Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 539.375

© 1992 г. **В. В. Сильвестров**

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ ПО ПРЯМОЙ

Методом краевой задачи Римана для счетного множества контуров решаются основные квазипериодические задачи теории упругости для плоскости с разрезами по действительной оси. Решения получены явно в виде «обычного», «подправленного» интегралов типа Коши вдоль счетного множества отрезков действительной оси и равномерно сходящихся рядов простых дробей, коэффициенты которых находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. В ряде случаев решения системы находятся явно, например, если граничные условия задачи периодичны или убывают в окрестности бесконечности как некоторая степенная функция со степенью, меньшей минус единицы. Во всех случаях система имеет единственное решение.

Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений и их асимптотик для разрезов, расположенных в окрестности бесконечности. Приводятся числовые примеры по квазипериодической задаче теории трещин.

Впервые указанные задачи поставлены [1, 2] и изучены методом дискретного преобразования Фурье. Преимущество применяемого в данной работе метода состоит в том, что он не содержит таких дополнительных преобразований, как прямое и обратное преобразования Фурье.

Частными случаями квазипериодических задач, решаемых в статье, являются периодические и некоторые обобщенно-периодические задачи, изученные разными методами многими авторами. Подробный обзор литературы по этим задачам имеется в работах [3–5].

1. Постановка задач. Пусть однородная изотропная упругая плоскость $z=x+iy$ разрезана вдоль линии L, состоящей из отрезков $L_k=[kT-a, kT+a]$ ($k=0, \pm1, \ldots$; $a<T/2$) действительной оси x и на берегах $L^\pm$ разреза L заданы либо нормальное и касательное напряжения $(\sigma_y, \tau_{xy})^\pm$ (первая задача), либо частные производные по x от компонент смещения $(u', v')^\pm$ (вторая задача), либо на L^+ заданы напряжения, а на L^- заданы производные от компонент смещения (смешанная задача). Заданные функции будем считать H-непрерывными и равномерно ограниченными на L, т. е. значения этих функций не превосходят по модулю одной и той же положительной постоянной. В общем случае краевые условия непериодические, поэтому реализуемое при этом напряженно-деформированное состояние будет также непериодическим.

В данном случае для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} вращения ω и производных по x от компонент смещения u', v' в плоскости с разрезом по линии L справедливы формулы [6]

$$\sigma_x+\sigma_y=4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z),\quad 2\mu\omega=(1+\varkappa)\,\mathrm{Im}\,\Phi(z)$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)} \tag{1.1}$$

$$2\mu(u'+iv')=\varkappa\Phi(z)-\Omega(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}$$

где μ, $\varkappa$ — упругие постоянные материала. Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ голоморфны в плоскости с разрезом по линии L. На концах разрезов они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы. Так как точка ∞ для них является особой, то надо задать еще характер поведения этих функций в окрестности ∞.

Будем рассматривать напряженно-деформированное состояние, определяемое функциями $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, которые при $z\to\infty$ вне любой фиксированной достаточно малой ε-окрестности $U_\varepsilon(L)$ линии L растут по модулю не быстрее, чем выражение $M|z|^\lambda$, $M>0$, $\lambda<1$.

2. Первая задача. *Краевые задачи.* Функции [6]

$$\Phi_{1,2}(z)=\Phi(z)\pm\Omega(z) \tag{2.1}$$

являются решениями краевых задач Римана

$$\Phi_1^+(t)+\Phi_1^-(t)=2g_1(t),\quad t\in L \tag{2.2}$$

$$\Phi_2^+(t)-\Phi_2^-(t)=2g_2(t),\quad t\in L \tag{2.3}$$

$$2g_{1,2}(t)=(\sigma_y-i\tau_{xy})^+\pm(\sigma_y-i\tau_{xy})^-$$

для счетного множества отрезков L_k, из которых состоит линия L, в классе функций, которые при $z\to\infty$ вне $U(L)$ растут по модулю не быстрее, чем $M|z|^\lambda$, $\lambda<1$, и на концах отрезков могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, т. е. принадлежат классу h_0 [7]. Функции $g_{1,2}(t)$, по условию, H-непрерывны и равномерно ограниченны на линии L.

Общее решение задачи (2.3) имеет вид [8]

$$\Phi_2(z)=B+\frac{z}{\pi i}\int\limits_L g_2(t)\frac{dt}{t(t-z)} \tag{2.4}$$

где B — комплексная постоянная, а интеграл по L сходится абсолютно и равномерно по z в любой ограниченной области, не содержащей точек линии L.

Решение задачи (2.2). Так как отрезки L_k расположены периодически, то в качестве канонической функции класса h_0 задачи (2.2) можно взять функцию [8]

$$X(z)=\left(\sin\frac{\pi(z+a)}{T}\sin\frac{\pi(z-a)}{T}\right)^{-1/2} \tag{2.5}$$

или

$$X_1(z)=X(z)\sin\frac{\pi z}{T} \tag{2.6}$$

где под $X(z)$ будем понимать ветвь, голоморфную в плоскости с разрезом по линии L, удовлетворяющую условию $\lim X_1(z)=1$ при $z=iy\to\pm i\infty$. Тогда $X_1(z)\to1$ при $z\to\infty$ по точкам любого фиксированного множества D_ε, состоящего из углов $\varepsilon<|\arg z|<\pi-\varepsilon$, $0<\varepsilon<\pi/2$.

