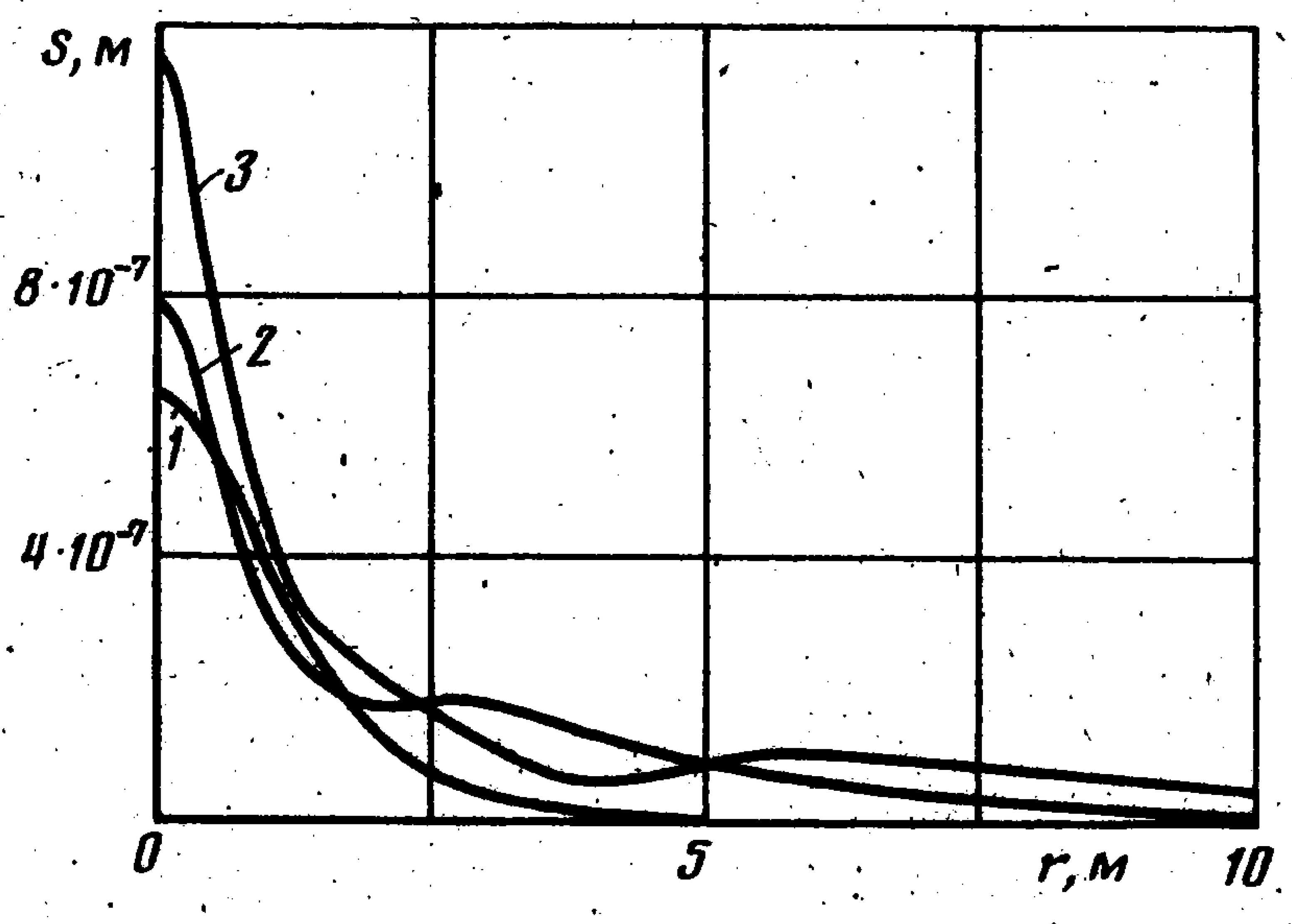
Применив к внутреннему интегралу (7) теорему о среднем значении и воспользовавшись асимптотическими формулами, содержащимися в книге [4], найдем, что

$$S=\Gamma V R_0^2 t t_* \frac{6H(t_*)+gt_*^2}{6H^2(t_*)}\frac{1}{r^3}+o\left(\frac{1}{r^3}\right),\quad r\to\infty$$

где $t_*\in[0,t]$ – некоторое промежуточное значение времени.

