Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 531.38

© 1992 г. Г. В. Горр

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Обзор результатов, полученных в исследовании условий существования прецессионных движений в динамике систем твердых тел [1] показывает, что в классической задаче о движении тяжелого твердого тела имеет место прецессия общего вида [2], для которой не проведено исследования по изучению условий ее существования в обобщенной задаче. Данная работа восполняет этот пробел: построено новое решение обобщенной задачи, характеризующееся прецессией общего вида. Частным случаем этого решения является случай интегрируемости, указанный [2] для классической задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в обобщенной задаче

$$A\boldsymbol{\omega}^{\cdot}=(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\mathbf{v}+\mathbf{s}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times C\mathbf{v}$$
$$\mathbf{v}^{\cdot}=\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (1.1)$$

Эти уравнения допускают первые интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}-2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})+C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=2E,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=1$$
$$2(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{v}-B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=2k \qquad (1.2)$$

Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы связанной с телом системы координат. Тогда, принимая обозначение для любого вектора $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, имеем: $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела, $\mathbf{v}=(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$ – единичный вектор вертикали, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ – гиростатический момент, $\mathbf{s}=(s_1,\ s_2,\ s_3)$ – вектор обобщенного центра масс, $A\boldsymbol{\omega}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, где

$$x_1=A_{11}\omega_1+A_{12}\omega_2+A_{13}\omega_3,\quad x_2=A_{12}\omega_1+A_{22}\omega_2+A_{23}\omega_3 \qquad (1.3)$$
$$x_3=A_{13}\omega_1+A_{23}\omega_2+A_{33}\omega_3$$

– компоненты вектора момента количества движения, $B\mathbf{v}$ и $C\mathbf{v}$ – векторы следующего вида:

$$B\mathbf{v}=(B_{11}\nu_1+B_{12}\nu_2+B_{13}\nu_3,\ B_{12}\nu_1+B_{22}\nu_2+B_{23}\nu_3,\ B_{13}\nu_1+B_{23}\nu_2+B_{33}\nu_3) \qquad (1.4)$$
$$C\mathbf{v}=(C_{11}\nu_1+C_{12}\nu_2+C_{13}\nu_3,\ C_{12}\nu_1+C_{22}\nu_2+C_{23}\nu_3,\ C_{13}\nu_1+C_{23}\nu_2+C_{33}\nu_3)$$

Таким образом, матрицы A, B, C в соотношениях (1.1), (1.2) симметричны и, кроме того, матрица A положительно определена.

Движение тела называют прецессионным относительно вертикали, если в течение всего времени движения постоянен угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$, где $\mathbf{a}$ – единичный вектор, фиксированный в теле ($\mathbf{a}^{\cdot}=0$). Эти движения характеризуются очевидным инвариантным соотношением

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=a_0,\quad a_0=\cos\theta_0 \qquad (1.5)$$

где θ_0 – угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$. Дифференцируя равенство (1.5) в силу второго уравнения из (1.1), получим $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})=0$. Отсюда вытекает, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ представим в виде

$$\boldsymbol{\omega}=\varphi^{\cdot}\mathbf{a}+\psi^{\cdot}\mathbf{v} \qquad (1.6)$$

Случай, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны, не рассматриваем, поскольку он приводит к равномерному вращению тела. После подстановки выражения (1.6) во второе уравнение из (1.1) имеем

$$\mathbf{v}^{\cdot}=\varphi^{\cdot}(\mathbf{v}\times\mathbf{a}) \tag{1.7}$$

В формулах (1.6), (1.7) $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ – некоторые функции времени. Движение, при котором ни одна из этих функций не является постоянной, называют прецессией общего вида [1]. На этом случае и остановимся в данной работе. Свяжем с телом подвижную систему координат так, чтобы $\mathbf{a}=(0,\ 0,\ 1)$. Тогда соотношениям (1.5), (1.7) и $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=1$ можно удовлетворить, положив

$$\nu_1=a_0'\sin\varphi,\quad \nu_2=a_0'\cos\varphi,\quad \nu_3=a_0,\quad a_0'=\sin\theta_0 \tag{1.8}$$

