

Из приведенных формул видно, что все сингулярные напряжения на поверхности выражаются через напряжение  $\sigma^{11}(A)$  в торце иглы. Поэтому некоторые качественные результаты можно получить, исследуя только  $\sigma^{11}(A)$ .

Напряжение  $\sigma^{11}(A)$ , направленное по большей оси, в торце иглы является (по модулю) наибольшим и может быть как одного знака с внешним полем, так и противоположного — при малых  $\sigma_0^{11}$  и достаточно больших  $\sigma_0^{22}$ ,  $\sigma_0^{33}$ . Значение  $\sigma^{11}(A)$  зависит только от упругих постоянных, характеризующих свойства среды в направлении оси иглы, причем  $\sigma^{11}(A)$  возрастает с уменьшением модуля Юнга  $E$ , и увеличением модулей сдвига  $G_{12}$ ,  $G_{13}$ .

При переходе от иглы ( $\xi \ll 1$ ) к вытянутому диску ( $\xi \ll 1$ ) напряжения на всей поверхности возрастают пропорционально  $\xi^{-1}$ .

Исследование зависимости напряжений от нормали к поверхности показывает, что качественная картина распределения напряжений на игле в ортотропной среде может отличаться от изотропного случая. Для изотропной среды напряжения  $\sigma_{\alpha\alpha}(n)$  ( $\alpha=1, 2, 3$ ) достигают наибольшего значения в торце, а в  $\sigma_{12}(n)$ ,  $\sigma_{13}(n)$  имеет место «эффект всплеска» [3]. Для ортотропной среды поведение напряжения  $\sigma_{11}(n)$ , нормального к поверхности, аналогично изотропному случаю, а в напряжениях  $\sigma_{22}(n)$ ,  $\sigma_{33}(n)$  так же, как и на полой игле, [5], возможен сдвиг максимума от торца иглы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 165–170.
2. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде. // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 308–315.
3. Кунин И. А., Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде. // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 524–531.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
5. Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г. Полая эллипсоидальная игла в ортотропной упругой среде. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1017–1021.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
14.V.1990

УДК 539.3

© 1992 г. М. А. Сумбатьян, Э. А. Троян

#### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ ВЫПУКЛОГО ДЕФЕКТА ПО РАССЕЯННОМУ ВОЛНОВОМУ ПОЛЮ В ЛУЧЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматривается задача восстановления формы выпуклого дефекта в твердом теле по результатам измерения амплитуды обратного рассеяния ультразвуковой волны. Предполагается, что характерные размеры дефекта гораздо больше длины волны, что позволяет рассматривать данную задачу в лучевом приближении. Было показано [1], что в рамках такого подхода исследуемую задачу можно свести к известной проблеме Минковского: по заданной гауссовой кривизне поверхности восстановить форму замкнутой выпуклой поверхности. Доказано [2], что при определенных условиях существует единственная выпуклая поверхность, имеющая гауссовой кривизной заданную непрерывную функцию. Однако алгоритм, позволяющий построить указанную выпуклую поверхность, отсутствует. В данной работе разрабатывается численный метод, позволяющий реализовать восстановление искомой выпуклой поверхности. В качестве примеров рассматривается восстановление эллипсоидов вращения с различными эксцентриситетами, а также поверхности, близкой к цилиндрической.

1. Пусть в упругой среде имеется дефект в виде полости неизвестной формы. Один из наиболее распространенных методов обнаружения и распознавания таких дефектов заключается в использовании ультразвукового неразрушающего контроля. Он позволяет осуществлять облучение неизвестной границы дефекта, являющейся замкнутой поверхностью  $S$ , плоскими ультразвуковыми волнами под всевозможными углами падения, а затем измерять амплитуду отраженной эхо-волны в дальней зоне. В данной работе ограничимся случаем, когда искомая поверхность  $S$  — гладкая и выпуклая. Можно показать, что при облучении в эхо-режиме при использовании существующих ультразвуковых преобразователей один из двух типов волн (продольных или поперечных) всегда будет преобладать над другим [3]. В силу этого может быть доказано, что амплитуда отраженной волны в лучевом приближении имеет такой же вид, как и в акустическом случае (т. е. в среде, где могут распространяться волны лишь одного типа). Указанная амплитуда выражается через гауссову кривизну поверхности в точке, для которой направление нормали совпадает с направлением облучения [1]:

$$A = c\sqrt{\gamma}, \quad \gamma = R_1 R_2 \quad (1.1)$$

где  $c$  — некоторая постоянная. Таким образом, в рамках описанного подхода исследуемая задача сводится к проблеме Минковского, известной в дифференциальной геометрии: по заданной гауссовой кривизне восстановить форму замкнутой гладкой выпуклой поверхности [2, 4].

Для дальнейшего потребуется следующая

*Теорема 1* [2]. Пусть  $\gamma(\alpha)$  — положительная непрерывная функция, такая, что

$$\int_{\Omega} \gamma(\alpha) \bar{n}(\alpha) d\alpha = 0 \quad (1.2)$$

где  $\Omega$  — полный телесный угол трехмерного пространства. Тогда существует единственная замкнутая выпуклая гладкая поверхность, для которой  $\gamma^{-1}(\alpha) = (R_1 R_2)^{-1}$  при любом  $\alpha \in \Omega$  является гауссовой кривизной в точке с нормалью  $\bar{n}(\alpha)$ .

Конкретное построение искомой поверхности можно осуществлять разными способами. Наиболее эффективным представляется подход, основанный на использовании понятия опорной функции.

Введем вспомогательную функцию  $P(\alpha)$  [4], связанную с расстоянием  $p(\alpha)$  от начала координат до касательной плоскости с нормалью  $\alpha$  следующим образом:

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r p(\alpha_1/r, \alpha_2/r, \alpha_3/r) \quad (1.3)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad r = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}$$

Здесь  $\alpha$  — вектор внешней нормали к поверхности. Функция  $P(\alpha)$  удовлетворяет следующему соотношению [4]:

$$P_{11}P_{22} + P_{11}P_{33} + P_{22}P_{33} - P_{12}^2 - P_{13}^2 - P_{23}^2 = \gamma(\alpha) \quad (1.4)$$

$$(P_{ij} = \partial^2 P / \partial \alpha_i \partial \alpha_j; \quad i, j = 1, 2, 3)$$

где  $\gamma(\alpha) > 0$  — величина, обратная известной гауссовой кривизне. Таким образом, задача свелась к решению нелинейного дифференциального уравнения (1.4) в частных производных.

2. В отличие от исследуемой в данной работе [4], сходная проблема восстановления выпуклой поверхности по средней кривизне сводится к линейному уравнению в частных производных для функции  $P(\alpha)$ , решение которого строится разложением в ряд по сферическим функциям. Кроме того, что такой подход неприменим к нелинейному уравнению вида (1.4), он обладает малой эффективностью для поверхностей, сильно отличающихся от сферической. В данной работе предлагается совершенно другой метод.

Перейдем в уравнении (1.4) от декартовых координат к сферическим, используя соотношения

$$\begin{aligned} P_1 &= P_r \sin \theta \cos \varphi + P_\theta \cos \theta \cos \varphi / r - P_\varphi \sin \varphi / (r \sin \theta) \\ P_2 &= P_r \sin \theta \sin \varphi + P_\theta \cos \theta \sin \varphi / r + P_\varphi \cos \varphi / (r \sin \theta) \\ P_3 &= P_r \cos \theta - P_\theta \sin \theta / r \quad (P_i = \partial P / \partial \alpha_i, \quad i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Аналогично вычисляются вторые производные  $P_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ).

