В указанных условиях (2.2) свободными параметрами могут быть приняты осевые моменты инерции, компоненты C_{11}, C_{33} матрицы C, компонента B_{13} матрицы B, а также величина b_3. Действительность решения (2.3) вытекает из полученных ранее результатов [1]; при этом зависимость переменной φ от времени находим обращением эллиптического интеграла.

Метод исследования, используемый в данной статье, показывает единственность прецессии (2.3) при условиях (2.2). Когда $C=0$, $B=0$, $\lambda=0$, получим прецессию общего вида в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, соответствующую решению [2], которое, несмотря на условия Гесса в распределении масс тела, не входит как частный случай в решение Гесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел: Препринт № 03. Донецк, Ин-т прикл. математики и механики АН УССР. 1989. 66 с.
2. *Докшевич А. И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. механика. 1968. Т. 4. № 11. С. 95–100.

Донецк Поступила в редакцию 12.II.1991

УДК 532.5

© 1992 г. О. В. Мухтарова, Л. П. Смирнов

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ И ДЕФОРМИРОВАННОЙ КАПЛИ

Показано, что при использовании уравнений Стокса, падающая в вязкой жидкости капля может сохранить строго сферическую форму только при определенных распределениях поверхностного натяжения. Отклонения от этих распределений влекут за собой деформирование капли. Эти результаты получены при использовании более общего решения стоксовых уравнений по сравнению с решениями, рассматривавшимися ранее [1].

Движение сферической капли в вязкой жидкости изучалось как теоретически, так и экспериментально. Было замечено [2], что согласование экспериментальных и теоретических результатов может быть достигнуто, если учесть влияние поверхностно-активных веществ и связанные с ним изменения на поверхности капли. Кроме того, распределение поверхностного натяжения на капле может повлиять на форму ее поверхности.

Рассматривалась [1, 3] деформация капли, падающей в вязкой жидкости, при учете инерционных эффектов в приближении Озеена методом сращивания асимптотических разложений. Был сделан вывод [1], что в рамках безинерционных уравнений Стокса при постоянстве поверхностного натяжения на поверхности капли и отсутствии изменения скорости потока, обтекающего сферическую каплю, деформации поверхности возникнуть не могут – капля будет оставаться сферической.

Рассмотрим обтекание капли радиуса R потоком другой жидкости со скоростью U вдали от капли. Этот поток относительно капли возникает в результате ее падения в жидкости под действием силы тяжести и силы Архимеда. Поверхностное натяжение σ изменяется вдоль поверхности капли $\sigma(\theta)$. Причины его изменения могут быть различны: существование поверхностно-активных веществ, неоднородного температурного поля и другие.

Движение жидкости внутри и снаружи капли обозначается соответственно индексами i и e. При малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}\ll 1$) стационарное движение внутренней и внешней жидкости в стоксовом приближении описывается системой уравнений:

$$\Delta V = \mu^{-1} \nabla P, \quad \nabla \cdot V = 0 \tag{1}$$

где P – обобщенная функция давления, включающая в себя внешние силы ($P = p - \rho g z$), μ – вязкость жидкости. Так как обтекание сферы осесимметрично, задача решается при помощи функции тока ψ, которая определяется следующим образом:

$$u = -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{2}$$

где u и v – радиальная и трансверсальная компоненты скорости. Граничные условия на бесконечности и на поверхности капли S имеют вид

$$r \to \infty \quad \psi_e \to {}^1/{}_2 U r^2 \sin^2\theta \tag{3}$$

$$\text{На } S: \quad \psi_i = 0, \quad \psi_e = 0, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial r} = \frac{\partial \psi_e}{\partial r} \tag{4}$$

$$\tau_e - \tau_i = -\frac{1}{R} \frac{d\sigma}{d\theta} \tag{5}$$

$$N_e - N_i = 2\sigma/R \tag{6}$$

Здесь τ_e, N_e, τ_i, N_i – касательные и нормальные напряжения на поверхности капли соответственно. Общее решение уравнений для функций тока представляется в виде бесконечных рядов по полиномам Гегенбауэра [4]:

$$\psi_e = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n+1} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+3}) J_n(\zeta) \tag{7}$$

$$\psi_i = \sum_{n=2}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n+1} + c_n r^{n+2} + d_n r^{-n+3}) J_n(\zeta) \tag{8}$$

