

УДК 539.3 : 534.1

© 1992 г. В. З. Партон, М. Л. Фильштинский

**СТАЦИОНАРНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС
В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ И ПОЛУСЛОЕ,
ОСЛАБЛЕННЫХ ТУННЕЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ
(АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ)**

Изучается антиплоская динамическая задача электроупругости для пьезоэлектрического слоя и полуслоя, содержащих туннельные вдоль их оснований криволинейные разрезы. Строятся интегральные представления решений, с использованием которых соответствующие краевые задачи сводятся к сингулярному интегродифференциальному уравнению относительно скачка амплитуды перемещения на разрезах. Исследуется асимптотика сопряженных механических и электрических полей в окрестности особых точек. Приводятся результаты численной реализации алгоритма, позволяющие оценить влияние частоты возбуждения, кривизны разреза (трещины), типа граничных условий и эффекта связанности полей на коэффициент интенсивности напряжений K_{III} .

1. Рассмотрим отнесенный к кристаллофизическим осям x_1, x_2, x_3 пьезоэлектрический слой $0 \leq x_1 \leq a, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty$, ослабленный туннельными вдоль оси x_3 разрезами L_j ($j=1, 2, \dots, k$). Условимся считать, что пьезоэлектрик представляет собой трансверсально-изотропный материал с осью симметрии, параллельной оси x_3 (кристалл гексагональной системы $6mm$, предварительно поляризованная вдоль оси x_3 пьезокерамика).

Допустим, что из бесконечности излучается монохроматическая волна сдвига $u_3^{(0)} = \text{Re}[U_3^{(0)}(x_1, x_2) \exp(-i\omega t)]$, на берегах разрезов возможно действие гармонически изменяющейся во времени, постоянной вдоль оси x_3 сдвиговой нагрузки $X_{3n}^{\pm} = \text{Re}[X_3^{\pm} \exp(-i\omega t)]$, а основания слоя свободны от сил и граничат с вакуумом. Будем предполагать, что кривизны контуров L_j и амплитуды $X_3^+ = -X_3^- = X_3$ функции класса $H[1]$ на $L = \cup L_j$ и, кроме того, $\cap L_i = \emptyset$ (фиг. 1).

В указанной постановке в слое с разрезами имеют место сопряженные механические и электромагнитные поля, соответствующие антиплоской деформации.

Полная система уравнений имеет вид [2]:

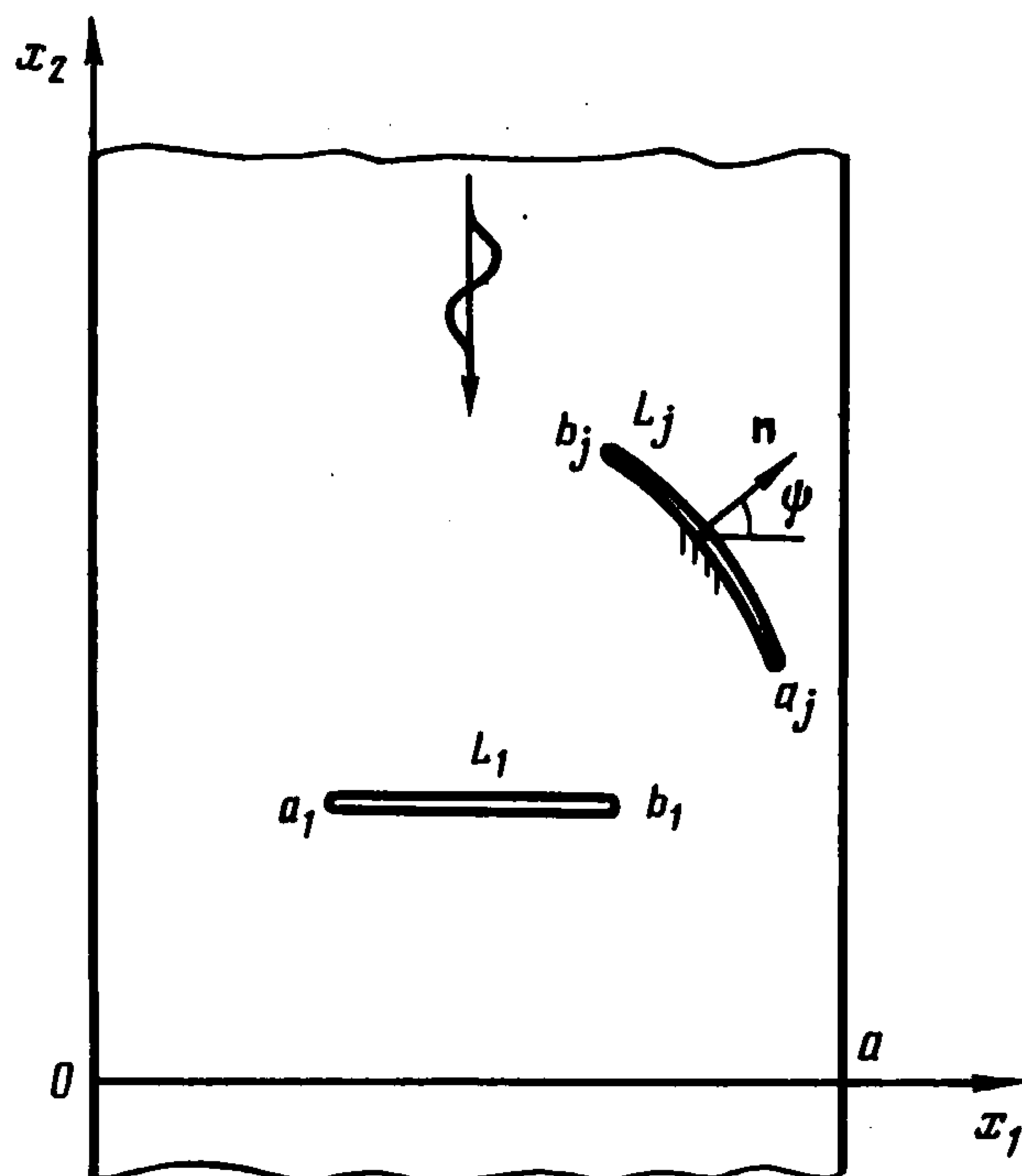
$$\tau_{\nu 3} = c_{44}^E \partial_{\nu} u_3 - e_{15} E_{\nu}, \quad D_{\nu} = e_{15} \partial_{\nu} u_3 + \epsilon_{11}^S E_{\nu} \quad (1.1)$$

$$\partial_{\nu} = \partial / \partial x_{\nu} \quad (\nu = 1, 2)$$

$$\partial_1 \tau_{13} + \partial_2 \tau_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \mu \frac{\partial H_3}{\partial t} = 0, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial_2 H_3 = \frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad \partial_1 H_3 = -\frac{\partial D_2}{\partial t}$$



Фиг. 1

Здесь τ_{13} , τ_{23} и u_3 — касательные напряжения и перемещение вдоль оси x_3 ; E_1 , E_2 , H_3 и D_1 , D_2 — соответствующие компоненты напряженности электрического и магнитного полей, а также вектора электрической индукции, c_{44}^E — модуль сдвига, e_{15} — пьезоэлектрическая постоянная, ϵ_{11}^S и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, ρ — плотность материала. Электрические краевые условия на берегах разрезов возьмем в виде [3]

$$E_s^+ = E_s^-, D_n^+ = D_n^- \quad (1.4)$$

Здесь E_s и D_n — соответственно касательная компонента вектора электрической напряженности и нормальная компонента вектора электрической индукции.

Граничные условия на основаниях слоя запишем в виде

$$\tau_{13} = 0, D_1 = 0 \quad (x_1 = 0; a) \quad (1.5)$$

Вводя функцию Φ по формулам (1.6), приходим к уравнениям

$$E_1 = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} \partial_1 u_3 + \partial_2 \Phi, \quad E_2 = -\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}^S} \partial_2 u_3 - \partial_1 \Phi, \quad H_3 = \epsilon_{11}^S \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\nabla^2 u_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$c^2 = \frac{c_{44}^E (1 + \kappa_0^2)}{\rho}, \quad c_\alpha^2 = \frac{1}{\mu \epsilon_{11}^S}, \quad \kappa_0^2 = \frac{e_{15}^2}{c_{44}^E \epsilon_{11}^S}$$