Подставим $\boldsymbol{\omega}$ из (1.6) в первое уравнение из (1.1) и интегралы (1.2) и учтем соотношения (1.3), (1.4):

$$\begin{gathered}
\varphi^{\cdot\cdot}A\mathbf{a}+\psi^{\cdot\cdot}A\mathbf{v}+\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}[\mathrm{Tr}(A)(\mathbf{v}\times\mathbf{a})-2(A\mathbf{v}\times\mathbf{a})]-\\
-\varphi^{\cdot 2}(A\mathbf{a}\times\mathbf{a})-\psi^{\cdot 2}(A\mathbf{v}\times\mathbf{v})-\varphi^{\cdot}(\mathbf{a}\times B\mathbf{v}+\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{a})-\psi^{\cdot}(\mathbf{v}\times B\mathbf{v}+\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{v})=\mathbf{s}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times C\mathbf{v}\\
\varphi^{\cdot 2}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+\psi^{\cdot 2}(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=2(E+\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})-C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\
\varphi^{\cdot}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+\psi^{\cdot}(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=k-\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}+{}^1/_2(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Спроектируем обе части первого равенства из (1.9) на векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{a}$:

$$\begin{gathered}
\varphi^{\cdot\cdot}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+\psi^{\cdot\cdot}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})=\psi^{\cdot 2}[\mathbf{a}\cdot(A\mathbf{v}\times\mathbf{v})]+\\
+\psi^{\cdot}[\mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{v})+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times B\mathbf{v})]+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{v})+\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times C\mathbf{v})\\
\varphi^{\cdot\cdot}(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+\psi^{\cdot\cdot}(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}[\mathbf{v}\cdot(A\mathbf{v}\times\mathbf{a})]+\\
+\varphi^{\cdot 2}[\mathbf{v}\cdot(A\mathbf{a}\times\mathbf{a})]+\varphi^{\cdot}[\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{a})+\mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}\times B\mathbf{v})]\\
\varphi^{\cdot\cdot}[A\mathbf{a}(\mathbf{v}\times\mathbf{a})]+\psi^{\cdot\cdot}[A\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{a})]+\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}[\mathrm{Tr}(A)a_0'^2-\\
-2(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})+2a_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})]-\varphi^{\cdot 2}[(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})-a_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})]-\\
-\psi^{\cdot 2}[a_0(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})]+\varphi^{\cdot}[a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a})-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})-\\
-a_0(B\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})+(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})]+\psi^{\cdot}[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a})-a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})-(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})+\\
+a_0(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})]+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s})-a_0(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})+a_0(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})=0
\end{gathered} \tag{1.10}$$

Суть метода исследования прецессионных движений относительно вертикали состоит в следующем [1]. Из первых двух уравнений из (1.10) находим вторые производные $\varphi^{\cdot\cdot}$ и $\psi^{\cdot\cdot}$ и подставляем их в третье уравнение этой системы. В результате получим уравнение, содержащее первые производные $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$. На основе интегралов (1.9) в последнем уравнении можно исключить величины $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$. Найденное таким образом уравнение после подстановки выражений (1.8) дает уравнение вида $F(\varphi,\ \lambda_i,\ s_j,\ A_{ij},\ B_{kl},\ C_{mn})=0$. Требование, чтобы оно было тождеством по φ, приводит к условиям на параметры, при выполнении которых движение тела будет прецессионным. Можно показать, что указанные преобразования не имеют особенностей.

В общем случае задача о прецессиях для уравнений (1.1) не решена и известны лишь частные результаты [1].

В данной работе поставим вопрос об условиях существования прецессии общего вида следующей структуры:

$$\varphi^{\cdot 2}=b_1+b_2\sin\varphi,\quad \psi^{\cdot}=b_3/\varphi^{\cdot} \tag{1.11}$$

т. е. $\psi^{\cdot}\varphi^{\cdot}=b_3$, где b_3 – постоянная. Таким свойством обладает прецессия общего вида в классической задаче, которая соответствует случаю интегрируемости, найденному ранее [2]. Была доказана [1] единственность этой прецессии в случае, когда вектор $\mathbf{a}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции.