При учете известных соотношений [4], определяющих свойства функции  $P(\alpha)$ , имеем

$$\partial P / \partial r = P / r, \quad \partial P_i / \partial r = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

Исходное уравнение (1.4) справедливо во всем пространстве переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Переход к сферическим координатам с использованием соотношений (2.2) позволяет избавиться от производных по  $r$ . Это приводит к тому, что получающееся нелинейное дифференциальное уравнение достаточно решить на единичной сфере (при  $r=1$ ).

Для решения указанного уравнения на единичной сфере используются разностные выражения для первых и вторых производных на сетке, состоящей из параллелей и меридианов. Принимая шаг сетки одинаковым по  $\theta$  ( $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ) и по  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi_j \leq 2\pi$ ) и равным  $h = \pi / N$ , имеем в узле  $(i, j)$

$$\begin{aligned} P_\theta &= (P^{i+1, j} - P^{i-1, j}) / (2h), \quad P_\varphi = (P^{i, j+1} - P^{i, j-1}) / (2h) \\ P_{\theta\theta} &= (P^{i+1, j} - 2P^{i, j} + P^{i-1, j}) / h^2, \quad P_{\varphi\varphi} = (P^{i, j+1} - 2P^{i, j} + P^{i, j-1}) / h^2 \\ P_{\theta\varphi} &= (P^{i+1, j+1} - P^{i-1, j+1} - P^{i+1, j-1} + P^{i-1, j-1}) / (4h^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подстановка соотношений (2.1) и (2.3) в (1.4) приводит к нелинейной системе алгебраических уравнений

$$AP = \gamma \quad (2.4)$$

Для того чтобы на двумерной сетке  $P^{ij}$  получить одномерный вектор неизвестных  $P^k$ , необходимо перенумеровать узлы  $(\theta_i, \varphi_j)$  в виде одномерного массива. Предлагается следующая процедура нумерации узлов. Для каждого  $\varphi_j$  последовательная нумерация соответствует возрастающему углу  $\theta_i$ :  $h \leq \theta_i \leq \pi - h$ . Далее процесс переходит на следующее значение  $\varphi_{j+1}$  по возрастанию. Последними двумя узлами являются два полюса. В итоге размерность системы (2.4) равна  $2N(N-1)+2$ . К этой системе применяется метод Ньютона - Канторовича, в котором последующее приближение  $P_{n+1}$  выражается через  $P_n$  следующим образом:

$$P_{n+1} = P_n + z_n \quad (2.5)$$

причем  $z_n$  находится из линейной алгебраической системы

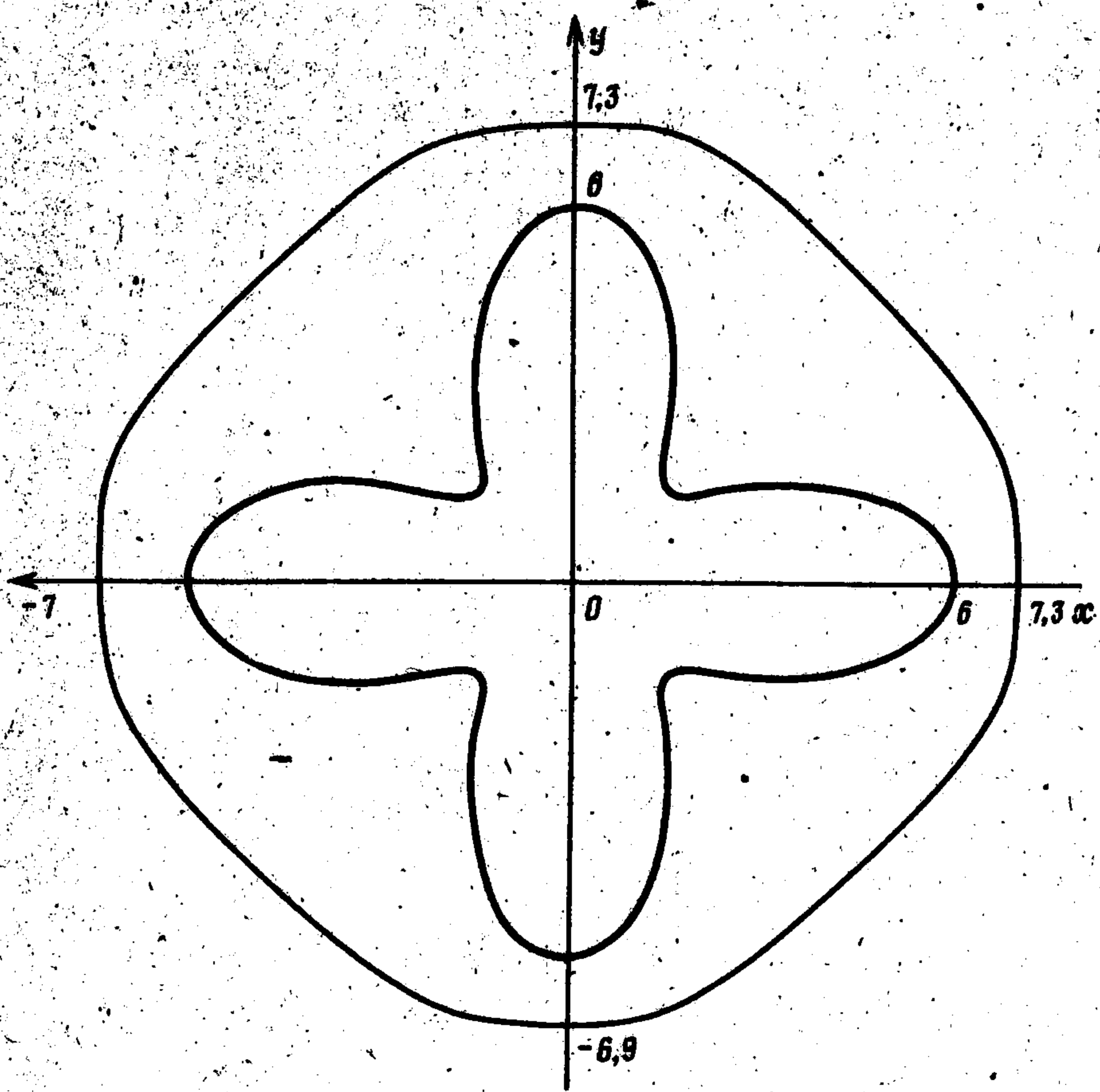
$$Jz_n = \gamma - AP_n \quad (2.6)$$

Здесь  $J=A'$  - якобиан системы (2.4). Структура сильно разреженной матрицы  $J$  такова: имеется диагональная лента полушириной  $N$  и присутствуют последние две строки и два последних столбца. Таким образом, линеаризованная система (2.6) не является системой с ленточной матрицей. Следовательно, метод ее решения, использующий разреженность матрицы  $J$ , гораздо более сложен, чем простая прогонка.