В квазистатическом приближении (для не очень больших разрезов) в широком диапазоне круговой частоты ω можно принять, что $\nabla^2 \Phi = 0$. В силу (1.1), (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= c_{44}^E (1 + \kappa_0^2) \partial_1 u_3 - e_{15} \partial_2 \Phi, \quad D_1 = \epsilon_{11}^S \partial_2 \Phi \\ \tau_{23} &= c_{44}^E (1 + \kappa_0^2) \partial_2 u_3 + e_{15} \partial_1 \Phi, \quad D_2 = -\epsilon_{11}^S \partial_1 \Phi \quad u_3 = u_3^{(0)} + u_3^* \end{aligned}$$

Здесь величина u_3^* характеризует возмущенное разрезами поле перемещения. Полагая

$$u_3 = \text{Re} [U_3(x_1, x_2)e^{-i\omega t}], \quad \Phi = \text{Re} [F(x_1, x_2)e^{-i\omega t}]$$

$$U_3 = U_3^{(0)} + U_3^*, \quad U_3^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_2 x_2}, \quad \gamma_2 = \omega/c$$

представим краевые условия на берегах L_j в виде

$$c_{44}^E (1 + \kappa_0^2) \left\{ e^{i\psi} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \zeta} \right)^\pm + e^{-i\psi} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \bar{\zeta}} \right)^\pm \right\} -$$

$$- i e_{15} \left\{ e^{i\psi} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right)^\pm - e^{-i\psi} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right)^\pm \right\} = \pm X_3^\pm \quad (1.8)$$

$$\frac{i e_{15}}{\varepsilon_{11}^S} \left\{ e^{i\psi} \left[\frac{\partial U_3}{\partial \zeta} \right] - e^{-i\psi} \left[\frac{\partial U_3}{\partial \bar{\zeta}} \right] \right\} + e^{i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] +$$

$$+ e^{-i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right] = 0, \quad e^{i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] - e^{-i\psi} \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right] = 0$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2, \quad \bar{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \zeta \in L_j, \quad [g] = g^+ - g^- \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

Верхний знак относится к левому берегу L_j (при движении от его начала a_j к концу b_j), ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу и осью ox_1 .

2. Краевые задачи (1.7), (1.5) запишем в амплитудах

$$\nabla^2 U_3 + \gamma_2^2 U_3 = 0; \quad \partial_1 U_3 = 0 \quad (x_1 = 0; a) \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 F = 0; \quad \partial_2 F = 0 \quad (x_1 = 0; a) \quad (2.2)$$

Функции Грина, соответствующие задачам (2.1), (2.2), разыскиваем в виде

$$G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x_2 - \xi_2) \cos \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k x_1 \quad (2.3)$$

$$E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (x_2 - \xi_2) \sin \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k x_1$$

$$\nabla^2 G + \gamma_2^2 G = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \quad \alpha_k = \pi k/a$$

$$\nabla^2 E = \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \quad \delta(x, y) = \delta(x) \delta(y)$$

где $\delta(x) - 2a$ — периодическая дельта-функция Дирака. Используя разложения

$$\delta(x_1 - \xi_1) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k x_1$$

$$\delta(x_1 - \xi_1) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k x_1$$

разделяя в уравнениях (2.1), (2.2) переменные и применяя затем проце-

дуру определения фундаментального решения [4], находим

$$b_k = -\frac{1}{a\lambda_k} e^{-\lambda_k|x_2-\xi_2|}, \quad b_0 = \frac{1}{2ia\gamma_2} e^{i\gamma_2|x_2-\xi_2|} \quad (2.4)$$

$$d_k = -\frac{1}{a\alpha_k} e^{-\alpha_k|x_2-\xi_2|}, \quad \lambda_k = \begin{cases} \sqrt{\alpha_k^2 - \gamma_2^2}, & \gamma_2 < \alpha_k \\ -i\sqrt{\gamma_2^2 - \alpha_k^2}, & \gamma_2 > \alpha_k \end{cases}$$

$$(k=1, 2, \dots)$$

Ряд для функции E в (2.3) легко суммируется с привлечением равенства (2.5)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m|x|}}{m} \cos my = \frac{|x|}{2} - \frac{1}{2} \ln [2(\operatorname{ch} x - \cos y)] \quad (2.5)$$

$$E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin^{1/2}\pi(\zeta - z)/a}{\sin^{1/2}\pi(\zeta + \bar{z})/a} \right| \quad (2.6)$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