На фигуре представлены найденные по формуле (7) при помощи ЭВМ профили свободной поверхности при $t=1,2,3$ с. (кривые 1–3 соответственно) для случая вихревого кольца с параметрами: $R=5$ см, $a=0{,}1$ мм, $\Gamma=2{,}5\pi\cdot10^{-3}$ м²/с ($V\approx0{,}1$ м/с), находившегося в начальный момент времени на глубине $H_0=1$ м. Развитие поверхностных волн происходит на фоне быстро растущего возвышения свободной



поверхности в весьма значительной окрестности точки $r=0$ (к примеру, при $t=5$ с. $S(0)\approx32\cdot10^{-7}$ м), что можно объяснить наличием вертикального потока, создаваемого вихревым кольцом при его движении вверх.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Гоман О. Г., Краплюк В. И.* О формулах для потенциала кольцевого вихря // Математические методы механики жидкости и газа. Днепропетровск: Изд. Днепропетровск. ун-т, 1984. С. 65–70.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1991

УДК 541.64

© 1992 г. В. А. Вольперт, Б. С. Элькин

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГОРЕНИЯ В ПОТОКЕ

Применяются новые подходы, которые позволяют исследовать горение в потоке для достаточно широких классов многостадийных химических реакций. Горение в потоке для одностадийной химической реакции изучалось в ряде работ [1, 2]. В этом случае процесс описывается скалярным параболическим уравнением, что позволяет применять для его исследования достаточно простой математический аппарат. При переходе к горению со сложной кинетикой использовавшиеся методы, как правило, становятся неприменимыми.

1. Постановка задачи. Рассматривается параболическая система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mathbf{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c\frac{\partial u}{\partial x}-F(u) \tag{1.1}$$

$$u=(u_1,\ldots,u_n),\quad F(u)=(F_1(u),\ldots,F_n(u)),\quad \mathbf{a}=\alpha E,\quad \alpha>0$$

на полуоси $x\geqslant0$ при $t\geqslant0$. Здесь $F(u)$ – достаточно гладкая вектор-функция, $\mathbf{a}$ – скалярная матрица, E – единичная матрица, c – положительная постоянная (скорость потока). Граничные условия задаются в виде

$$u(0,t)=u^0,\quad u(+\infty,t)=0, \tag{1.2}$$

где u^0 – некоторый постоянный вектор.

Предполагается, что функция $F(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. $F(0)=0$ и $u=0$ является асимптотически устойчивой стационарной точкой кинетической системы

$$\partial u/\partial t=-F(u) \tag{1.3}$$

2°. При $u\geqslant0$ (неравенство покоординатное) существует выпуклая область П, такая, что $u=u^0$ принадлежит этой области, $u=0$ принадлежит ее границе, внутри этой области все функции $F_i(u)$ $(i=1,\ldots,n)$ положительны, и область П положительно инвариантна относительно системы (1.3). Последнее означает, что если точка u^0 принадлежит замыканию области П, то и решение $u(t)$ уравнения (1.3) с начальным условием $u(0)=u^0$ принадлежит П.

3°. В области П выполняются неравенства

$$\partial F_i/\partial u_j\geqslant0,\quad i,j=1,\ldots,n,\quad i\neq j \tag{1.4}$$

Первые два условия характерны для уравнений химической кинетики с необратимыми реакциями [3, 4] при соответствующей замене переменных. Они означают, что в балансном многограннике П существует устойчивое равновесие кинетической системы, скорости реакций $F_i(u)$ положительны при положительных концентрациях и что концентрации реагирующих веществ в процессе реакции не могут стать отрицательными.

Неравенства (1.4) выполняются для широких классов реакций [3–6], что существенно для дальнейшего, поскольку для уравнения (1.1) справедливы в этом случае теоремы сравнения: если $f_1(x)\leqslant f_2(x)$ при $x\geqslant0$ и $f_i(0)=u^0$, $i=1,2$, то решения $u_i(x,t)$ уравнения (1.1) с начальными условиями $u_i(x,0)=f_i(x)$ удовлетворяют неравенствам $u_1(x,t)\leqslant u_2(x,t)$ при $x\geqslant0$, $t\geqslant0$.