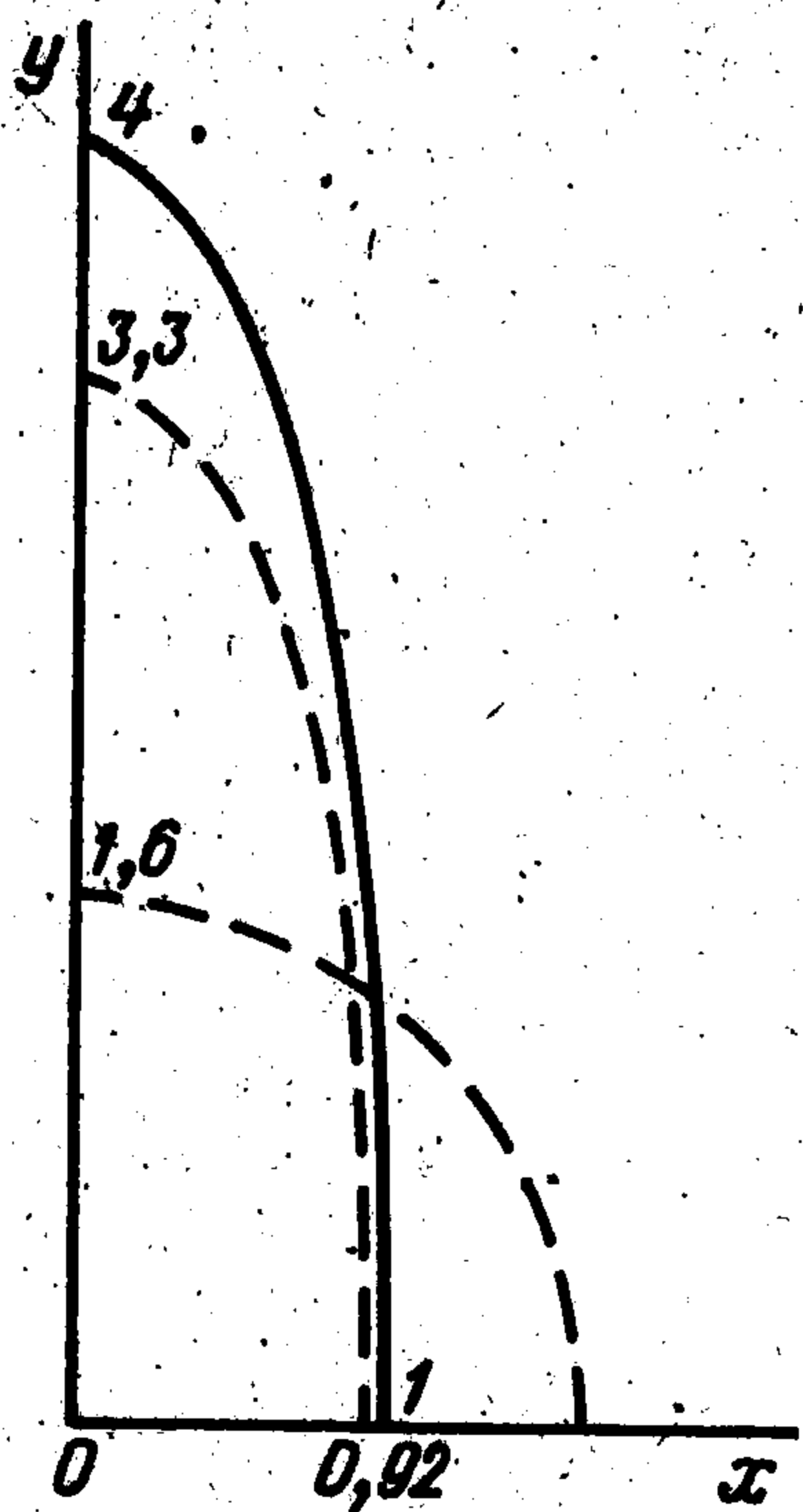
Авторы использовали известные методы решения разреженных систем [5]. Практическая реализация показала хорошую сходимость предлагаемого подхода для всех рассмотренных выпуклых поверхностей. При этом время счета на IBM PC AT не превосходит 30 с.

Рассматриваемый в данной работе метод восстановления формы выпуклого дефекта, применимый в случае очень коротких волн, позволяет сделать один интересный физический вывод.