где $\zeta = \cos\theta$. Удовлетворяя граничным условиям (4), (5) и учитывая граничное условие для функций тока на бесконечности (3) и свойство конечности скоростей внутри капли, устанавливаем, что все коэффициенты в (7) и (8) для функций тока выражаются через B_2, B_n, $n \geq 3$, которые зависят от градиента поверхностного натяжения, в силу условия (5)

$$B_2 = \frac{R^3}{\mu_e + \mu_i} \left(\frac{U\mu_i}{2} - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2\theta \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \right) \tag{9}$$

$$B_n = -\frac{n(n-1)}{4} \frac{R^{n+1}}{\mu_e + \mu_i} \int_0^\pi J_n(\zeta) \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \tag{10}$$

Зная обтекание капли внешним потоком, определяем силу, действующую на каплю со стороны окружающей жидкости, которая будет направлена по скорости натекающего потока и равна:

$$F = -2\pi\mu_e U R \frac{2\mu_e + 3\mu_i}{\mu_e + \mu_i} + \pi R \frac{\mu_e}{\mu_e + \mu_i} \int_0^\pi \sin^2\theta \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \tag{11}$$

где первое слагаемое представляет собой силу, полученную Адамаром и Рыбчинским, а второе связано с существованием градиента поверхностного натяжения, наличие которого увеличивает силу сопротивления, так как из (5) $\partial\sigma/\partial\theta < 0$. Знак минус в выражении для силы показывает, что сила направлена противоположно движению сферы. Сила торможения, действующая на каплю, уравновешивается выталкивающей силой

$$F=-{}^4/_3\pi R^3k, \quad k=g(\rho_i-\rho_e) \tag{12}$$

Из этого условия определяется скорость U:

$$U=\frac{2(\mu_e+\mu_i)}{2\mu_e+3\mu_i}\,\frac{kR^2}{3\mu_e}+\frac{1}{4\mu_e+6\mu_i}\int\limits_0^\pi \sin^2\theta\frac{d\sigma}{d\theta}\,d\theta \tag{13}$$

Выражение (13) совпадает с выражением, представленным в [5] для скорости движения капли с произвольным распределением поверхностного натяжения, зависящего от наличия поверхностно-активных веществ.

В предыдущих исследованиях, связанных с движением капли как с постоянным поверхностным натяжением, так и с переменным [5], условие на нормальные напряжения, действующие на поверхности капли, обычно не рассматривалось. Но при наличии градиента поверхностного натяжения удовлетворение граничному условию на нормальные напряжения является существенным, так как оно дает возможность определить вид поверхностного натяжения, при котором капля остается сферической. Из совместного учета граничных условий на касательные и нормальные напряжения получается:

$$B_2=-UR^3+\frac{kR^5}{3\mu_e}, \quad B_n=0 \quad n\geqslant 3 \tag{14}$$

Представляя поверхностное натяжение σ в виде ряда по полиномам Лежандра с неизвестными коэффициентами α_m:

$$\sigma=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m P_m(\zeta) \tag{15}$$

учитывая связь между полиномами Лежандра и полиномами Гегенбауэра, получим

$$\frac{d\sigma}{d\theta}=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m(-\sin\theta)\,m(m+1)\frac{J_{m+1}(\zeta)}{1-\zeta^2} \tag{16}$$

Сравнивая (9), (10) с (14) при учете (16) и условия ортогональности полиномов Гегенбауэра, получим систему уравнений для определения всех α_m:

$$\left.\begin{aligned}&\sum\alpha_m m(m+1)\int\limits_{-1}^{+1}J_2(\zeta)\frac{J_{m+1}(\zeta)}{1-\zeta^2}\,d\zeta=\frac{2}{3}kR^2\frac{\mu_e+\mu_i}{\mu_e}-U(2\mu_e+3\mu_i)\\&\sum\alpha_m m(m+1)\int\limits_{-1}^{1}J_n(\zeta)\frac{J_{m+1}(\zeta)}{1-\zeta^2}\,d\zeta=0 \quad n\geqslant 3\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

решение которой дает

$$\alpha_1=kR^2\frac{\mu_e+\mu_i}{\mu_e}-U\left(\frac{9}{2}\mu_i+3\mu_e\right), \quad \alpha_m=0, \quad m\geqslant 2 \tag{18}$$

Следовательно, поверхностное натяжение на поверхности сферической капли в общем случае должно выражаться формулой:

$$\sigma=\alpha_0+\alpha_1\cos\theta \tag{19}$$

где α_0 – поверхностное натяжение на большом круге капли ($\theta=\pi/2$). Соотношение (19) является необходимым условием сохранения каплей сферической формы при переменном поверхностном натяжении.

Если переменность поверхностного натяжения вызвана существованием, например, неоднородного температурного поля $\sigma=\sigma(T)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа $\nabla^2 T=0$ (при малых числах Пекле), то можно найти распределение температуры вдоль поверхности сферической капли. Оно будет иметь вид [6]

$$T(R,\ \theta)=T(R,\ \pi/2)+\lambda\cos\theta \tag{20}$$

где коэффициент λ пропорционален радиусу капли и градиенту температуры на бесконечности и зависит от отношения теплопроводностей капли и среды, в которой капля движется.