Вне любой фиксированной окрестности $U(L)$ эти функции удовлетворяют неравенствам $0<|X(z)|\leqslant M$, $m\leqslant|X_1(z)|\leqslant M$, где m, M — положительные постоянные. Функции $(z-\bar{z})X'(z)$, $(z-\bar{z})X_1'(z)$ также равномерно ограничены вне $U(L)$, а при $z\to\infty$ по точкам множества D_ε они стремятся к нулю. Функция $X_1(z)$ является периодической с периодом T, а $X(z)$ — периодической с периодом $2T$.

Так как функция $X_1(z)$ в точках kT ($k=0, \pm1, \ldots$) обращается в нуль первого порядка, то частное решение задачи (2.2) можно взять в виде

$$F_1(z) = X_1(z)\,R(z), \qquad R(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi i(z-kT)} \int_{L_k} \frac{g_1(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{\tau-kT}{\tau-z}\,d\tau \tag{2.7}$$

где ряд в силу равномерной ограниченности функций $g_1(\tau)$ и $(\tau-kT)/$ $/X_1^+(\tau)$ на L сходится абсолютно и равномерно вне любой фиксированной окрестности $U(L)$. Тогда функция $F_0(z)=\Phi_1(z)-F_1(z)$ является решением однородной задачи, соответствующей задаче (2.2), и в силу приведенных выше свойств функции $X_1(z)$ частное $Q(z)=F_0(z)/X_1(z)$ представляет собой мероморфную функцию с простыми полюсами kT ($k=0, \pm1, \ldots$), которая при $z\to\infty$ вне $U(L)$ растет по модулю не быстрее, чем $M|z|^\lambda$, $\lambda<1$. Следовательно [9],

$$Q(z) = A + A_0 z^{-1} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} A_k\left(\frac{1}{z-kT} + \frac{1}{kT}\right) \tag{2.8}$$

где постоянные A_k таковы, что ряд в любой ограниченной области, не содержащей точек kT, сходится равномерно. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (k^2+c)^{-1} \tag{2.9}$$

где c — любое фиксированное положительное число. Теперь

$$\Phi_1(z) = F_1(z) + X_1(z)Q(z) \tag{2.10}$$

Потребовав однозначности смещений при обходе разрезов L_n, на основании равенств (1.1), (2.1)—(2.3), (2.8) и (2.10) получим для нахождения постоянных A_k систему

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n-k} A_k = iB_n + \frac{\varkappa-1}{2(\varkappa+1)} P_n, \qquad n=0, \pm1, \ldots \tag{2.11}$$

$$\delta_n = \int_0^b \frac{2x}{x^2-\pi^2 n^2} \frac{\sin x\,dx}{(\sin^2 b - \sin^2 x)^{1/2}}, \qquad b = \frac{\pi a}{T} \tag{2.12}$$

$$B_n = -\int_{L_n} F_1(t)\,dt, \qquad P_n = -2i\int_{L_n} g_2(t)\,dt$$

где P_n — главный вектор внешних усилий, действующих на берегах разреза L_n, а функция $F_1(t)$ находится по формуле (2.7), в которой $X_1(z)$ надо заменить на $X_1^+(t)$. Решение системы (2.11) надо искать в пространстве П таких последовательностей $\{A_k\}$, для которых сходятся ряды (2.8), (2.9) и $|Q(z)|\leqslant M|z|^\lambda$, $\lambda<1$ при больших $z\notin U(L)$.

Свойства системы (2.11). Запишем систему (2.11) в виде

$$A_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_{nk}A_k+C_n,\qquad n=0,\pm1,\ldots\tag{2.13}$$

$$\alpha_{nn}=0,\quad \alpha_{nk}=-\delta_0^{-1}\delta_{n-k},\quad n\neq k;\quad C_n=\delta_0^{-1}\left(iB_n+\frac{\varkappa-1}{2(\varkappa+1)}P_n\right)$$

Согласно (2.12) $\delta_0>0$, а остальные коэффициенты $\delta_{-n}=\delta_n<0$. Следовательно, все $\alpha_{nk}=\alpha_{kn}>0$ и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_{nk}|=-2\delta_0^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_m=2\delta_0^{-1}\int_0^b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2x}{\pi^2m^2-x^2}\,\frac{\sin x\,dx}{(\sin^2 b-\sin^2 x)^{1/2}}$$

Отсюда, просуммировав ряд [10], получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\alpha_{nk}|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_{nk}|=1-\frac{\pi}{\delta_0};\qquad n,k=0,\pm1,\ldots\tag{2.14}$$