2. Условия существования решения. Подставив соотношения (1.11) в интегралы из (1.9), получим:

$$\begin{gathered}[f_1(\varphi)(b_1+b_2\sin\varphi)+b_3f_2(\varphi)]^2-g_2^2(\varphi)(b_1+b_2\sin\varphi)=0\\ h_2(\varphi)(b_1+b_2\sin\varphi)-A_{33}(b_1+b_2\sin\varphi)^2-2b_3f_1(\varphi)(b_1+b_2\sin\varphi)-b_3^2f_2(\varphi)=0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь:

$$f_1(\varphi)=(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})=a_1\sin\varphi+a_2\cos\varphi+a_3,$$

$$f_2(\varphi)=(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=c_1\sin 2\varphi+c_2\cos 2\varphi+c_3\sin\varphi+c_4\cos\varphi+c_5$$

$$g_2(\varphi)={}^1/_2(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v})+k=b_1{}^*\sin 2\varphi+b_2{}^*\cos 2\varphi+b_3{}^*\sin\varphi+b_4{}^*\cos\varphi\cdot b_5{}^*,$$

$$h_2(\varphi)=2E+2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v})-(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=d_1\sin 2\varphi+d_2\cos 2\varphi+d_3\sin\varphi+d_4\cos\varphi+d_5$$

$$a_1=A_{13}a_0',\quad a_2=A_{23}a_0',\quad a_3=A_{33}a_0,\quad c_1=A_{12}a_0'^2$$

$$c_2={}^1/_2(A_{22}-A_{11})a_0'^2,\quad c_3=2A_{13}a_0a_0',\quad c_4=2A_{23}a_0a_0'$$

$$c_5={}^1/_2a_0'^2(A_{11}+A_{22})+A_{33}a_0^2$$

$$b_1{}^*={}^1/_2B_{12}a_0'^2,\quad b_2{}^*={}^1/_4a_0'^2(B_{22}-B_{11}),\quad b_3{}^*=a_0'(B_{13}a_0-\lambda_1)$$

$$b_4{}^*=a_0'(B_{23}a_0-\lambda_2),\quad b_5{}^*={}^1/_4a_0'^2(B_{11}+B_{22})+{}^1/_2B_{33}a_0^2-\lambda_3a_0+k$$

$$d_1=-C_{12}a_0'^2,\quad d_2={}^1/_2(C_{11}-C_{22})a_0'^2,\quad d_3=2a_0'(s_1-C_{13}a_0)$$

$$d_4=2a_0'(s_2-C_{23}a_0),\quad d_5=2E+2s_3a_0-{}^1/_2a_0'^2(C_{11}+C_{22})-a_0^2C_{33}$$

В аналогичной форме можно записать и уравнения (1.10). Анализ полученных соотношений удобно вести, начиная с уравнений (2.1). В результате проведенных исследований получены следующие условия на параметры:

$$\begin{gathered}A_{12}=A_{23}=0,\quad C_{12}=C_{13}=C_{23}=0\\ C_{11}=C_{22},\quad B_{12}=B_{23}=0,\quad B_{11}=B_{22}\\ 4A_{13}^4+A_{13}^2(A_{11}-A_{22})(A_{11}+3A_{22}-4A_{33})-A_{11}A_{33}(A_{11}-A_{22})^2=0\\ \lambda_1=B_{13}a_0,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=B_{11}b_1b_3^{-1}+a_0(B_{33}-B_{11})\\ \operatorname{ctg}^2\theta_0=A_{22}A_{13}^2A_{33}^{-1}\zeta^{-1},\quad \zeta=A_{13}^2-A_{33}(A_{11}-A_{22})\\ s_1={}^1/_2b_3\zeta A_{13}^{-1},\quad s_2=0,\quad s_3=a_0(C_{33}-C_{11})+\\ +{}^1/_2b_3[A_{33}(A_{22}-A_{11})(A_{22}-A_{11}-2A_{33})-\\ -A_{13}^2(A_{11}+A_{22}+2A_{33})](A_{13}^2+\zeta)^{-1}\\ B_{11}=a_0'B_{13}b_3b_2^{-1},\quad b_1=-a_0b_3(A_{13}^2+\zeta)A_{13}^{-2}\\ b_2=a_0'(A_{22}-A_{11})A_{13}^{-1}b_3\end{gathered} \tag{2.2}$$