Для выделения главной части функции G запишем функцию Грина G_0 старшего оператора в уравнении Гельмгольца (2.3). Суммируя соответствующие ряды с использованием (2.5), получаем

$$G_0 = -\frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_1, \xi_1) e^{-\alpha_m|x_2-\xi_2|} = -\frac{|x_2 - \xi_2|}{2a} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right|, \quad a_m = \frac{\cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1}{\alpha_m} \quad (2.7)$$

С учетом (2.4), (2.7) представим выражение (2.3) в окончательной форме

$$G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = G_0 + G_1, \quad G_1 = \frac{1}{2ia\gamma_2} e^{i\gamma_2|x_2-\xi_2|} -$$

$$- \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x_2 - \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1 \quad (2.8)$$

$$c_m(x_2 - \xi_2) = \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m|x_2-\xi_2|} - \frac{1}{\alpha_m} e^{-\alpha_m|x_2-\xi_2|}$$

$$(m=1, 2, \dots)$$

Таким образом, функции E и G , определенные в (2.6) и (2.8), представляют собой функции Грина краевых задач (2.1) и (2.2) для полосы. Условия излучения для задачи (2.1) и затухания для задачи (2.2) выполняются. После выделения главной части в (2.3) общий член ряда в (2.8) затухает в точке $z = \zeta$ как m^{-3} .

3. Применяя известный метод отражения [5], построенные выше функции Грина для слоя можно обобщить на случай полуслоя ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 < \infty$, $-\infty < x_3 < \infty$). Предположим, что боковые основания полуслоя свободны от сил и граничат с вакуумом, а на границе $x_2 = 0$ возможны следующие

типы механических и электрических условий: отсутствие усилий, контакт с вакуумом

$$\tau_{23}=0, D_2=0 \quad (3.1)$$

жесткое заземление, граница покрыта электродом и заземлена

$$u_3=0, E_1=0 \quad (3.2)$$

Можно показать, что функции Грина в этом случае определяются формулами (2.3), в которых коэффициенты b_k, d_k имеют вид

$$b_k = -\frac{1}{a\lambda_k} (e^{-\lambda_k|x_2-\xi_2|} - Ae^{-\lambda_k(x_2+\xi_2)}) \quad (3.3)$$

$$b_0 = \frac{1}{2ia\gamma_2} (e^{i\gamma_2|x_2-\xi_2|} - Ae^{i\gamma_2(x_2+\xi_2)})$$

$$d_k = -\frac{1}{a\alpha_k} (e^{-\alpha_k|x_2-\xi_2|} + Ae^{-\alpha_k(x_2+\xi_2)}) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Суммируя соответствующие ряды в (2.3), получим

$$G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = G(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) + A \left\{ \frac{i}{2a\gamma_2} e^{i\gamma_2(x_2+\xi_2)} + \right. \quad (3.4)$$

$$+ \frac{x_2 + \xi_2}{2a} - \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta + z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta - \bar{z})}{2a} \right| +$$

$$\left. + \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^*(x_2 + \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1 \right\}$$

$$E^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = E(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) + \frac{A}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin^{1/2} \pi(\zeta - \bar{z})/a}{\sin^{1/2} \pi(\zeta + z)/a} \right|$$

$$c_m^*(x_2 + \xi_2) = \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m(x_2+\xi_2)} - \frac{1}{\alpha_m} e^{-\alpha_m(x_2+\xi_2)} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Здесь случай $A=-1$ соответствует свободному, граничащему с вакуумом полуслою, случай $A=1$ — закрепленному и покрытому заземленным электродом вдоль границы $x_2=0$ полуслою. При $A=0$ приходим к формулам (2.6), (2.8) для слоя.