Аналогично можно показать, что для любого значения $a\in(0,\ T/2)$ существуют положительные числа c и $\theta<1$, такие, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_{nk}|(n^2+c)^{-m}<\theta(k^2+c)^{-m};\qquad k=0,\pm1,\ldots;\qquad m=1,2\tag{2.15}$$

Из соотношений (2.14), (2.15) следует, что бесконечная матрица $\|\alpha_{nk}\|$ определяет сжимающий оператор в пространствах ограниченных последовательностей l_∞, абсолютно-суммируемых последовательностей l_1, а также в банаховом пространстве Π_m ($m=1$, 2) таких последовательностей $\{A_k\}$, для которых сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_k|(k^2+c)^{-m}$$

Поэтому [11] система (2.13), а значит, и система (2.11) в указанных пространствах разрешимы и имеют единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Более того, в пространствах l_1 и l_∞ это решение можно найти также методом редукции [12].

Так как в рассматриваемом случае последовательность $\{C_n\}\in l_\infty$, то из включений $l_\infty\subset\Pi\subset\Pi_2$ следует, что в пространстве П система (2.11) имеет единственное решение, которое к тому же будет ограниченным.

Если при больших n выполнены неравенства $|C_n|\leqslant M|n|^{-1-\lambda}$, $\lambda>0$, что имеет место, например, когда граничные условия задачи при $t\to\infty$ убывают как $o(|t|^{-1-\lambda})$, то [13]

$$A_n=\frac{\delta_0}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{C(t)}{\delta(t)}\frac{dt}{t^{n+1}},\qquad C(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nt^n,\qquad \delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_nt^n\tag{2.16}$$

Числа A_n при больших n также удовлетворяют неравенствам $|A_n|\leqslant\leqslant M|n|^{-1-\nu}$, $\forall\nu$: $0<\nu<\min\{\lambda;\ 1\}$.

Поведение решений при больших z. Аналогично известному подходу [14] можно показать, что функция $\Phi_2(z)$ при больших $z\notin U(L)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\Phi_2(z)|\leqslant M\ln|z|,\quad |(z-\bar z)\Phi_2'(z)|\leqslant M\ln|z|,\quad M>0 \tag{2.17}$$

причем имеются случаи, когда $\Phi_2(z)$ при $z\to\infty$ логарифмически растет, например [15], если $g_2(t)=\mathrm{const}\neq0$ на отрезках L_0, L_1, ... и $g_2(t)=0$ на остальных отрезках. Такими же свойствами обладают и функции $Q(z)$, $\Phi_1(z)$. Следовательно, при $z\to\infty$ напряжения и вращение будут иметь, вообще говоря, логарифмический рост. Поэтому в общем случае в качестве условий для нахождения оставшихся еще неопределенными постоянных A, B нельзя брать, как в классическом случае [6], значения напряжений и вращения при $z\to\infty$.

В качестве таких условий можно взять, например, значения напряжений и вращения в какой-нибудь конечной точке $z_0\notin L$. Однако, если при $z\to\infty$ по каким-нибудь кривым, например по лучам, функции $\Phi_j(z)$, $(z-\bar z)\Phi_j'(z)$ $(j=1,\ 2)$ стремятся к определенным пределам, то в качестве условий для нахождения постоянных A, B можно взять значения напряжений и вращения при $z\to\infty$ по этим кривым. Тогда A, B найдутся из этих условий и равенств (1.1), (2.1).

3. Квазипериодическая задача теории трещин. *Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).* Согласно соотношениям (2.1), (2.4)–(2.8), (2.10) функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ вблизи вершин $a+nT$ $(n=0,\ \pm1,\ \ldots)$ имеют вид [7]

$$\Phi(z)\backsim\Omega(z)\backsim{}^1/_2\Phi_1(z)\backsim(K_1-iK_2)_n{}^+/(2\sqrt{2(z-a-nT)})$$

$$(K_1-iK_2)_n{}^+=\left(\frac{T}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi a}{T}\right)^{1/2}\{R\,(nT+a)+Q\,(nT+a)\} \tag{3.1}$$

откуда следует, что числа $(K_1,\ K_2)_n{}^+$ – КИН в форме [3]. В форме [16] они получаются умножением еще на число $\sqrt{\pi}$. Аналогично КИН вблизи вершин $nT-a$ таковы:

$$(K_1-iK_2)_n{}^-=\left(\frac{T}{\pi}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi a}{T}\right)^{1/2}\{R\,(nT-a)+Q\,(nT-a)\} \tag{3.2}$$

Так как $Q(z)$ при $z\to\infty$ может расти как логарифмическая функция, то КИН при $n\to\infty$ также могут расти как $\ln|n|$. В последнем случае рассматриваемая периодическая система трещин неустойчива.

Поведения напряжений вблизи вершин трещин определяются через КИН известными представлениями [3].

