4. *Вольперт В. А., Вольперт А. И.* Существование и устойчивость волн в химической кинетике // Хим. физика. 1990. Т. 9. № 2. С. 238–245.
5. *Вольперт В. А., Вольперт А. И.* Волны химического превращения со сложной кинетикой // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 1. С. 125–128.
6. *Вольперт В. А., Вольперт А. И.* Некоторые математические вопросы распространения волн в химически активных средах // Хим. физика. 1990. Т. 9. № 8. С. 1118–1127.
7. *Redheffer R., Walter W.* Invariant sets for systems of partial differential equations. I. Parabolic equations. // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 67. № 1. P. 41–52.

Черноголовка, Харьков

Поступила в редакцию 8.IV.1991

УДК 539.3

© 1992 г. Г. Н. Миренкова, Э. Г. Сосинина

НАПРЯЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖЕСТКОЙ ИГЛЫ В ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

С использованием общего решения задачи о концентрации напряжений на поверхности жестких эллипсоидальных включений [1] решается пространственная задача о напряжениях на поверхности абсолютно жесткой иглы в неограниченной упругой ортотропной среде при действии однородного внешнего поля. Под иглой понимается эллипсоидальное включение, один размер которого велик по сравнению с двумя другими. Получены и исследованы явные формулы для напряжений по главным сечениям иглы в ортотропной среде и на всей поверхности иглы в изотропной среде. Вычисления проделаны с точностью до сингулярных членов (больших, но конечных величин).

1. Напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ на поверхности абсолютно жесткой эллипсоидальной неоднородности в произвольной анизотропной среде и внешнем однородном поле $\sigma_0^{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\sigma(\mathbf{n})=F(\mathbf{n})\sigma_0, \quad F(\mathbf{n})=D(\mathbf{n})R, \quad D(\mathbf{n})=cK(\mathbf{n}) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида с полуосями a_α ($\alpha=1, 2, 3$), $F(\mathbf{n})$ – тензорный коэффициент концентрации. Тензор $K(\mathbf{n})$ не зависит от геометрии неоднородности, выражается через Фурье – образ тензора Грина однородной среды и в явном виде получен [1] для ортотропной среды. Тензор упругих постоянных c ортотропной среды в системе координат, жестко связанной с осями эллипсоида, имеет девять отличных от нуля компонент, которые обозначим

$$c^{\alpha\alpha\beta\beta}=c_{\alpha\beta}(\alpha, \beta=1, 2, 3), \; c^{2323}=c_{44}, \; c^{1313}=c_{55}, \; c^{1212}=c_{66}$$

Тензор $D(\mathbf{n})$ находится сверткой тензоров c и $K(n)$.

Наибольшую сложность при нахождении коэффициента концентрации представляет вычисление тензора R из (1.1). Четырехвалентный тензор R явно зависит от геометрических параметров эллипсоида и является обратным тензору $D=\langle D(\mathbf{n})\rangle$, где $\langle D(\mathbf{n})\rangle$ – среднее значение $D(\mathbf{n})$ по поверхности эллипсоида [2, 3]. Так же, как и $D(\mathbf{n})$, D и R симметричны внутри пар индексов, но не перестановочны по парам индексов.

Введем безразмерные параметры

$$\eta=a_2a_1^{-1}, \quad \xi=a_3a_2^{-1} \quad (a_1\geqslant a_2\geqslant a_3)$$

Для иглы $\eta\ll 1$, $\xi\sim 1$ и разложение тензора D по малому (но конечному) параметру η имеет вид

$$D=D_0+\eta^2|\ln\eta|D_1+O(\eta^2)$$

$$D_0=\xi\pi^{-1}\int_0^{\pi} D(\varphi,0)\,(\cos^2\varphi+\xi^2\sin^2\varphi)^{-1}d\varphi \tag{1.2}$$

$$D_1=\xi\pi^{-1}\int_0^{\pi} D_{tt}''(\varphi,0)\,d\varphi \tag{1.3}$$

$$D(\varphi,0)=D(n_1=t=0,\ n_2=\cos\varphi,\ n_3=\sin\varphi)$$

Было показано [1], что тензор D_0 не имеет обратного и сингулярности порядка $(\eta^2\ln\eta)^{-1}$ возникают в компонентах $R^{11}{}_{..\alpha\alpha}$. Соответственно сингулярности в напряжениях появляются в окрестности торцов иглы при растяжении $\sigma_0^{\alpha\alpha}$ ($\alpha=1, 2, 3$). Сдвиговые компоненты внешних напряжений не вызывают сингулярностей на поверхности иглы.