2. Существование и устойчивость стационарных решений. Покажем, что задача (1.1), (1.2) имеет стационарное решение. Для этого зададим начальное условие в виде

$$u(x,0)=u^0,\quad x\geqslant0 \tag{2.1}$$

и рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (2.1). Ее решение $u(x,t)$ принадлежит П при всех $x\geqslant0$, $t\geqslant0$ [7] и в силу условий (1.3) монотонно не возрастает по t при каждом фиксированном x. Поэтому при $t\to+\infty$ $u(x,t)$ стремится к некоторой функции $\mathbf{w}(x)$. Можно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2).

Очевидно, далее, что $\mathbf{w}(x)$ принадлежит П и не возрастает по x. Последнее следует из того, что если при некотором $x_0\geqslant0$ и i имеем $\mathbf{w}_i'(x_0)>0$, то

$$\mathbf{w}_i''(x_0)\geqslant c\alpha^{-1}\mathbf{w}_i'(x_0)>0$$

и функция $\mathbf{w}_i$ будет неограниченно возрастать при $x\to\infty$, тогда как она заведомо не может превышать значения u_i^0. Таким образом, предел $\mathbf{w}(x)$ при $x\to\infty$ существует и является стационарной точкой системы (1.3).

Обозначим эту стационарную точку через w^+ и покажем, что $w^+=0$. Предположим, что это не так. Тогда $0\leq w^+\leq u^0$, $w^+\neq u^0$. В силу положительной инвариантности области П и неравенств (1.4) область $П^+$, состоящая из точек множества П, удовлетворяющих условию $u\geq w^+$, положительно инвариантна относительно уравнения (1.3). С другой стороны, отрезок τu^0, соединяющий точки $u=0$ и $u=u^0$, лежит в П при $0<\tau\leq 1$ и вдоль этого отрезка $F(u)>0$. Поэтому решение уравнения (1.3) с начальным условием $u(0)=\tau_0 u^0$, где τ_0 таково, что $\tau_0 u^0$ лежит на границе множества $П^+$, не может оставаться внутри этого множества, что противоречит его положительной инвариантности. Таким образом, показано, что $w(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Для дальнейшего понадобится понятие функциональной неразложимости матрицы. Непрерывная матрица $B(x)$ называется функционально неразложимой, если неразложима матрица, образованная нормами элементов матрица $B(x)$ в пространстве C. Заметим, что из неравенства $w'(x)\leq 0$ при $x\geq 0$ и функциональной неразложимости матрицы $F'(w(x))$ при $x\geq 0$ следует, что[1] $w'(x)<0$ при $x>0$. Неравенство $w'(0)\leq 0$ вытекает из того, что $w''(0)\leq 0$ и $F(u^0)>0$.

Таким образом, функция $w'(x)$ отрицательна при $x\geq 0$ и стремится к нулю при $x\to\infty$. Отсюда в предположении функциональной неразложимости матрицы $F'(w(x))$ следует, что уравнение

$$au''-cu'-F'(w(x))u=\lambda u$$
$$u(0)=0,\quad u(+\infty)=0 \tag{2.2}$$

не имеет отличных от нуля решений при $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$[1]. Это означает, что стационарное решение $w(x)$ задачи (1.1), (1.2) устойчиво к малым возмущениям в пространстве непрерывных функций с условиями (2.2), т. е. существует такое $\varepsilon>0$, что из неравенства

$$\sup_{x\geq 0}|f(x)-w(x)|\leq\varepsilon$$

следует сходимость:

$$\sup_{x\geq 0}|u(x,t)-w(x)|\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty$$

где $u(x,t)$ решение задачи (1.1), (1.2) с начальным условием

$$u(x,0)=f(x),\quad (f(0)=u^0,\quad f(+\infty)=0) \tag{2.3}$$

Покажем теперь, что решение $w(x)$ устойчиво не только к малым возмущениям, но и в целом. Будем полагать сначала, что $f(x)$ не возрастает при $x\geq 0$. Из теорем сравнения следует, что достаточно рассмотреть случаи $f(x)\geq w(x)$ при $x\geq 0$ и $f(x)\leq w(x)$ при $x\geq 0$. Здесь будет рассмотрен только первый случай, поскольку они аналогичны.