Случай убывания граничных условий. Пусть граничные условия задачи при $t\to\infty$ убывают как некоторая функция $|t|^{-\lambda}$, $\lambda>0$. Тогда таким же свойством обладает решение $\{A_k\}$ системы (2.11) при $k\to\infty$ и решения задач (2.2), (2.3) имеют вид

$$\Phi_1(z)=F_1(z)+X_1(z)\,Q(z),\qquad Q(z)=A+\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(z-kT)^{-1} \tag{3.3}$$

$$\Phi_2(z) = B + \frac{1}{\pi i} \int_L g_2(t) \frac{dt}{t-z} \tag{3.4}$$

Функции X_1 и F_1 находятся по формулам (2.6) и (2.7), а числа A_k находятся из системы (2.11) или находятся явно по формулам (2.16). В этом случае функции $\Phi_j(z)$, $(z-\bar{z})\Phi_j'(z)$ $(j=1, 2)$ вне любой фиксированной окрестности $U(L)$ равномерно ограничены и при $z\to\infty$ по лучам, выходящим из начала координат и расположенным в верхней или нижней полуплоскости, функции $(z-\bar{z})\Phi_j'(z)$ стремятся к нулю, а функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ стремятся соответственно к числам A и B. Тогда из формул (1.1), (2.1) находим

$$\sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty = A, \quad \frac{1}{2}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + \frac{4\mu i}{\varkappa+1}\omega^\infty = A + B \tag{3.5}$$

где σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞, ω^∞ — значения напряжений и вращения при $z\to\infty$ по указанным лучам, которые должны быть заданы.

Так как в данном случае функции $R(nT\pm a)$ и $Q(nT\pm a)$ при $n\to\infty$ имеют соответственно пределы 0 и A, то, согласно соотношениям (3.1), (3.2) существует

$$\lim_{n\to\infty} (K_1 - iK_2)_n^{\pm} = (\sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty)\left(\frac{T}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{T}\right)^{1/2} \tag{3.6}$$

Устойчивость системы трещин в данном случае зависит как от значения предела (3.6), так и от значений КИН вблизи вершин некоторого конечного числа трещин [16, 17].

Рассмотрим подробно случай, когда заданные на берегах трещин усилия убывают при $t\to\infty$ как $O(|t|^{-\lambda})$, $\lambda>1$. Тогда

$$\Phi_2(z) = B - \frac{1}{\pi i z}\int_L g_2(t)\,dt + \frac{1}{\pi i z}\int_L t g_2(t)\frac{dt}{t-z}$$

$$Q(z) = A + \frac{1}{z}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k + \frac{T}{z}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{kA_k}{z-kT}$$

откуда при больших $z\notin U(L)$ имеем

$$\Phi_2(z) = B - \frac{P}{2\pi z} + o(z^{-\nu}), \qquad Q(z) = A + \frac{H}{z} + o(z^{-\nu}) \tag{3.7}$$

$$1<\nu<\min\{\lambda;\ 2\}$$

где P — главный вектор внешних усилий, приложенных к берегам всех трещин, а H — сумма всех чисел A_k. В данном случае $P\neq\infty$. Чтобы вычислить H, сложим все уравнения (2.11). Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k S_k = -iI + \frac{\varkappa-1}{2(\varkappa+1)}P, \quad S_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{n-k}, \quad I = \int_L F_1(t)\,dt$$

Из равенств (2.7), (2.12) находим: $I=0$, $S_k=\pi$ ($k=0, \pm1, \ldots$). Следовательно,

$$H=(\varkappa-1)P/[2\pi(\varkappa+1)]$$

Так как при больших $z\notin U(L)$ функция $F_1(z)=O(z^{-\lambda})$, то согласно соотношениям (2.1), (3.3), (3.7) при больших $z\notin U(L)$ имеют место асимптотические равенства

$$\begin{gathered}2\begin{Bmatrix}\Phi(z)\\ \Omega(z)\end{Bmatrix}=\left(A+\frac{H}{z}\right)X_1(z)+\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\left(B-\frac{P}{2\pi z}\right)+o(z^{-\nu})\\ 2\Phi'(z)=AX_1'(z)+\frac{H}{z}\left(X_1'(z)-\frac{X_1(z)}{z}\right)+\frac{P}{2\pi z^2}+o(z^{-1-\nu})\\ \forall\nu:\ 1<\nu<\min\{\lambda;\ 2\}\end{gathered}\tag{3.8}$$

Функция $X_1(z)$ и постоянные A, B находятся из равенств (2.6) и (3.5). При больших z, расположенных на луче $\arg z=\varphi$, $\varepsilon<|\varphi|<\pi-\varepsilon$, в силу равенств $X_1(z)\infty 1$, $X_1'(z)=o(z^{-2})$ представления (3.8) с точностью до функции z^{-1} будут такими же, как в случае плоскости с конечным числом разрезов [6]. Характер распределения напряжений при больших $z\notin U(L)$ определяется равенствами (1.1), (3.8). В данном случае КИН при больших n имеют согласно соотношениям (3.1), (3.2), (3.7) вид

$$(K_1-iK_2)_n^{\pm}=\left(\frac{T}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{T}\right)^{1/2}\left\{\sigma_y^{\infty}-i\tau_{xy}^{\infty}+\frac{(\varkappa-1)P}{2\pi T(\varkappa+1)n}\right\}+o(n^{-\nu})\tag{3.9}$$

$$\forall\nu:\ 1<\nu<\min\{\lambda;\ 2\}$$

Симметричный случай. Пусть к берегам трещины L_0 приложены симметричные относительно осей координат нормальное и касательное внешние усилия $\sigma(t)$ и $\tau(t)$, т. е.

