

6. Голубинский А. И. О сохранении обобщенной циркуляции скорости в установившихся течениях идеального газа // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 5. С. 1043-1045.
7. Голубинский А. И., Сычев В. В. О некоторых свойствах сохраняемости вихревых течений газа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 798-799.
8. Горский В. Б. Вихревые течения и канонические уравнения движения намагничивающейся идеально проводящей жидкости // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 509-512.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
27.II.1991

УДК 532.5:532.527

© 1992 г. А. С. Савин

ГЕНЕРАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ВСПЛЫВАЮЩИМ ВИХРЕВЫМ КОЛЬЦОМ

В приближении малых волн найдено возмущение свободной поверхности идеальной бесконечно глубокой жидкости, находящейся в однородном поле тяжести, вызванное вертикальным движением тонкого вихревого кольца.

Пусть тонкое вихревое кольцо радиуса R и интенсивности Γ движется нормально к свободной поверхности идеальной весомой жидкости, занимающей полупространство $z < 0$. Центр вихревого кольца все время находится на оси z цилиндрической системы координат $\{r, \alpha, z\}$. Если интенсивность Γ не слишком велика и вихревое кольцо находится на достаточной глубине, то на свободной поверхности жидкости будут развиваться волны малой амплитуды. При этом на плоскости $z=0$ выполняются граничные условия [1] для потенциала скорости Φ

$$\Phi_t + gS = 0, \quad \Phi_z = S_t, \quad \Phi_{tt} + g\Phi_z = 0 \quad (1)$$

где $S = S(r, \alpha, t)$ — отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения $z=0$.

Будем искать потенциал скорости в виде $\Phi = \Phi_1 + \phi$, где Φ_1 — потенциал скорости, индуцируемой в безграничной среде рассматриваемым и расположенным симметрично относительно плоскости $z=0$ вихревым кольцом той же интенсивности, а функция ϕ гармоническая всюду в области течения и в силу симметрии задачи не зависит от координаты α

$$\Delta\phi = \phi_{rr} + r^{-1}\phi_r + \phi_{zz} = 0 \quad (2)$$

Из явного выражения для потенциала скорости, индуцируемой тонким вихревым кольцом [2], следует, что $\Phi_1 = 0$ при $z=0$. Если в начальный момент времени $t=0$ $S=0$, $S_t=0$, то из граничных условий (1) найдем

$$\phi_{tt} + g\phi_z|_{z=0} = -gu(r; R, H), \quad \phi_z|_{z=0, t=0} = -u(r; R_0, H_0), \quad \phi_t|_{z=0, t=0} = 0 \quad (3)$$

$$u = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\Gamma R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R - r \cos \theta) d\theta}{(H^2 + R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}}$$

— вертикальная компонента скорости, наводимой в плоскости $z=0$ вихревыми кольцами интенсивности Γ с центрами в точках $z = \pm H$; R_0, H_0 — радиус вихревого кольца и расстояние от него до поверхности жидкости при $t=0$.

Применим к функции ϕ преобразование Фурье — Бесселя нулевого порядка

$$F(\rho, z) = \int_0^{\infty} \phi(r, z) J_0(r\rho) r dr$$

тогда (2) преобразуется в уравнение $F_{zz} - \rho^2 F = 0$. Подстановка его убывающего при $z \rightarrow -\infty$ решения $F = B(\rho, t) \exp(\rho z)$ в преобразованные по Фурье – Бесселю условия (3) приводит к задаче

$$B_{tt} + g\rho B = -gU, \quad B|_{t=0} = -U_0/\rho, \quad B_t|_{t=0} = 0$$

где U – изображение по Фурье – Бесселю скорости u , $U_0 = U|_{t=0}$. Решению этой задачи можно придать вид

$$B = \frac{1}{\rho} \left\{ -U + \int_0^t U_t(\rho; R(\xi), H(\xi)) \cos[\sqrt{g\rho}(t-\xi)] d\xi \right\} \quad (4)$$

С помощью обратного преобразования Фурье – Бесселя найдем

$$\varphi = \varphi_1 + f$$

$$\varphi_1 = + \int_0^\infty U(\rho; R, H) \exp(\rho z) J_0(r\rho) d\rho \quad (5)$$

$$f = \int_0^\infty \exp(\rho z) J_0(r\rho) \int_0^t U_t(\rho; R(\xi), H(\xi)) \cos[\sqrt{g\rho}(t-\xi)] d\xi d\rho$$