Если σ зависит от температуры так, что можно считать $\partial\sigma/\partial T=\text{const}$, то $\sigma(\theta)=(\partial\sigma/\partial T)\lambda\cos\theta+\sigma(\pi/2)$. Следовательно, в рассматриваемом случае поверхностное натяжение распределено по поверхности капли по косинусоидальному закону, и капля сохраняет свою сферическую форму, как это вытекает из общих соображений, приводящих к формуле (19).

Из уравнения (13) можно заметить, что скорость движения капли в зависимости от величины $\partial\sigma/\partial\theta$ может изменяться от максимальной скорости, определенной формулой Адамара – Рыбчинского

$$U=\frac{2}{3}kR^2\frac{\mu_e+\mu_i}{\mu_e(3\mu_i+2\mu_e)}, \tag{21}$$

до минимальной, совпадающей со скоростью твердой сферы

$$U={}^2/_9 kR^2/\mu_e \tag{22}$$

При этом распределение поверхностного натяжения на поверхности сферы (19) изменяется от постоянного значения α_0 до значения

$$\sigma=\alpha_0+{}^1/_3 kR^2\cos\theta \tag{23}$$

Здесь не рассматривается случай, когда в силу определенных причин, например, из-за наличия температурного градиента направление вращения вихря, развивающегося внутри капли, изменяется на обратное.

При движении жидкой капли со скоростью твердой сферы (22) и соответствующем распределении поверхностного натяжения (23) внешнее течение жидкости не вызывает движения жидкости внутри капли. Функция тока внутреннего движения обращается в нуль. Касательные напряжения внешней жидкости, действующие на сферу, уравновешиваются градиентом поверхностного натяжения. Из выражения (23) можно заметить, что капли больших радиусов должны иметь значительный градиент поверхностного натяжения, для того, чтобы они могли двигаться со скоростью твердой сферы. Капли малых радиусов даже при весьма малых изменениях поверхностного натяжения будут двигаться при такой предельной наименьшей скорости падения.

Таким образом, задавая поверхностное натяжение в виде $\sigma=\alpha_0+\alpha_1 P_1(\zeta)$ при фиксированном значении коэффициента α_1, заключенном между значениями 0 и ${}^1/_3 kR^2$, тем самым фиксируется величина скорости сферической капли, которая будет заключена между скоростью Адамара – Рыбчинского и скоростью Стокса.

Определяются деформации капли в случае, когда поверхностное натяжение распределено по закону, отличному от косинусоидального, и выражается следующей зависимостью:

$$\alpha=\alpha_0+(\alpha_1+\alpha')P_1(\cos\theta)+\alpha_2 P_2(\cos\theta) \tag{24}$$

Форма капли описывается уравнением

$$r=R(1+\omega)\quad\left(\omega=\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m P_m(\zeta)\right). \tag{25}$$

Граничные условия на поверхности деформированной капли (25) имеют тот же вид (4, 5, 6), если отбросить в более общих равенствах

$$v_{ne}=0,\quad v_{ni}=0,\quad v_{\tau e}=v_{\tau i},\quad p_{nne}-p_{nni}=(1/R_1+1/R_2)\sigma$$
$$p_{n\tau e}-p_{n\tau i}=-\partial\sigma/\partial s$$

слагаемые, пропорциональные малым величинам ω, ω'; ω'', при записи уравнения меридиональной кривой для деформированной поверхности в виде (25). Использование условий (4) дает возможность выразить коэффициенты a_n, c_n, D_n, входящие в выражения для функций тока (7) и (8), через B_n. Система уравнений, состоящая из (5), (6), условия сохранения объема капли при деформации

$$\frac{4}{3}\pi R^3+2\pi R^3\int_0^\pi \omega\sin\theta\,d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{26}$$

условия равенства сил, действующих на каплю

$$4\pi\mu_e\left[-UR-B_2R^{-2}+(2B_2R^{-2}-UR)\left(\beta_0+\frac{2}{5}\beta_2-\frac{1}{35}\beta_4\right)\right]=-\frac{4}{3}\pi R^3k \tag{27}$$

служит для нахождения неизвестных коэффициентов β_m, B_n. Ограничиваясь коэффициентами $\beta_0-\beta_4$, B_2, B_3, они ищутся в следующем виде:

$$B_2=B_{20}+B_{21},\qquad \beta_i=\beta_{i1},\qquad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{28}$$