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим n начально-краевых задач для уравнения (1.1) в области $x\geq ih$ $(i=1,2,\ldots,n)$, где h – некоторое положительное число, с граничными условиями

$$u(ih,t)=u^0,\quad u(+\infty,t)=0$$

Очевидно, что $w_i(x)\equiv w(x-ih)$ – стационарные решения этих задач.

Выберем h и n так, чтобы

$$\sup_{x\geq ih}|w_i(x)-w_{i-1}(x)|\leq\varepsilon/2 \tag{2.4}$$

$$\sup_{x\geq nh}|f(x)-w_n(x)|\leq\varepsilon \tag{2.5}$$

Положим $f_i(x)=\max(f(x),w_i(x))$ при $x\geq ih$. Тогда, очевидно, $f_{i-1}(x)\leq f_i(x)$ при $x\geq ih$. Обозначим через $u_i(x,t)$ решение i-й задачи с начальным условием $u_i(x,0)=f_i(x)$. Так как функции $u_i(x,t)$ монотонны по x при каждом фиксированном t

---

[1] *Вольперт А. И., Вольперт В. А.* Бегущие волны, описываемые монотонными параболическими системами: Препринт Черноголовка, ОИХФ АН СССР, 1990, 49 с.

в своей области определения, то $u_{i-1}(i\mathbf{h},t)\leqslant u_i(i\mathbf{h},t)$ и в силу теорем сравнения $u_{i-1}(x,t)\leqslant u_i(x,t)$ при $x\geqslant i\mathbf{h}$.

Покажем по индукции, что для каждого i имеет место сходимость:

$$\sup_{x\geqslant i\mathbf{h}}|u_i(x,t)-\mathbf{w}_i(x)|\to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty \tag{2.6}$$

При $i=n$ она имеет место в силу (2.5) и устойчивости решения к малым возмущениям. Пусть условие (2.6) справедливо для некоторого $i=k$. Так как при достаточно больших t:

$$\mathbf{w}_{k-1}(x)\leqslant u_{k-1}(x,t)\leqslant u_k(x,t)\leqslant \mathbf{w}_k(x)+\varepsilon/2, \quad x\geqslant k\mathbf{h}.$$

то из (2.4) следует, что решение $u_{k-1}(x,t)$ оказывается в ε-окрестности стационарного решения $\mathbf{w}_{k-1}(x)$, и сходимость (2.6) для $i=k-1$ следует из устойчивости $\mathbf{w}_{k-1}$ к малым возмущениям.

При $i=0$ из (2.6) получаем требуемую сходимость для исходной задачи.

Если не предполагать теперь, что $f(x)$ – монотонная функция, то при выполнении условий

$$0\leqslant f(x)\leqslant u^0 \text{ при } x\geqslant 0, \quad f(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty \tag{2.7}$$

сходимость решения задачи (1.1), (1.2), (2.3) к стационарному решению $\mathbf{w}(x)$ будет следовать из теорем сравнения, если оценить начальную функцию сверху и снизу монотонными функциями, для которых эта сходимость уже доказана.

Отметим также, что из монотонности стационарных решений и их устойчивости в целом следует, в частности, что стационарное решение единственно.

Таким образом, доказана следующая основная теорема.

Теорема. При сделанных выше предположениях относительно функции $F(u)$ (условия 1°–3° разд. 1) существует стационарное решение $\mathbf{w}(x)$ задачи (1.1), (1.2). Если матрица $F'(\mathbf{w}(x))$ функционально неразложима, то это решение единственно в классе ограниченных функций, имеет отрицательную производную $\mathbf{w}'(x)$ при $x\geqslant 0$ и устойчиво как к малым возмущениям, так и в целом (при выполнении условий (2.7)). При этом устойчивость понимается в равномерной норме относительно возмущений, обращающихся в нуль при $x=0$ и $x=+\infty$.