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})^+(t)=(\sigma_y-i\tau_{xy})^-(t)=(\sigma_y-i\tau_{xy})^{\pm}(-t)=-\sigma(t)+i\tau(t),\quad t\in L_0$$

берега остальных трещин свободны от напряжений, а напряжения и вращение на ∞ исчезают. Тогда в системах (2.11), (2.13) $P_n=0$, $B_0=0$ и

$$iB_n=\frac{8Tn}{\pi}\int_0^a y\xi(y)\int_0^a\frac{x}{\xi(x)}\frac{p(x)\,dx\,dy}{((y+nT)^2-x^2)((y-nT)^2-x^2)},\quad n\neq0\tag{3.10}$$

$$\xi(x)=\left(\sin^2\frac{\pi a}{T}-\sin^2\frac{\pi x}{T}\right)^{-1/2}\sin\frac{\pi x}{T},\qquad p(x)=\sigma(x)-i\tau(x)$$

откуда $B_{-n}=-B_n$, $C_{-n}=-C_n$ ($n=1, 2, \ldots$)

Сложим уравнение (2.13) при $n=m$ с уравнением при $n=-m$. Получим однородную систему

$$A_m+A_{-m}=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{mk}+\alpha_{-m,k})(A_k+A_{-k}),\qquad m=1,2,\ldots$$

которая в пространстве последовательностей П имеет только нулевое решение $A_k+A_{-k}=0$, откуда $A_{-k}=-A_k$ ($k=1, 2, \ldots$). При этом $A_0=B_0=C_0=0$.

Тогда решение квазипериодической задачи определяется функциями

$$\Phi(z)=\Omega(z)=\Phi_0(z)={}^1/_2X_1(z)(R_0(z)+Q_0(z)) \tag{3.11}$$

$$R_0(z)=-\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{t}{\xi(t)}\frac{p(t)\,dt}{z^2-t^2},\qquad Q_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2kTA_k}{z^2-k^2T^2} \tag{3.12}$$

Постоянные A_k находятся из системы

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_{n-k}-\delta_{n+k})A_k=iB_n,\qquad n=1,2,\ldots \tag{3.13}$$

В данном случае согласно соотношениям (3.8), (3.9) функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ при $z\to\infty$ вне $U(L)$ убывают как $O(z^{-\nu})$, а КИН при $n\to\infty$ убывают как $O(n^{-\nu})$, где $\forall\nu$: $1<\nu<2$. Очевидно, таким же свойством обладают при $z\to\infty$ и напряжения.

Случай подобных нагрузок. Пусть на берегах трещин L_n действуют усилия $(\sigma-i\tau)_n=p_n(\sigma(t)-i\tau(t))$, различающиеся лишь постоянными комплексными множителями p_n, которые при $n\to\infty$ растут не быстрее, чем n^λ, $\lambda<1$. Тогда решение квазипериодической задачи определяется функциями

$$\Phi(z)=\Omega(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k\Phi_0(z-kT) \tag{3.14}$$

а КИН таковы:

$$(K_1-iK_2)_n{}^{\pm}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k(M_1-iM_2)^{\pm}_{n-k} \tag{3.15}$$

где $\Phi_0(z)$ — решение сформулированной выше частной задачи, определяемое формулами (3.10)—(3.13), $(M_1, M_2)_n{}^{\pm}$ — КИН частной задачи, а ряды (3.14), (3.15) сходятся.

Примеры. 1°. Пусть в частной задаче для симметричного случая $p(t)=\sigma(t)-i\tau(t)=\sigma-i\tau=\mathrm{const}$. Тогда решение этой задачи определяется функциями $\Phi(z)=\Omega(z)=(\sigma-i\tau)F(z)$, а КИН таковы: $(K_1)_n{}^{\pm}=\sigma M_n{}^{\pm}$, $(K_2)_n{}^{\pm}=\tau M_n{}^{\pm}$, где $F(z)$ — решение и $M_n{}^{\pm}$ — КИН частной задачи в случае $p(t)=1$, определяемые формулами (3.10)—(3.13) и (3.1), (3.2), (3.12) соответственно.

В табл. 1 в случае периода $T=\pi$ приведены значения коэффициентов $M_n{}^{\pm}$ в зависимости от отношения a/π. В 3-й и 4-й колонках приведены для сравнения значения $N^{\pm}=\sqrt{\operatorname{tg} a}$ — КИН периодической задачи теории трещин и $K^{\pm}=\sqrt{a}$ — КИН в случае только одной трещины $[-a, a]$, когда к берегам трещин приложена постоянная единичная нормальная нагрузка [3].