Итак, уравнения (1.1) при выполнении условий (2.2) допускают решение

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}=\varphi^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{a}+\psi^{\boldsymbol\cdot}\mathbf{v},\quad \mathbf{v}=(a_0'\sin\varphi,\ a_0'\cos\varphi,\ a_0)\\ \varphi^{\boldsymbol\cdot}=(b_1+b_2\sin\varphi)^{1/2},\quad \psi^{\boldsymbol\cdot}=b_3/\varphi^{\boldsymbol\cdot}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Отметим основные свойства прецессии (2.3). При помощи соотношений (2.2) и полученных ранее результатов [1] заключаем, что, как и в классической задаче, в данном решении (2.3) гиростат представляет собой гироскоп Гесса (центр масс его лежит в главной плоскости на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида) векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{a}$ лежат в главной плоскости эллипсоида инерции, а значение θ_0 зависит только от моментов инерции гиростата. Если рассматривать вариант $B_{11}=B_{13}=B_{33}=0$, то $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Поскольку для задачи о движении твердого тела в центральном ньютоновском поле сил $C_{ij}=\varepsilon^2A_{ij}$ (где ε^2 – параметр), то в силу (2.2) $A_{11}=A_{22}$, $A_{13}=0$ и решение (2.3) не имеет места.

В указанных условиях (2.2) свободными параметрами могут быть приняты осевые моменты инерции, компоненты C_{11}, C_{33} матрицы C, компонента B_{13} матрицы B, а также величина b_3. Действительность решения (2.3) вытекает из полученных ранее результатов [1]; при этом зависимость переменной φ от времени находим обращением эллиптического интеграла.

Метод исследования, используемый в данной статье, показывает единственность прецессии (2.3) при условиях (2.2). Когда $C=0$, $B=0$, $\lambda=0$, получим прецессию общего вида в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, соответствующую решению [2], которое, несмотря на условия Гесса в распределении масс тела, не входит как частный случай в решение Гесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горр Г. В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел: Препринт № 03. Донецк, Ин-т прикл. математики и механики АН УССР. 1989. 66 с.
2. *Докшевич А. И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Прикл. механика. 1968. Т. 4. № 11. С. 95–100.

Донецк

Поступила в редакцию
12.II.1991

УДК 532.5

© 1992 г. О. В. Мухтарова, Л. П. Смирнов

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ И ДЕФОРМИРОВАННОЙ КАПЛИ

Показано, что при использовании уравнений Стокса, падающая в вязкой жидкости капля может сохранить строго сферическую форму только при определенных распределениях поверхностного натяжения. Отклонения от этих распределений влекут за собой деформирование капли. Эти результаты получены при использовании более общего решения стоксовых уравнений по сравнению с решениями, рассматривавшимися ранее [1].

Движение сферической капли в вязкой жидкости изучалось как теоретически, так и экспериментально. Было замечено [2], что согласование экспериментальных и теоретических результатов может быть достигнуто, если учесть влияние поверхностно-активных веществ и связанные с ним изменения на поверхности капли. Кроме того, распределение поверхностного натяжения на капле может повлиять на форму ее поверхности.

Рассматривалась [1, 3] деформация капли, падающей в вязкой жидкости, при учете инерционных эффектов в приближении Озеена методом сращивания асимптотических разложений. Был сделан вывод [1], что в рамках безинерционных уравнений Стокса при постоянстве поверхностного натяжения на поверхности капли и отсутствии изменения скорости потока, обтекающего сферическую каплю, деформации поверхности возникнуть не могут – капля будет оставаться сферической.

Рассмотрим обтекание капли радиуса R потоком другой жидкости со скоростью U вдали от капли. Этот поток относительно капли возникает в результате ее падения в жидкости под действием силы тяжести и силы Архимеда. Поверхностное натяжение σ изменяется вдоль поверхности капли $\sigma(\theta)$. Причины его изменения могут быть различны: существование поверхностно-активных веществ, неоднородного температурного поля и другие.

Движение жидкости внутри и снаружи капли обозначается соответственно индексами i и e. При малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \ll 1$) стационарное движение внут-