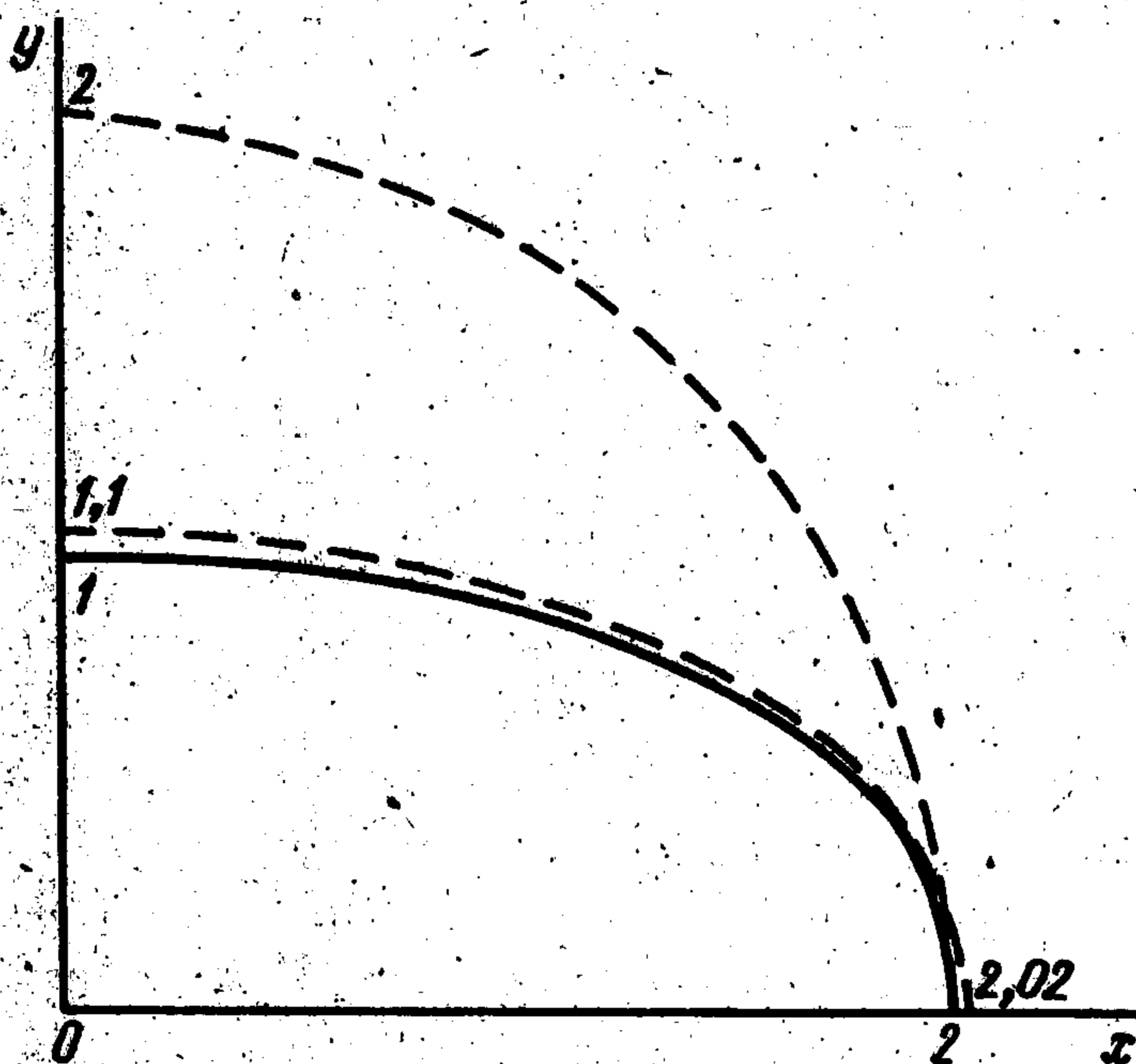
Предположим, что в этом коротковолновом диапазоне известна амплитуда обратного рассеяния  $A(\alpha)$  от произвольного невыпуклого препятствия ( $A(\alpha) > 0$ ). Очевидно, что такая функция всегда непрерывна [6]. Введем вспомогательную функ-