Всюду в области течения $\Delta\varphi_1 = 0$ и $\partial\varphi_1/\partial z|_{z=0} = -u$. С другой стороны, потенциал скорости Φ_2 , наводимой в нижнем полупространстве вихревым кольцом интенсивности -2Γ с центром в точке $z=H$, является гармонической при $z < 0$ функцией, удовлетворяющей граничному условию $\partial\Phi_2/\partial z|_{z=0} = -u$. Отсюда следует, что потенциал скорости всего течения $\Phi = \Phi_0 + f$, где Φ_0 – потенциал скорости, индуцируемой рассматриваемым и расположенным симметрично относительно плоскости $z=0$ вихревым кольцом интенсивности $-\Gamma$, второй член f непосредственно связан с развитием поверхностных волн.

Таким образом, скорость вихревого кольца, движущегося нормально к свободной поверхности, состоит из самоиндуцируемой скорости [1] $V = [\Gamma/(4\pi R)] [\ln(8R/a) - 0,25]$ (a – радиус вихревой трубки кольца), скорости, наведенной «зеркальным» кольцом интенсивности противоположного знака и скорости в толще жидкости, вызываемой движением ее свободной поверхности.

Из (1) следует выражение для формы свободной поверхности

$$S = -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{g} \int_0^\infty B_t(\rho, t) J_0(r\rho) \rho d\rho$$

которое с учетом (4) можно записать в виде

$$S = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^\infty \sqrt{\rho} J_0(r\rho) \int_0^t U_t(\rho; R(\xi), H(\xi)) \sin[\sqrt{g\rho}(t-\xi)] d\xi d\rho \quad (6)$$

Если вихревое кольцо находится на достаточно большой глубине ($H \gg R$), то влиянием «зеркального» вихря и поверхностных волн на его движение можно пренебречь и считать, что оно происходит с постоянной скоростью V при $R = R_0 = \text{const}$ по закону $H(t) = H_0 - Vt$. При этих условиях $u \approx \Gamma R_0^2 (H^2 + r^2)^{-3/2}$, соответствующее изображение Фурье – Бесселя [3] $U = \Gamma R_0^2 \exp(-\rho H)/H$, а выражение (6) переходит в формулу