Считая, что внешняя среда ортотропна, вычислим с точностью до сингулярных членов компоненты $R^{11}{}_{..\alpha\alpha}$.

Анализ структуры тензора D показывает, что $(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..11}=0$, $(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..22}\neq0$, $(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..33}\neq0$ и для определения сингулярных членов $R^{11}{}_{..\alpha\alpha}$ достаточно найти $(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..22}$, $(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..33}$ и $(D_1)^{\alpha\alpha}{}_{..11}$, выражающиеся через однократные интегралы (1.2), (1.3).

Вычисляем тензор D_0. Для удобства дальнейших расчетов приведем не D_0, а $D_0\xi^{-1}$:

$$D_0\xi^{-1}=L^{-1}(\sqrt{c_{33}}+L\xi+\xi^2\sqrt{c_{22}})^{-1}[Q+B\sqrt{c_{33}^{-1}}(\xi^{-1}L+\sqrt{c_{22}})+$$
$$+N\sqrt{c_{22}^{-1}}(L\xi+\sqrt{c_{33}})] \tag{1.4}$$
$$L=[\Delta_{11}c_{44}^{-1}+2((c_{22}c_{33})^{1/2}-c_{23})]^{1/2}$$

Отличные от нуля компоненты тензоров B, Q, N имеют вид

$$Q^{11}{}_{..22}=-(\Delta_{12}c_{44}{}^{-1}+c_{13}),\quad B^{22}{}_{..33}=N^{33}{}_{..22}=c_{23},\quad N^{11}{}_{..22}=c_{12}$$
$$Q^{11}{}_{..33}=-(\Delta_{13}c_{44}{}^{-1}+c_{12}),\quad B^{33}{}_{..33}=-Q^{33}{}_{..22}=c_{33},\quad B^{11}{}_{..33}=c_{13}$$
$$Q^{22}{}_{..22}=Q^{33}{}_{..33}=\Delta_{11}c_{44}{}^{-1}-c_{23}\equiv k_1,\quad N^{22}{}_{..22}=-Q^{22}{}_{..33}=c_{22}$$

$\Delta_{\alpha\beta}$ – алгебраическое дополнение элемента $c_{\alpha\beta}$ матрицы $\|c_{\alpha\beta}\|$.

Найдем $(D_1)^{\alpha\alpha}{}_{..11}$. Исследование структуры тензора $D_{tt}''(\varphi,0)$ из (1.3) показало, что зависимость от φ в интегралах (1.2) и (1.3) аналогична и компоненты $(D_1\xi^{-1})$ получаются из $(D_0\xi^{-1})$ умножением правой части формулы (1.4) на $2c_{66}{}^{-1}$ и заменой в ней ξ^2 на $c_{55}c_{66}{}^{-1}$, а тензоров B, Q, N на T, P, S соответственно. Отличные от нуля компоненты T, P, S таковы:

$$T^{11}{}_{..11}=\Delta_{33}-c_{12}c_{66},\quad T^{22}{}_{..11}=-c_{22}c_{66}$$
$$T^{33}{}_{..11}=-(\Delta_{13}+c_{23}c_{66}),\quad P^{33}{}_{..11}=-c_{33}c_{55}$$
$$S^{11}{}_{..11}=c_{44}{}^{-1}(\Delta+c_{55}\Delta_{13}+c_{66}\Delta_{12})+c_{12}c_{55}+c_{13}c_{66}+2\Delta_{23}$$
$$S^{22}{}_{..11}=c_{22}c_{55}-\Delta_{13}-k_1c_{66},\quad P^{11}{}_{..11}=k_2c_{55}$$
$$S^{33}{}_{..11}=c_{33}c_{66}-\Delta_{12}-k_1c_{55},\quad P^{22}{}_{..11}=k_3c_{55}$$
$$k_2=\Delta_{22}c_{55}{}^{-1}-c_{13},\quad k_3=-(\Delta_{12}c_{55}{}^{-1}+c_{23})$$

Компоненты $R^{11}{}_{..\alpha\alpha}$ являются элементами матрицы, обратной $\|b_{\alpha\beta}\|$ ($\alpha, \beta=1, 2, 3$), где

$$b_{\alpha1}=\eta^2|\ln\eta|(D_1)^{\alpha\alpha}{}_{..11},\quad b_{\alpha2}=(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..22},\quad b_{\alpha3}=(D_0)^{\alpha\alpha}{}_{..33}$$

Обращая $\|b_{\alpha\beta}\|$, получаем

$$R^{11}{}_{..\alpha\alpha}=\Delta^{-1}\Delta_{1\alpha}\varkappa\sqrt{c_{55}c_{66}},\quad \varkappa=(\xi\eta^2|\ln\eta|)^{-1}$$

где Δ – определитель матрицы $\|c_{\alpha\beta}\|$ ($\alpha, \beta=1, 2, 3$).