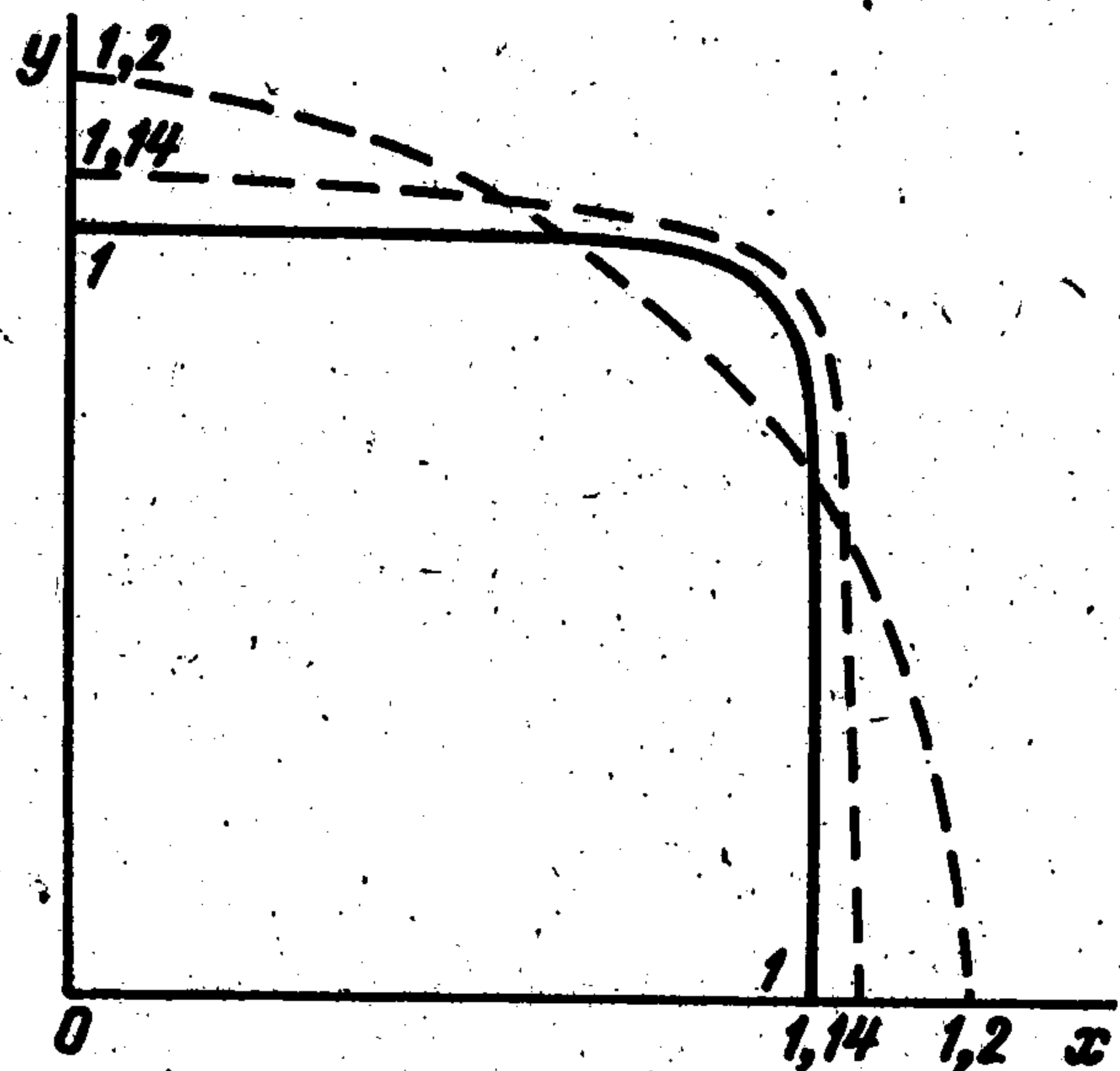
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

цию  $\gamma$ , определяемую по формуле (1.1):

$$\gamma(\alpha) = A^2(\alpha)/c^2 \quad (2.7)$$

Результат теоремы 1 говорит о том, что при выполнении условия (1.2) существует выпуклая поверхность с гауссовой кривизной  $1/\gamma$ . Следовательно, в рамках коротковолновой асимптотики имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть  $A(\alpha)$  – амплитуда обратного рассеяния от произвольного объекта. Если

$$\int_0^{\alpha} \bar{n}(k) A^2(\alpha) d\alpha = 0 \quad (2.8)$$

то кроме истинного объекта существует еще и некоторая выпуклая поверхность, диаграмма отражения от которой совпадает с функцией  $A(\alpha)$ .