3. Зависимость решений от параметров. Рассмотрим теперь в более общей постановке систему, зависящую от параметра, и получим оценки изменения решений при изменении параметра. Пусть дана начально-краевая задача в полуполосе: $\Omega=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-c\frac{\partial u}{\partial x}+F(u,x,y) \tag{3.1}$$

$$u|_{(x,y)\in\partial\Omega}=\varphi(x,y), \tag{3.2}$$

$$u(x,y,0)=f(x,y) \tag{3.3}$$

Как и выше, будем рассматривать решения, стремящиеся к нулю при $x\to\infty$ и допускающие оценку $|u(x,y,t)|\leqslant u_0$. Здесь не предполагается, что источник F и скорость c удовлетворяют условиям, сформулированным в разделе 1. Для простоты ограничимся скалярным уравнением, хотя все приводимые построения легко переносятся на системы уравнений (при выполнении условий (1.4)), а также на многомерный случай и области другой геометрии. Зависимость источника F от пространственных переменных может отражать неоднородность среды или наличие внешних воздействий.

Будем полагать, что функция F вблизи $u=0$ допускает представление

$$F(u,x,y)=-\mathbf{p}u+g(x,y)+\mathbf{h}_0(u,x,y)$$

$$|\mathbf{h}_0(u,x,y)|\leqslant\delta \text{ при } x\geqslant 0, \quad |y|\leqslant 1, \quad |u|\leqslant u_0$$

где $\mathbf{p}$ – некоторое положительное число, функция $\mathbf{h}_0(u,x,y)$ содержит квадратичные члены.

Рассмотрим задачу (3.1)–(3.3) при $g(x,y)=g_i(x,y)$ $(i=1,2)$ и обозначим ее решения через $u_i(x,y,t)$, соответственно. Положим $z=u_2-u_1$. Тогда, очевидно, z – решение задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\mathbf{a}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-c\frac{\partial z}{\partial x}-\mathbf{p}z+g_2(x,y)-g_1(x,y)+\mathbf{h}(x,y,t) \tag{3.4}$$

$$z\,|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0,\quad z\,|_{t=0}=0 \tag{3.5}$$

$$(\mathbf{h}(x,y,t)=\mathbf{h}_0(u_2(x,t),x,y)-\mathbf{h}_0(u_1(x,t),x,y))$$

Видно, что в силу принципа максимума имеет место оценка

$$|z(x,y,t)|\leqslant(\mathbf{m}+2\delta)/\mathbf{p},\quad x\geqslant0,\quad |y|\leqslant1,\quad t\geqslant0 \tag{3.6}$$

где $\mathbf{m}$ – положительное число, для которого

$$|g_2(x,y)-g_1(x,y)|\leqslant\mathbf{m},\quad x\geqslant0,\quad |y|\leqslant1$$

В частности, при $\delta=0$ (линейный случай) (3.6) дает оценку изменения решения в зависимости от изменения неоднородности $g(x,y)$.

Если граничные условия в (3.5) неоднородные:

$$|z_{(x,y)\in\partial\Omega}=\mathbf{r}(x,y)$$

и $|\mathbf{r}(x,y)|\leqslant\mathbf{m}_1$, то также в силу принципа максимума и неравенства (3.6) получим

$$|z(x,y,t)|\leqslant\max\,[(\mathbf{m}+2\delta)/\mathbf{p},\mathbf{m}_1]$$

$$x\geqslant0,\quad |y|\leqslant1,\quad t\geqslant0 \tag{3.7}$$

Получим также оценки решений при изменении области. Наряду с задачей (3.4), (3.5) рассмотрим аналогичную задачу в области Ω_0, вложенной в Ω, с граничными условиями

$$z\,|_{(x,y)\in\partial\Omega}=0$$

Ее решение обозначим через $z_0(x,y,t)$. Оценим величину $|z-z_0|$ в Ω_0. Для этого приведем еще одну оценку решения задачи (3.4), (3.5):

$$|z(x,y,t)|\leqslant\mathbf{b}(1-y^2),\quad \mathbf{b}=(\mathbf{m}+2\delta)/(2\alpha)$$

Обозначим

$$s(x,y,t)=z(x,y,t)\,|_{(x,y)\in\partial\Omega_0}$$

Тогда $z(x,y,t)$ – решение уравнения (3.4) в области Ω_0 с граничным и начальным условиями

$$z(x,y,t)\,|_{(x,y)\in\partial\Omega_0}=s(x,y,t),\ z\,|_{t=0}=0$$

Получим, как и выше (считая для простоты $\mathbf{h}$ заданной функцией x и t), что

$$|z-z_0|\leqslant\sup_{t\geqslant0,(x,y)\in\partial\Omega_0}|s(x,y,t)|\leqslant\mathbf{b}(1-\alpha^2)$$