Если ввести модули Юнга E_α, коэффициенты Пуассона $\nu_{\alpha\beta}$ и модули сдвига $G_{\alpha\beta}$ ортотропной среды [4], то компоненты $R^{11}{}_{..\alpha\alpha}$ примут вид

$$R^{11}{}_{..11}=\varkappa\sqrt{G_{12}G_{13}}E_1{}^{-1},\quad R^{11}{}_{..\gamma\gamma}=-\nu_{1\gamma}R^{11}{}_{..11}\quad(\gamma=2,\ 3)$$

Для изотропной среды с коэффициентом Пуассона ν

$$R^{11}{}_{..22}=R^{11}{}_{..33}=-\nu R^{11}{}_{..11}=-0{,}5\,\nu\varkappa(1+\nu)^{-1}$$

2. Сингулярные составляющие напряжений на поверхности иглы имеют вид

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})=D^{\alpha\beta}{}_{..11}(\mathbf{n})R^{11}{}_{..\lambda\lambda}\sigma_0{}^{\lambda\lambda}$$

Приведем значения напряжений в торце $A(a_1,\ 0,\ 0)$ иглы в ортотропной среде:

$$\begin{gathered}\sigma^{11}(A)=\Delta^{-1}\varkappa\sqrt{c_{55}c_{66}}(\Delta_{11}\sigma_0{}^{11}+\Delta_{12}\sigma_0{}^{22}+\Delta_{13}\sigma_0{}^{33})=\\ =E_1{}^{-1}\varkappa\sqrt{G_{12}G_{13}}(\sigma_0{}^{11}-\nu_{12}\sigma_0{}^{22}-\nu_{13}\sigma_0{}^{33})\\ \sigma^{22}(A)=c_{12}c_{11}{}^{-1}\sigma^{11}(A)=\\ =(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})(1-\nu_{23}\nu_{32})^{-1}\sigma^{11}(A)\\ \sigma^{33}(A)=c_{13}c_{11}{}^{-1}\sigma^{11}(A)=\\ =(\nu_{31}+\nu_{32}\nu_{21})(1-\nu_{23}\nu_{32})^{-1}\sigma^{11}(A),\quad \sigma^{\alpha\beta}(A)=0\quad(\alpha\neq\beta)\end{gathered}\tag{2.1}$$

Для изотропной среды

$$\begin{gathered}\sigma^{11}(A)={}^1/_2\varkappa(1+\nu)^{-1}[\sigma_0{}^{11}-\nu(\sigma_0{}^{22}+\sigma_0{}^{33})]\\ \sigma^{22}(A)=\sigma^{33}(A)=\nu(1-\nu)^{-1}\sigma^{11}(A),\quad \sigma^{\alpha\beta}(A)=0\quad(\alpha\neq\beta)\end{gathered}\tag{2.2}$$

Исследование напряжений на игле в зависимости от вида внешнего поля и анизотропии среды будем проводить в локальной системе координат, связанной с нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности так, что ось e_1 направлена по $\mathbf{n}$, а оси e_2 и e_3 лежат в касательной плоскости. Обозначим напряжения в локальной системе $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$. Тогда $\sigma_{11}(\mathbf{n})$ направлено по нормали к поверхности во всех ее точках. В сечении $n_2=0$ напряжение $\sigma_{22}(\mathbf{n})$ направлено ортогонально плоскости сечения, $\sigma_{33}(\mathbf{n})$ – вдоль контура сечения; при $n_3=0$ – наоборот. В торце иглы $\sigma_{\alpha\beta}(A)=\sigma^{\alpha\beta}(A)$.

В случае изотропной среды на всей поверхности иглы получаем:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}(\mathbf{n})=n_1{}^2\sigma^{11}(A),\quad \sigma_{23}(\mathbf{n})=0\\ \sigma_{22}(\mathbf{n})=\sigma_{33}(\mathbf{n})=\nu(1-\nu)^{-1}n_1{}^2\sigma^{11}(A)\\ \sigma_{12}(\mathbf{n})=n_1n_2\sqrt{((1-n_3{}^2)^{-1}}\sigma^{11}(A)\\ \sigma_{13}(\mathbf{n})=n_1{}^2n_3\sqrt{(1-n_3{}^2)^{-1}}\sigma^{11}(A)\end{gathered}\tag{2.3}$$

причем выражение $\sigma^{11}(A)$ дано формулой (2.2).