*Следствие.* Если истинное препятствие симметрично относительно начала координат, то результат теоремы 2 заведомо верен.

В самом деле, в этом случае интеграл (2.8) всегда равен нулю, так как в силу симметрии вклады интегралов с положительными и отрицательными значениями взаимно сокращаются. Заметим, что симметрия исходного объекта относительно осей координат является частным случаем симметрии относительно начала координат.

На фиг. 1 показаны два двумерных контура, неразличимых на высоких частотах;  $2\lambda$  — характерный размер истинного объекта,  $\lambda$  — длина волны ( $\lambda = 2\pi$ ).

3. Остановимся на случае двумерной задачи, тогда амплитуда рассеянной волны выражается по формуле [1]

$$A = 1/2\sqrt{\pi k \rho(\alpha)} \quad (3.1)$$

где  $k$  — волновое число. Следовательно, в этом случае задача состоит в нахождении выпуклого контура  $l$  по кривизне  $[\rho(\alpha)]^{-1}$  ( $\rho > 0$ ).

Как и в трехмерном случае, задача нелинейна. Тем не менее переход к функции  $P(\alpha)$  сводит проблему к линейной, что само по себе примечательно, и по-видимому, не описано в литературе. В самом деле, имеет место [4] соотношение

$$dx_i + \rho d\alpha_i = 0, \quad i = 1, 2$$

Подставляя сюда выражение [4]  $x_i = P_i(\alpha)$ , получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно  $d\alpha_1, d\alpha_2$ .

Определитель этой системы должен равняться нулю, т. е.

$$\rho^2 + (P_{11} + P_{22})\rho + P_{11}P_{22} - P_{12}^2 = 0 \quad (3.2)$$

Можно показать, что свободный член в уравнении (3.2) равен нулю в силу свойств однородности [4]. Следовательно, имеем

$$\rho(\alpha) = -(P_{11} + P_{22}) \quad (3.3)$$

Как и в трехмерном случае, в полярной системе координат  $\alpha_1 = r \cos \theta, \alpha_2 = r \sin \theta$  приходим к уравнению

$$P_{\theta\theta}(\theta) + P(\theta) = -\rho(\alpha) \quad (3.4)$$

на единичной окружности. Описанный выше конечно-разностный подход здесь приводит к матрице, у которой кроме трехдиагональной главной ленты еще присутствуют по одному ненулевому элементу в правом верхнем и левом нижнем углах.

В качестве примеров на фиг. 2–4 изображены результаты восстановления поверхностей дефектов в виде эллипсоидов с соотношениями полуосей 1:4 и 2:1, а также поверхности, близкой к круговому цилиндру (диаметр основания равен высоте цилиндра). В силу того, что эти тестовые примеры соответствуют осесимметричным поверхностям, для указанных поверхностей изображены лишь осевые сечения. При этом в силу симметрии самих осевых сечений они приведены лишь в первом квадранте. Заметим, что на фиг. 2–4 осью вращения является ось  $y$ . Штриховыми линиями показаны первые три итерации предлагаемого метода (первое приближение всегда выбиралось в виде некоторой сферы). Сплошная линия соответствует истинной поверхности, которая во всех примерах практически совпадает с результатом расчета третьего приближения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
2. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975. 95 с.
3. Ермолов И. Н. Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
4. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. Т. 1. М.; Л.: ОНТИ, Глав. ред. общетех. лит. и номогр., 1935. 330 с.
5. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988. 411 с.
6. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
1.IV.1991