4. Рассеянное разрезами поле перемещения U_3^* будем разыскивать в виде

$$U_3^*(x_1, x_2) = -2i \int_L p(\zeta) \left\{ \frac{\partial G^*}{\partial \zeta} d\zeta - \frac{\partial G^*}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right\}$$

$$p(\zeta) = \frac{[U_3^*]}{2}, \quad \zeta \in L \quad (4.1)$$

Здесь неизвестная величина $[U_3^*]$ имеет смысл скачка амплитуды перемещения U_3^* на L , $G^*=G^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ определена в (3.4).

Функцию F представим следующим образом:

$$F(x_1, x_2) = \int_L f(\zeta) E^* ds \quad (4.2)$$

где $E^*=E^*(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ задана в (3.4), ds — элемент дуги контура L .

Для выяснения смысла плотности f в (4.2) вычислим сначала производные $\partial U_3^*/\partial z$, $\partial U_3^*/\partial \bar{z}$. В результате после некоторых преобразований по улучшению сходимости соответствующих рядов получим

$$\frac{\partial U_3^*}{\partial z} = \frac{\pi}{8ia^2} \int_L p(\zeta) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} d\zeta + \int_L p(\zeta) (R_1 e^{i\psi} + R_3 e^{-i\psi}) ds$$

$$\frac{\partial U_3^*}{\partial \bar{z}} = -\frac{\pi}{8ia^2} \int_L p(\zeta) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\bar{\zeta} - \bar{z})}{2a} d\bar{\zeta} + \int_L p(\zeta) (R_2 e^{i\psi} + R_4 e^{-i\psi}) ds, \quad (4.3)$$

$$R_1 = R_0 + \frac{A\pi}{8a^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\zeta + z)}{2a} - \frac{1}{2a} [A_1 - B_2 - i(A_2 + B_1)]$$

$$R_2 = -R_0 - Y - \frac{1}{2a} [A_1 + B_2 + i(A_2 - B_1)]$$

$$R_3 = -R_0 - \bar{Y} - \frac{1}{2a} [A_1 + B_2 - i(A_2 - B_1)]$$

$$R_4 = R_0 + \frac{A\pi}{8a^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\bar{\zeta} + \bar{z})}{2a} - \frac{1}{2a} [A_1 - B_2 + i(A_2 + B_1)]$$

$$R_0 = \frac{i\gamma_2}{4a} (e^{i\gamma_2|x_2 - \xi_2|} + A e^{i\gamma_2(x_2 + \xi_2)}), \quad R_m = R_m(\zeta, z)$$

$$Y = \frac{\pi}{8a^2} \left[\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} + A \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi(\zeta - \bar{z})}{2a} \right]$$

$$A_1 = \frac{a\gamma_2^2}{4\pi} \ln \left| \frac{\sin^{1/2} \pi(\zeta + \bar{z})/a}{\sin^{1/2} \pi(\zeta - z)/a} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} e^{-\lambda_k|x_2 - \xi_2|} - \left(\alpha_k + \frac{\gamma_2^2}{2\alpha_k} \right) e^{-\alpha_k|x_2 - \xi_2|} - \right.$$

$$\left. - A \left[\frac{\alpha_k^2}{\lambda_k} e^{-\lambda_k(x_2 + \xi_2)} - \alpha_k e^{-\alpha_k(x_2 + \xi_2)} \right] \right\} \sin \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k x_1$$

$$A_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\beta^- \operatorname{sign}(x_2 - \xi_2) - A\beta^+] \sin \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k x_1$$

$$B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\beta^- \operatorname{sign}(\xi_2 - x_2) - A\beta^+] \cos \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k x_1$$

$$B_2 = \frac{\gamma_2^2|x_2 - \xi_2|}{4} - \frac{a\gamma_2^2}{4\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\alpha_k - \frac{\gamma_2^2}{2\alpha_k} \right) e^{-\alpha_k|x_2 - \xi_2|} - \lambda_k e^{-\lambda_k|x_2 - \xi_2|} + A [\alpha_k e^{-\alpha_k(x_2 + \xi_2)} - \lambda_k e^{-\lambda_k(x_2 + \xi_2)}] \right\} \times$$

$$\times \cos \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k x_1$$

$$\beta^{\pm} = e^{-\lambda_k|x_2 \pm \xi_2|} - e^{-\alpha_k|x_2 \pm \xi_2|}$$

Вычисляя предельные значения функций (4.2) при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$, находим