Расчеты показали, что для вершин $\pm a$, наиболее подверженных разрушению, всегда $M_0{}^{\pm}<N^{\pm}$, $M_0{}^{\pm}>K^{\pm}$, хотя практически второе неравенство сказывается лишь при $(a/\pi)>0{,}3$.

2°. Пусть в частной задаче $p(t)=\sigma(t)-i\tau(t)=(Y-iX)\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, т. е. к противоположным берегам трещины L_0 в средних точках приложены сосредоточенные силы $X+iY$ и $-X-iY$ соответственно. Тогда $\Phi(z)=\Omega(z)=(Y-iX)F(z)$, а $(K_1)_n{}^{\pm}=YM_n{}^{\pm}$, $(K_2)_n{}^{\pm}=XM_n{}^{\pm}$, где $F(z)$ — решение и $M_n{}^{\pm}$ —

Таблица 1

Вершина	a			$\pi-a$	$\pi+a$	$2\pi-a$
a/π	$M_0^{\pm}$	$N^{\pm}$	$K^{\pm}$	M_1^-	M_1^+	M_2^-
0,01	0,177	0,177	0,177	0,0	0,0	0,0
0,05	0,396	0,398	0,396	0,001	0,0	0,0
0,10	0,561	0,570	0,561	0,003	0,002	0,001
0,20	0,794	0,852	0,792	0,023	0,016	0,007
0,30	0,988	1,173	0,971	0,087	0,051	0,029
0,40	1,225	1,754	1,121	0,296	0,153	0,116
0,45	1,482	2,513	1,189	0,629	0,314	0,272

Таблица 2

Вершира	a			$\pi-a$	$\pi+a$	$2\pi-a$
a/π	$M_0^{\pm}$	$N^{\pm}$	$K^{\pm}$	M_1^-	M_1^+	M_2^-
0,01	1,796	1,796	1,796	0,0	0,0	0,0
0,05	0,803	0,810	0,803	0,002	0,002	0,001
0,10	0,568	0,587	0,568	0,007	0,005	0,002
0,15	0,464	0,500	0,464	0,013	0,010	0,004
0,20	0,404	0,462	0,402	0,023	0,016	0,006
0,25	0,365	0,450	0,359	0,036	0,023	0,011
0,30	0,340	0,462	0,329	0,056	0,033	0,019
0,35	0,327	0,500	0,304	0,086	0,048	0,032
0,37	0,326	0,527	0,295	0,103	0,056	0,039
0,40	0,332	0,587	0,284	0,136	0,073	0,055
0,45	0,382	0,810	0,268	0,242	0,128	0,111

КИН частной задачи в случае $p(t)=\delta(t)$. В данном случае в формулах (3.10), (3.12)

$$iB_n=\frac{4nT^2}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi a}{T}\right)\int\limits_0^a\frac{x\xi(x)\,dx}{(x^2-n^2T^2)^2},\qquad R_0(z)=\frac{T}{\pi^2z^2}\sin\frac{\pi a}{T}$$

В табл. 2 в случае периода $T=\pi$ приведены значения коэффициентов $M_n^{\pm}$, $N^{\pm}$, $K^{\pm}$ в зависимости от отношения a/π, где $N^{\pm}=\sqrt{2}/(\pi\sqrt{\sin 2a})$ – КИН периодической задачи и $K^{\pm}=1/(\pi\sqrt{a})$ – КИН в случае одной трещины, когда к противоположным берегам трещин в средних точках приложены нормальные сосредоточенные силы единичной величины и противоположных направлений [3].

Расчеты показали, что для вершин $\pm a$ коэффициенты $M_0^{\pm}$ при $0<(a/\pi)<0{,}37$ убывают от ∞ до 0,326, а при $0{,}37<(a/\pi)<{}^1/_2$ возрастают, причем всегда $M_0^{\pm}<N^{\pm}$, $M_0^{\pm}>K^{\pm}$, хотя практически первое неравенство сказывается лишь при $(a/\pi)>0{,}1$, а второе – при $(a/\pi)>0{,}3$.

4. Вторая задача. В этом случае [6] для нахождения функций

$$\Phi_{1,2}(z)=\varkappa\Phi(z)\mp\Omega(z) \tag{4.1}$$

снова имеем краевые задачи (2.2), (2.3), где надо брать

$$g_{1,2}(t)=\mu(u'+iv')^+\pm\mu(u'+iv')^-$$

Общее решение $\Phi_2(z)$ задачи (2.3) и частное решение $F_1(z)$ задачи (2.2) в зависимости от свойств функций $g_{1,2}(t)$ даются формулами (2.4), (2.7), (3.4). Общее решение задачи (2.2) зависит от вида дополнительных условий, которые надо задать для определения постоянных, входящих в это решение.

Пусть в качестве таких условий заданы ограниченные в совокупности главные векторы P_n ($n=0, \pm 1, \ldots$) внешних усилий, действующих на берегах разрезов L_n. Тогда, взяв общее решение задачи (2.2) в виде (2.10), (2.8), согласно равенствам (1.1), (4.1), (2.2), (2.3), получим для нахождения постоянных A_k снова систему (2.13), где надо брать

$$C_n = \delta_0^{-1}\left(-i\int\limits_{L_n} F_1(t)\,dt - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}P_n\right)$$

Следовательно, в данном случае справедливы результаты разд. 2, 3.