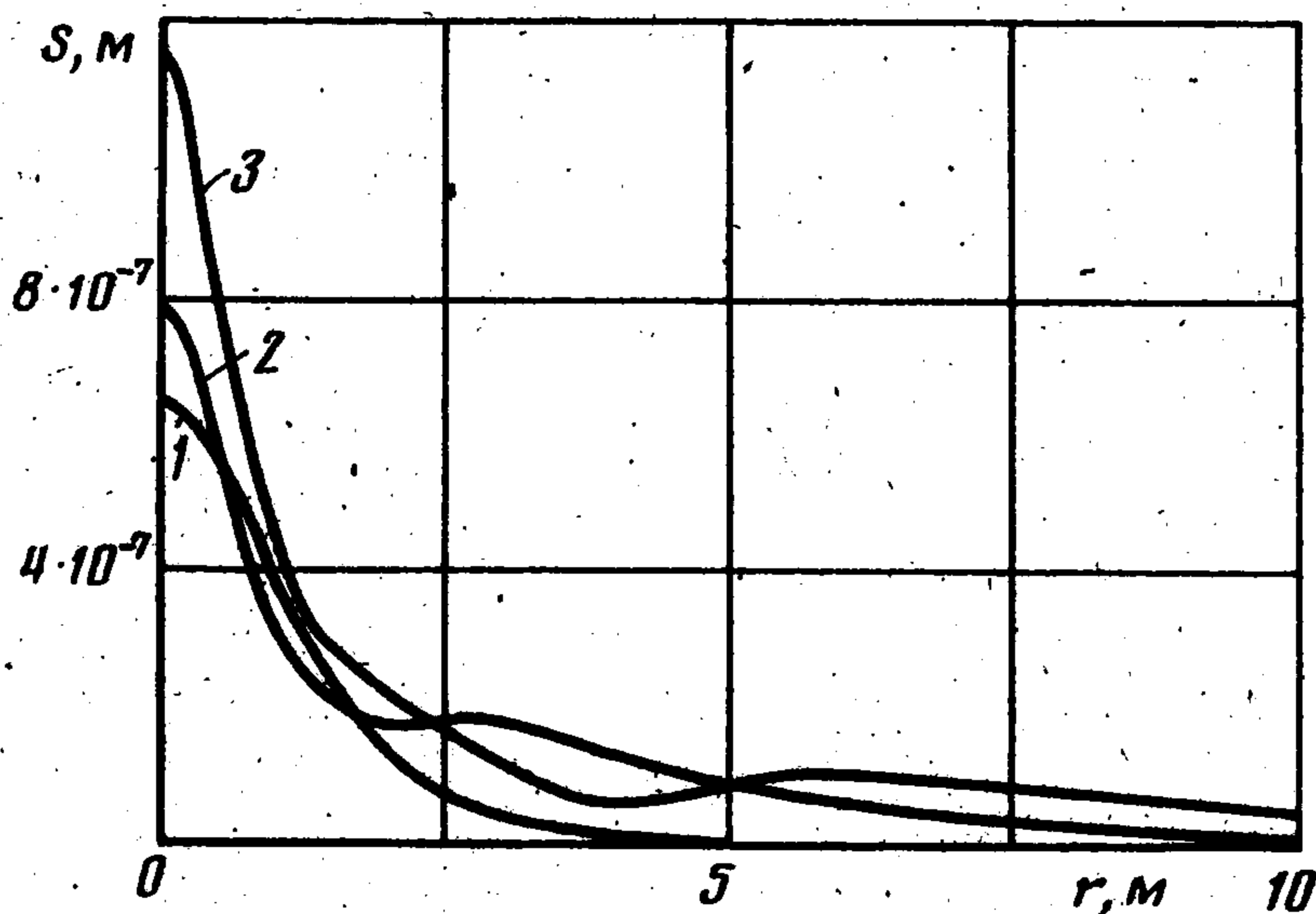
$$S = \frac{\Gamma V R_0^2}{\sqrt{g}} \int_0^\infty \sqrt{\rho} J_0(r\rho) \int_0^t \frac{1 + \rho H(\xi)}{H^2(\xi)} \exp[-\rho H(\xi)] \sin[\sqrt{g\rho}(t-\xi)] d\xi d\rho \quad (7)$$

Применив к внутреннему интегралу (7) теорему о среднем значении и воспользовавшись асимптотическими формулами, содержащимися в книге [4], найдем, что

$$S = \Gamma V R_0^2 t_* \frac{6H(t_*) + gt_*^2}{6H^2(t_*)} \frac{1}{r^3} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

где $t_* \in [0, t]$ – некоторое промежуточное значение времени.

На фигуре представлены найденные по формуле (7) при помощи ЭВМ профили свободной поверхности при $t=1, 2, 3$ с. (кривые 1–3 соответственно) для случая вихревого кольца с параметрами: $R=5$ см, $a=0,1$ мм, $\Gamma=2,5\pi \cdot 10^{-3}$ м²/с ($V \approx 0,1$ м/с), находившегося в начальный момент времени на глубине $H_0=1$ м. Развитие поверхностных волн происходит на фоне быстро растущего возвышения свободной



поверхности в весьма значительной окрестности точки $r=0$ (к примеру, при $t=5$ с. $S(0) \approx 32 \cdot 10^{-7}$ м), что можно объяснить наличием вертикального потока, создаваемого вихревым кольцом при его движении вверх.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Гоман О. Г., Краплюк В. И. О формулах для потенциала кольцевого вихря // Математические методы механики жидкости и газа. Днепропетровск: Изд. Днепропетровск. ун-т, 1984. С. 65–70.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1991

УДК 541.64

© 1992 г. В. А. Вольперт, Б. С. Элькин

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ГОРЕНИЯ В ПОТОКЕ

Применяются новые подходы, которые позволяют исследовать горение в потоке для достаточно широких классов многостадийных химических реакций. Горение в потоке для одностадийной химической реакции изучалось в ряде работ [1, 2]. В этом случае процесс описывается скалярным параболическим уравнением, что позволяет применять для его исследования достаточно простой математический ап-