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \zeta} \right] = -\frac{e^{-i\psi}}{2} f(\zeta), \quad \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \right] = -\frac{e^{i\psi}}{2} f(\zeta) \quad (4.4)$$

Следовательно, последнее условие в (1.8) выполнится автоматически, а предпоследнее с учетом (4.3), (4.4) приводит к равенству

$$f(\zeta) = \frac{2e_{15}}{\varepsilon_{11} s} p'(\zeta), \quad p'(\zeta) = \frac{dp(\zeta)}{ds} \quad (4.5)$$

Подставляя предельные значения функций (4.3) и производных $\partial F/\partial z$, $\partial F/\partial \bar{z}$ при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ в механическое граничное условие (1.8) на одном из берегов L и привлекая соотношение (4.5), приходим к сингулярному интегродифференциальному уравнению:

$$\int_L p'(\zeta) g_1(\zeta, \zeta_0) ds + \int_L p(\zeta) g_2(\zeta, \zeta_0) ds = N(\zeta_0) \quad (4.6)$$

$$g_1(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{a} \operatorname{Im} \left[e^{i\psi_0} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} - \kappa_0^2 P \right) \right]$$

$$g_2(\zeta, \zeta_0) = 2(1 + \kappa_0^2) [e^{i\psi_0} (e^{i\psi} R_1^0 + e^{-i\psi} R_3^0) + e^{-i\psi_0} (e^{i\psi} R_2^0 + e^{-i\psi} R_4^0)],$$

$$N(\zeta_0) = \frac{2X_3}{c_{44}E} + 2i\gamma_2\tau(1 + \kappa_0^2) \times$$

$$\times \sin \psi_0 (e^{-i\gamma_2 \xi_{20}} A e^{i\gamma_2 \xi_{20}}), \quad P = \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} + A \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} - \zeta_0)}{2a} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \zeta_0)}{2a} \right], \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20} \in L_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Здесь ядро $g_1(\zeta, \zeta_0)$ — сингулярное (типа Гильберта), ядро $g_2(\zeta, \zeta_0)$ в силу допущений относительно L может обладать не более чем слабой особенностью; функции $R_m^0 = R_m(\zeta, \zeta_0)$ определены в (4.3).

Для фиксации решения в классе функций с производными, не ограниченными на концах L [1], к (4.6) необходимо присоединить дополнительные условия

$$\int_{L_j} p'(\zeta) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (4.7)$$

5. Пусть в полуслое (слое) имеется один разрез L , параметрическое уравнение которого $\zeta = \zeta(\delta)$ ($-1 \leq \delta \leq 1$). Представим искомую плотность в интегродифференциальном уравнении (4.6) следующим образом:

$$p'(\zeta) = \frac{\Omega_0(\delta)}{s'(\delta) \sqrt{1 - \delta^2}}, \quad \Omega_0(\delta) \in H[-1, 1], \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} \quad (5.1)$$

Асимптотический анализ представлений (4.3) и производных $\partial F/\partial z$, $\partial F/\partial \bar{z}$ в окрестности вершин разреза при учете (1.1), (5.1) позволяет получить коэффициент интенсивности напряжений K_{III} [6] в виде (верхний знак относится к началу разреза, нижний — к концу)

$$K_{III}^{\mp} = \mp c_{44}E \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} \operatorname{Re} \{ e^{-i\omega t} \Omega_0(\mp 1) \} \quad (5.2)$$

Асимптотика нормальной составляющей вектора электрической индукции на продолжении за вершину разреза такова

$$D_n^{\mp} = D_1 \cos \psi(\mp 1) + D_2 \sin \psi(\mp 1) = \mp e_{15} \frac{\operatorname{Re} [e^{-i\omega t} \Omega_0(\mp 1)]}{\sqrt{2rs'(\mp 1)}} \quad (5.3)$$