Пусть заданы ограниченные в совокупности разности s_n ($n=0, \pm 1, \ldots$) смещений точек $nT+T-a$ и $nT+a$. Возьмем решение задачи (2.2) в виде

$$\Phi_1(z)=F_1(z)+X_2(z)Q(z), \qquad X_2(z)=X(z)\cos(\pi z/T) \tag{4.2}$$

$$Q(z) = A + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\left(\frac{1}{z-kT-T/2} + \frac{1}{kT+T/2}\right) \tag{4.3}$$

Функция $X(z)$ определяется формулой (2.5), а числа A_k таковы, что ряд (4.3) сходится и определяет функцию $Q(z)$, удовлетворяющую при больших $z\notin U(L)$ неравенству $|Q(z)|\leqslant M|z|^\lambda$, $\lambda<1$. Функция $X_2(z)$ вне любой фиксированной окрестности $U(L)$ удовлетворяет неравенствам $m\leqslant|X_2(z)|\leqslant M$, $M>m>0$ и при $y\to+\infty$ стремится к $-i$, а при $y\to-\infty$ — к i. Вычислив на основе формул (1.1), (4.1)—(4.3) разности s_n, снова получим для нахождения постоянных A_k систему (2.13), где

$$C_n = \delta_0^{-1}\left(-2\mu s_n - \int\limits_{nT+a}^{nT+T-a} F_1(t)\,dt\right)$$

и в формулах (2.12) надо брать $b=(\pi/2)-\pi a/T$.

Следовательно, в данном случае также справедливы все результаты разд. 2, 3, кроме формул для нахождения постоянных A, B и формул для КИН.

Пусть граничные условия задачи при $t\to\infty$ убывают как $|t|^{-\lambda}$, $\lambda>0$ и таким же свойством обладают при $k\to\infty$ числа s_k. Тогда функция $Q(z)$ в формуле (4.2) находится по формуле

$$Q(z) = A + \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k\left(z-kT-\frac{T}{2}\right)^{-1} \tag{4.4}$$

и при $y\to\pm\infty$ имеет предел A, а функция $\Phi_2(z)$, определяемая в данном случае формулой (3.4), имеет предел B. Функция $\Phi_1(z)$ при $y\to\pm\infty$ стремится к числам $\mp iA$. Тогда согласно равенствам (1.1), (4.1) выражение $2\varkappa(\sigma_y-i\tau_{xy}):(\varkappa+1)$ при $y\to\pm\infty$ стремится к числам $B\mp iA$. К таким же числам стремится при $y\to\pm\infty$ и выражение

$$\frac{\varkappa}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{4\mu\varkappa i}{\varkappa+1}\omega$$

Пусть G_1 и G_2 — значения одного из этих выражений при $y\to+\infty$ и $y\to-\infty$ соответственно. Тогда

$$A=(i/2)(G_1-G_2),\quad B=(^1/_2)(G_1+G_2)$$

Для КИН справедливы формулы (3.1), (3.2), (3.6), (3.9), (3.16), где функцию $Q(z)$ надо определить по формуле (4.3) или (4.4) и умножить ее еще на число $-\mathrm{ctg}(\pi a/T)$.

Замечания. 1°. Результаты разд. 2—4 остаются в силе и в случае, когда граничные условия задач на каждом отрезке L_n принадлежат классу H_0 [7] и при росте t растут по модулю не быстрее, чем некоторая функция вида $|t|^\lambda$, $\lambda<1$. В этом случае напряжения при росте z растут, вообще говоря, как $|z|^\nu$, $\lambda<\nu<1$. Такой же рост имеют, вообще говоря, и КИН вблизи вершин отрезков L_n при $n\to\infty$.

2°. В случае периодических граничных условий построенные выше решения квазипериодических задач совпадают с известными решениями соответствующих периодических задач [3, 5, 18—21], т. е. в указанном случае ограниченное на ∞ напряженное состояние будет обязательно периодическим. Заметим, что в изученных в литературе периодических задачах условие периодичности напряжений в упругой области задается как исходное, а не выводится только из периодичности граничных условий.

3°. Из результатов работы [22] следует справедливость формул (2.16) также в случае, когда последовательность $\{C_n\}\in l_p$, $\forall p$: $1\leqslant p<+\infty$, что имеет место, например, когда граничные условия задачи в окрестности бесконечности убывают как степенная функция с любой отрицательной степенью. На это указал автору Г. Я. Попов, которому автор выражает благодарность.

