j\chi^0_{hi} + a_h\chi^0_{ij}$$

Положим в них $e = 1$. Получим

$$\overset{e}{c}_{j1}\chi^0_{ei} + \overset{e}{c}_{1i}\chi^0_{ej} = a_1\chi^0_{ij} \tag{4.6}$$

Это система однородных линейных уравнений относительно неизвестных величин χ^0_{ij} $(i, j \neq 1)$. Очевидно, уравнений (4.6) столько же, сколько и неизвестных. Для всех тех вещественных значений параметра $a_1 \neq 0$, для которых определитель системы (4.6) не обращается в нуль, будет $\chi^0_{ij} = 0$. Этому условию может не удовлетворять не более чем $(n-1)(n-2)/2$ значений a_1.

Примеры. Рассмотрение группы движений евклидова пространства и группы трансляций времени, входящих в качестве подгрупп как в группу Галилея, так и в группу Лоренца, приводит к выводу, что соответствующие функции Лагранжа в обоих случаях зависят только от величины скорости $L = f(v^2)$, $v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$.

Группа Галилея. В нетривиальном случае, когда $a_i = 0$, последние три уравнения системы (2.1) имеют вид

$$\frac{\partial L_G}{\partial \dot{x}_1} = a_{8\beta}\dot{x}_\beta + a_{80}, \qquad \frac{\partial L_G}{\partial \dot{x}_2} = a_{9\beta}\dot{x}_\beta + a_{90}, \qquad \frac{\partial L_G}{\partial \dot{x}_3} = a_{10,\beta}\dot{x}_\beta + a_{10,0}.$$

Так как функция Лагранжа L зависит только от скорости, эти уравнения приводятся к одному

$$2f'(v^2) = a_{81} = a_{92} = a_{10,3} = m = \mathrm{const}$$

Отсюда получаем $L_G = 1/2mv^2 + k$. Аддитивная постоянная k, очевидно, не существенна.

Группа Лоренца. Структурные константы группы таковы, что с необходимостью $a_1 = \ldots = a_{10} = 0$. Последние три уравнения системы имеют вид

$$X_8^* L_L = -\dot{x}_1 L_L + \frac{d\varphi_8}{dt}, \qquad X_9^* L_L = -\dot{x}_2 L_L + \frac{d\varphi_9}{dt}, \qquad X_{10}^* L_L = -\dot{x}_3 L_L + \frac{d\varphi_{10}}{dt}.$$

Так как функция Лагранжа L_L зависит только от скорости, эти уравнения приводятся к одному

$$2(c^2 - v^2) f'(v^2) + f(v^2) = b', \qquad b' = \mathrm{const}$$

Его решение

$$L_L = b_0\sqrt{1 - v^2/c^2} + b'$$

при учете предельного условия $\lim\limits_{c \to \infty} L_L = L_G$ совпадает с точностью до несущественной аддитивной постоянной с функцией Лагранжа L_L в релятивистской механике

$$L_L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Автор благодарит В.В. Румянцева, В.Ф. Журавлева, С.Я. Степанова, В.С. Сергеева, Г. Хмелевскую-Плотникову, Ж. Анрара за участие в обсуждении пролбем, затронутых в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн Ф.* Сравнительное обозрение новейших геометрических методов (Эрлангенская программа) / Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. С. 399–434.
2. *Wigner E.* Symmetry and conservation Lavs // Phys. Today. 1964. V. 17. № 3. P. 34–40.
3. *Мархашов Л.М.* О конформно-инвариантных движениях материальной точки. ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 3–13.
4. *Мархашов Л.М.* О релятивистских аналогах динамики материальной точки. ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 382–395.
5. *Мархашов Л.М.* Об одной возможной альтернативе в релятивистской механике / Сб. тр. 5-й Всесоюз. конф. по аналитической механике, теории устойчивости и управлению движением. М.: ВЦ АН СССР, 1990. С. 44–52.

Москва

Поступила в редакцию
14. XI. 1991