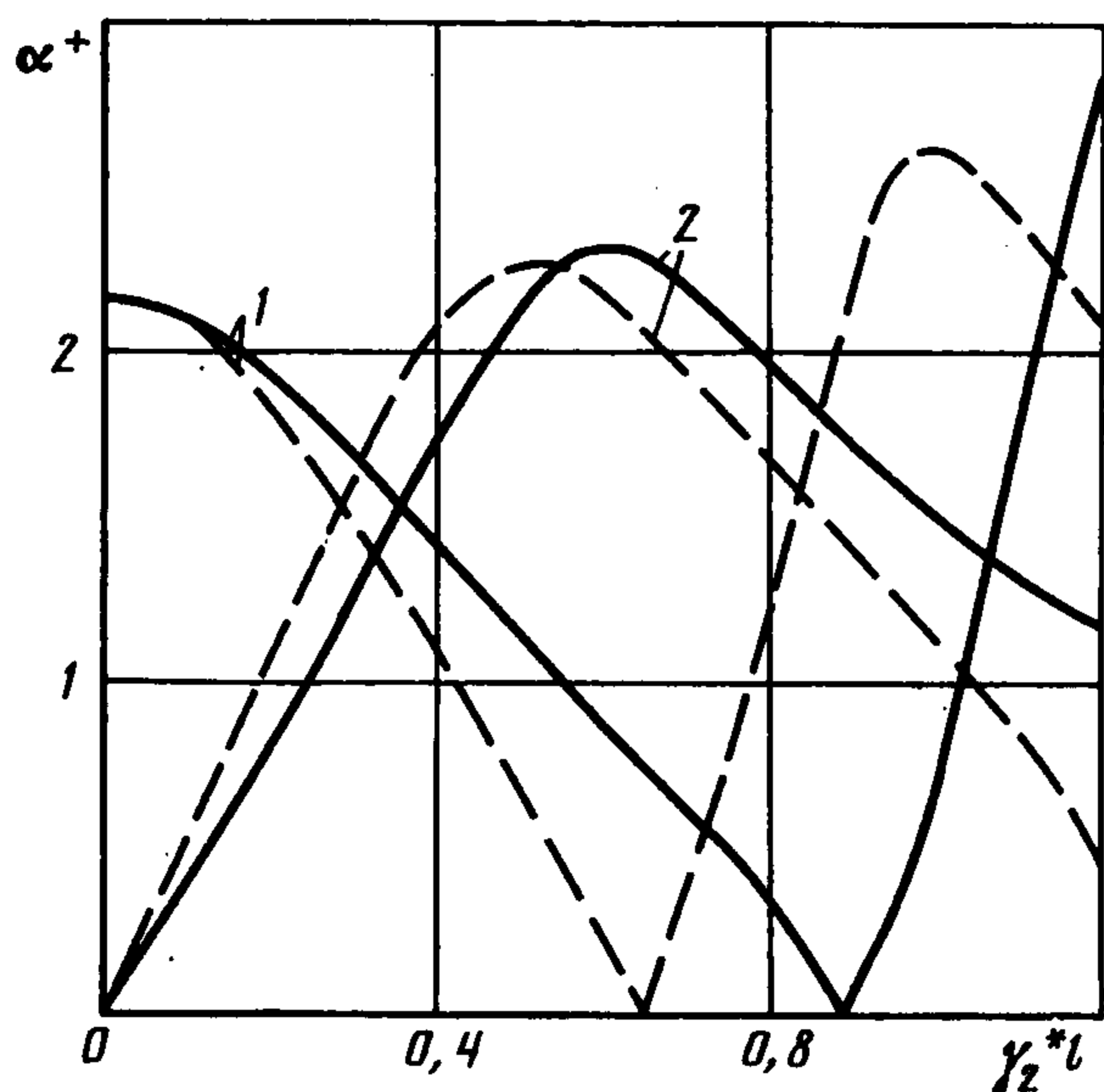
где r — расстояние до вершины.

Остальные электромагнитные величины ограничены. В самом деле, из уравнений состояния (1.1) имеем