5. Смешанная задача. Смешанная задача состоит в нахождении функций [6]

$$\Phi_{1,2}(z)=\Phi(z)\pm i\Omega(z)/\sqrt{\varkappa} \tag{5.1}$$

по краевым условиям

$$\Phi_m^+(t)+(-1)^m i\sqrt{\varkappa}\Phi_m^-(t)=2g_m(t),\quad t\in L,\quad m=1,2 \tag{5.2}$$

$$2g_{1,2}(t)=(\sigma_y-i\tau_{xy})^+\mp 2i\mu(u'+iv')^-/\sqrt{\varkappa}$$

Условия однозначности смещений при обходе разрезов L_n в данном случае имеют согласно равенствам (1.1), (5.1) вид

$$\int\limits_{L_n}[\Phi_1^+(t)+\Phi_2^+(t)]\,dt=\frac{2}{\varkappa+1}\int\limits_{L_n}[(\sigma_y-i\tau_{xy})^++2\mu(u'+iv')^-]\,dt \tag{5.3}$$

Пусть заданы еще главные векторы P_n внешних усилий, приложенных к берегам разрезов L_n. Тогда

$$\int\limits_{L_n}[\Phi_1^+(t)-\Phi_2^+(t)]\,dt=\frac{2\sqrt{\varkappa}}{\varkappa+1}P_n+$$
$$+\frac{2i}{\varkappa+1}\int\limits_{L_n}\left[(\sigma_y-i\tau_{xy})^+-\frac{2\mu}{\varkappa}(u'+iv')^-\right]dt \tag{5.4}$$

Из условий (5.3) и (5.4), складывая и вычитая их, получим

$$\int_{L_n} \Phi_1^+(t)\,dt = E_{n1}, \quad \int_{L_n} \Phi_2^+(t)\,dt = E_{n2}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{5.5}$$

где E_{n1} — полусумма правых частей равенств (5.3) и (5.4), а E_{n2} — их полуразность.

Возьмем решения задач (5.2) в виде:

$$\Phi_m(z) = F_m(z) + X_m(z) Q_m(z)$$

$$F_m(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X_m(z)}{z-kT} \frac{1}{\pi i} \int_{L_k} \frac{\tau - kT}{X_m^+(\tau)} \frac{g_m(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{5.6}$$

$$X_m(z) = \left(\sin \frac{\pi(z+a)}{T}\right)^{-\gamma_m} \left(\sin \frac{\pi(z-a)}{T}\right)^{\gamma_m - 1} \sin \frac{\pi z}{T}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} - i\beta, \quad \gamma_2 = \frac{3}{4} - i\beta, \quad \beta = \frac{\ln \varkappa}{4\pi}$$

$$Q_m(z) = A_m + A_{m0} z^{-1} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} A_{mk} \left(\frac{1}{z-kT} + \frac{1}{kT}\right) \tag{5.7}$$

где ряд (5.6) в любой ограниченной области, не содержащей точек линии L, сходится абсолютно и равномерно, а постоянные A_{mk} надо брать так, чтобы сходился ряд (5.7). Тогда, подставив значения $\Phi_m^+(t)$ в условия (5.5), при каждом конкретном $m=1$, 2 получим для нахождения постоянных A_m, A_{mk} систему

$$\delta A_m + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{nk} A_{mk} = E_{nm} - \int_{L_n} F_m^+(t)\,dt, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \tag{5.8}$$

$$\delta = \int_{-a}^{a} X(t)\,dt, \quad \delta_{n0} = \int_{-a}^{a} \frac{X(t)\,dt}{t+nT}, \quad \delta_{nk} = \int_{-a}^{a} \frac{X(t)\,dt}{t+(n-k)T} + \frac{\delta}{kT}, \quad k \neq 0$$

где $X(t) = X_m^+(t)$. Тем самым, задача построения функций $\Phi_m(z)$ по условиям (5.2), (5.5) свелась к нахождению решений системы (5.8), которая исследуется аналогично системе (2.11).

Аналогичная система получается и в случае, когда вместо чисел P_n задаются разности смещений точек $nT+T-a$ и $nT+a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М., Рывкин М. Б.* Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1088–1094.
2. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О квазипериодических краевых задачах и их приложениях в теории упругости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 821–830.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.

4. *Бурышкин М. Л.* Обобщенная периодическая задача теории упругости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 521–531.
5. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
8. *Чибрикова Л. И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 302 с.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967. 486 с.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
11. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
12. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
13. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
14. *Салехова И. Г.* О решении задачи Римана в случае счетного множества интервалов вещественной оси // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. Вып. 18. С. 168–179.
15. *Кулагина М. Ф., Салехова И. Г.* Задача Римана в случае счетного множества контуров, периодически расположенных в правой полуплоскости // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. Вып. 13. С. 175–183.
16. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
17. *Ивлев Д. Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения // ПМТФ. 1967. № 6. С. 88–128.
18. *Линьков А. М.* Задачи теории упругости для плоскости с периодическими системами разрезов // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. Сб. 11. С. 11–18.
19. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* Array of periodic curvilinear cracks in an infinite isotropic medium // Acta mech. 1977. V. 28. № 1–4. P. 239–254.
20. *Koiter W. T.* An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet // Ing. Arch. 1959. Bd. 28. S. 168–172.
21. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 3. С. 79–88.
22. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
24.IV.1990