Для ортотропной среды приведем формулы для напряжений по главным сечениям иглы. В среднем сечении $n_1=0$ сингулярные напряжения равны нулю, а при $n_2=0$ имеем:

$$\begin{gathered}\sigma_{11}(\mathbf{n})=n_1{}^2\sigma^{11}(A)\\ \sigma_{22}(\mathbf{n})=pn_1{}^2(c_{12}n_1{}^2+k_3n_3{}^2)\sigma^{11}(A)\\ \sigma_{33}(\mathbf{n})=pn_1{}^2[c_{13}n_1{}^4+(k_2-2c_{35})n_3{}^4+\\ +(c_{11}-c_{33}+2c_{13})n_1{}^2n_3{}^2]\sigma^{11}(A)\\ \sigma_{13}(\mathbf{n})=n_1n_3\sigma^{11}(A),\quad \sigma_{12}(\mathbf{n})=\sigma_{23}(\mathbf{n})=0\\ p=[c_{11}n_1{}^4+c_{33}n_3{}^4+(k_2-c_{13})n_1{}^2n_3{}^2]^{-1}\end{gathered}\tag{2.4}$$

причем выражение для $\sigma^{11}(A)$ дано первой формулой в (2.1).

В сечении $n_3=0$ выражения для $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ получаются заменой индексов $2\leftrightarrow3$, $5\leftrightarrow6$ в обеих частях равенств (2.4).

Из приведенных формул видно, что все сингулярные напряжения на поверхности выражаются через напряжение $\sigma^{11}(A)$ в торце иглы. Поэтому некоторые качественные результаты можно получить, исследуя только $\sigma^{11}(A)$.

Напряжение $\sigma^{11}(A)$, направленное по большей оси, в торце иглы является (по модулю) наибольшим и может быть как одного знака с внешним полем, так и противоположного – при малых σ_0^{11} и достаточно больших σ_0^{22}, σ_0^{33}. Значение $\sigma^{11}(A)$ зависит только от упругих постоянных, характеризующих свойства среды в направлении оси иглы, причем $\sigma^{11}(A)$ возрастает с уменьшением модуля Юнга E_1 и увеличением модулей сдвига G_{12}, G_{13}.

При переходе от иглы ($\xi \ll 1$) к вытянутому диску ($\xi \ll 1$) напряжения на всей поверхности возрастают пропорционально ξ^{-1}.

Исследование зависимости напряжений от нормали к поверхности показывает, что качественная картина распределения напряжений на игле в ортотропной среде может отличаться от изотропного случая. Для изотропной среды напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{n})$ ($\alpha=1, 2, 3$) достигают наибольшего значения в торце, а в $\sigma_{12}(\mathbf{n})$, $\sigma_{13}(\mathbf{n})$ имеет место «эффект всплеска» [3]. Для ортотропной среды поведение наряжения $\sigma_{11}(\mathbf{n})$, нормального к поверхности, аналогично изотропному случаю, а в напряжениях $\sigma_{22}(\mathbf{n})$, $\sigma_{33}(\mathbf{n})$ так же, как и на полой игле, [5], возможен сдвиг максимума от торца иглы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.* Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 165–170.
2. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде. // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 2. С. 306–315.
3. *Кунин И. А., Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная трещина и игла в анизотропной упругой среде. // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 524–531.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
5. *Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.* Полая эллипсоидальная игла в ортотропной упругой среде. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1017–1021.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.V.1990

УДК 539.3

© 1992 г. М. А. Сумбатян, Э. А. Троян

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ ВЫПУКЛОГО ДЕФЕКТА ПО РАССЕЯННОМУ ВОЛНОВОМУ ПОЛЮ В ЛУЧЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассматривается задача восстановления формы выпуклого дефекта в твердом теле по результатам измерения амплитуды обратного рассеяния ультразвуковой волны. Предполагается, что характерные размеры дефекта гораздо больше длины волны, что позволяет рассматривать данную задачу в лучевом приближении. Было показано [1], что в рамках такого подхода исследуемую задачу можно свести к известной проблеме Минковского: по заданной гауссовой кривизне поверхности восстановить форму замкнутой выпуклой поверхности. Доказано [2], что при определенных условиях существует единственная выпуклая поверхность, имеющая гауссовой кривизной заданную непрерывную функцию. Однако алгоритм, позволяющий построить указанную выпуклую поверхность, отсутствует. В данной работе разрабатывается численный метод, позволяющий реализовать восстановление искомой выпуклой поверхности. В качестве примеров рассматривается восстановление эллипсоидов вращения с различными эксцентриситетами, а также поверхности, близкой к цилиндрической.