$$\mathbf{b}=\max\min\rho(\mathbf{P}_0,\mathbf{P})$$

где максимум берется по всем точкам $\mathbf{P}_0$, принадлежащим границе области Ω_0, а минимум – по всем точкам $\mathbf{P}$ границы области Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б.* О возможных режимах стационарного горения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 27–32.
2. *Хайкин Б. И., Руманов Э. Н.* К задаче о режимах экзотермической реакции в одномерном потоке // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11. № 5. С. 671–677.
3. *Вольперт В. А.; Вольперт А. И.* Существование и устойчивость бегущих волн в химической кинетике // Динамика химических и биологических систем. Новосибирск: Наука, 1989. С. 56–131.

4. *Вольперт В. А., Вольперт А. И.* Существование и устойчивость волн в химической кинетике // Хим. физика. 1990. Т. 9. № 2. С. 238–245.
5. *Вольперт В. А., Вольперт А. И.* Волны химического превращения со сложной кинетикой // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 1. С. 125–128.
6. *Вольперт В. А., Вольперт А. И.* Некоторые математические вопросы распространения волн в химически активных средах // Хим. физика. 1990. Т. 9. № 8. С. 1118–1127.
7. *Redheffer R., Walter W.* Invariant sets for systems of partial differential equations. I. Parabolic equations. // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 67. № 1. P. 41–52.

Черноголовка, Харьков

Поступила в редакцию
8.IV.1991

УДК 539.3

© 1992 г. Г. Н. Миренкова, Э. Г. Сосинна

НАПРЯЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖЕСТКОЙ ИГЛЫ В ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

С использованием общего решения задачи о концентрации напряжений на поверхности жестких эллипсоидальных включений [1] решается пространственная задача о напряжениях на поверхности абсолютно жесткой иглы в неограниченной упругой ортотропной среде при действии однородного внешнего поля. Под иглой понимается эллипсоидальное включение, один размер которого велик по сравнению с двумя другими. Получены и исследованы явные формулы для напряжений по главным сечениям иглы в ортотропной среде и на всей поверхности иглы в изотропной среде. Вычисления проделаны с точностью до сингулярных членов (больших, но конечных величин).

1. Напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ на поверхности абсолютно жесткой эллипсоидальной неоднородности в произвольной анизотропной среде и внешнем однородном поле $\sigma_0^{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\sigma(\mathbf{n})=F(\mathbf{n})\sigma_0,\quad F(\mathbf{n})=D(\mathbf{n})R,\quad D(\mathbf{n})=cK(\mathbf{n})\qquad(1.1)$$

Здесь $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида с полуосями a_α ($\alpha=1, 2, 3$), $F(\mathbf{n})$ – тензорный коэффициент концентрации. Тензор $K(\mathbf{n})$ не зависит от геометрии неоднородности, выражается через Фурье – образ тензора Грина однородной среды и в явном виде получен [1] для ортотропной среды. Тензор упругих постоянных c ортотропной среды в системе координат, жестко связанной с осями эллипсоида, имеет девять отличных от нуля компонент, которые обозначим

$$c^{\alpha\alpha\beta\beta}=c_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1, 2, 3),\ c^{2323}=c_{44},\ c^{1313}=c_{55},\ c^{1212}=c_{66}$$

Тензор $D(\mathbf{n})$ находится сверткой тензоров c и $K(n)$.

Наибольшую сложность при нахождении коэффициента концентрации представляет вычисление тензора R из (1.1). Четырехвалентный тензор R явно зависит от геометрических параметров эллипсоида и является обратным тензору $D=\langle D(\mathbf{n})\rangle$, где $\langle D(\mathbf{n})\rangle$ – среднее значение $D(\mathbf{n})$ по поверхности эллипсоида [2, 3]. Так же, как и $D(\mathbf{n})$, D и R симметричны внутри пар индексов, но не перестановочны по парам индексов.

Введем безразмерные параметры

$$\eta=a_2a_1^{-1},\quad \xi=a_3a_2^{-1}\quad (a_1\geqslant a_2\geqslant a_3)$$

Для иглы $\eta\ll1$, $\xi\sim1$ и разложение тензора D по малому (но конечному) параметру η имеет вид

$$D=D_0+\eta^2|\ln\eta|D_1+O(\eta^2)$$