B_{20} – известная величина, входящая в функцию тока, описывающую обтекание сферической капли (14). Из уравнения (26) $\beta_0=0$, из уравнений (5), (6), используя связь между полиномами Гегенбауэра и полиномами Лежандра, приравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах, найдено, что $\beta_1=\beta_2=\beta_4=0$, а величина β_3 отлична от нуля:

$$\beta_3=-\frac{14}{3}\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\frac{4+\bar\mu}{M} \tag{29}$$

$$M=10(1+\bar\mu)\left[\mathrm{Ca}(36\bar\mu-18)+\mathrm{Bo}\left(1-\frac{23}{3}\bar\mu\right)\right]+$$
$$+(2+3\bar\mu)\left[\mathrm{Ca}(90+69\bar\mu)-\mathrm{Bo}(28+8\bar\mu)\right]$$
$$\bar\mu=\frac{\mu_i}{\mu_e}\qquad \mathrm{Ca}=\frac{U\mu_e}{\alpha_0}\qquad \mathrm{Bo}=\frac{g(\rho_i-\rho_e)R^2}{\alpha_0}$$

где Ca – капиллярное число, Bo – число Бонда, B_3 определяется из уравнения

$$B_3\frac{R^{-4}}{\alpha_0\mu_e}=\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\frac{2}{2+3\bar\mu}-\frac{3}{7}\beta_3\frac{\mathrm{Ca}(18-36\bar\mu)+\mathrm{Bo}\left(-1+\frac{23}{3}\bar\mu\right)}{2+3\bar\mu} \tag{30}$$

Полученная форма капли близка к форме так называемой сферической шапки

$$r=R[1+{}^1/{}_2\beta_3\cos\theta(5\cos^2\theta-3)] \tag{31}$$

Капля уплощается в своей лобовой части и вытягивается в кормовой. Такая форма падающих капель наблюдалась в экспериментальных работах [7, 8]. В настоящей работе она получена в результате предположения об изменении поверхностного натяжения вдоль поверхности капли по закону (24), более сложному, чем косинусоидальный, и при описании внутреннего и внешнего течений при помощи уравнений Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor T. D., Acrivos A.* On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. N 3. p. 466–476.
2. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 538 с.
3. *Brignell A. S.* The deformation of a liquid drop at small Reynolds number // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1973. V. 26. N 1. p. 99–107.
4. *Хаппель Д., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
5. *Levan M. D., Newman J.* The effect of surfactant on the terminal and interfacial velocities of a bubble or drop // AIChE Journal. 1976. V. 22. N 4. P. 695–701.
6. *Повицкий А. С., Любин Л. Я.* Основы динамики и тепломассообмена жидкостей и газов при невесомости. М.: Машиностроение, 1972. 252 с.
7. *Bhaga D., Weber M. E.* Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech. 1981. V. 105. p. 61–85.
8. *Lehrer I. H.* On bubble and drop deformation and break-up // Israel J. Technol. 1975. V. 13. N 4. p. 246–252.

Москва

Поступила в редакцию 11.IX.1990

УДК 532.516

© 1992 г. В. Б. Горский

О ВИХРЕВЫХ ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Для нестационарных плоских и осесимметричных непрерывных течений вязкой несжимаемой жидкости проведено обобщение известных в гидродинамике невязкой жидкости теорем Гельмгольца о сохранении вихревых линий и интенсивностей вихревых трубок и теоремы Кельвина о сохранении циркуляции скорости вдоль замкнутого жидкого контура.

Изучаются плоские и осесимметричные нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости в предположении, что кинематический коэффициент вязкости ν постоянен, а внешние массовые силы отсутствуют. Они описываются известными уравнениями движения Навье – Стокса, преобразованными к виду Громеки – Лемба:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\times\boldsymbol{\Omega} = \nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - \nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость, p – давление, ρ – плотность, $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$.

Заметив, что уравнения (1) справедливы и для трехмерных течений, рассмотрим случай плоских движений. В этом случае ранее было показано [1], что $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{rot}\cdot(\Omega\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\Omega}\times\nabla\ln\Omega$, где $\mathbf{k}$ – орт оси z, вдоль которой направлена завихренность $\boldsymbol{\Omega}$. Это позволяет привести (1) к квазибаротропному виду [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega} = -\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right), \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{v} - \nu\nabla\ln\Omega \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – обобщенная скорость [2], переходящая в обычную скорось $\mathbf{v}$ жидкости в отсутствие вязкости. Выполняя далее над (2) операцию ротации, можно преобразовать уравнение (2) к уравнению Фридмана [3]

$$\mathrm{helm}\,\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{D\boldsymbol{\Omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\right) \tag{3}$$

относительно векторов $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{u}$.