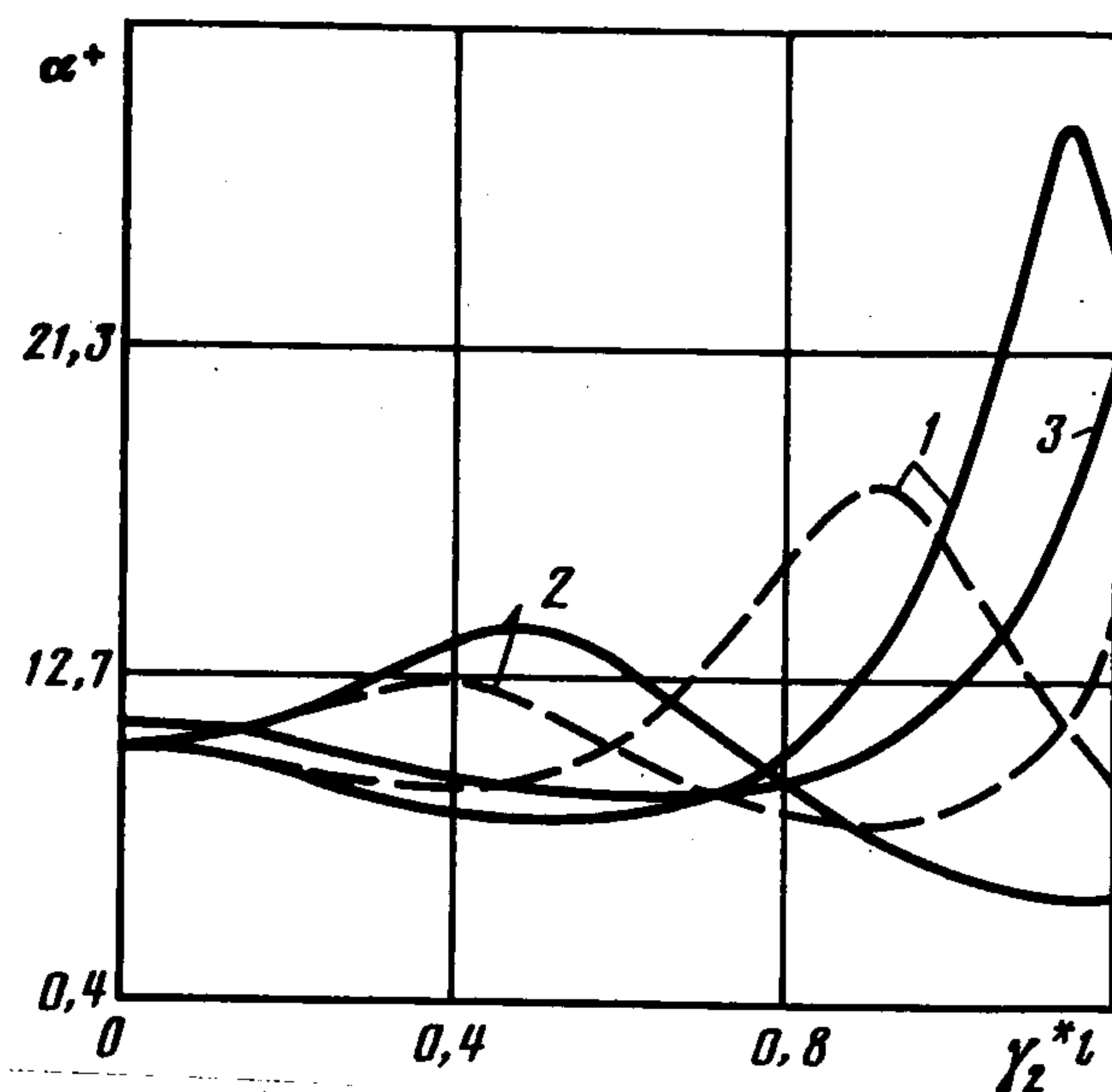
$$\tau_n = c_{44}^E \frac{\partial u_3}{\partial n} - e_{15} E_n, \quad D_n = e_{15} \frac{\partial u_3}{\partial n} + \varepsilon_{11}^S E_n \quad (5.4)$$

где D_n — нормальная компонента электрической индукции на дуге L' , как угодно близкой к L . Поскольку $[\tau_n] = [D_n] = 0$ и определитель системы (5.4) отличен от нуля, находим $[E_n] = 0$. Таким образом, электрическое поле E непрерывно продолжимо через разрез и, стало быть, непрерывно везде.

6. Интегродифференциальное уравнение (4.6) в совокупности с дополнительным условием (4.7) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_0(\delta)$ в чебышевских узлах



Фиг. 2



Фиг. 3

интерполяции согласно процедуре [7] для случая, когда в полуслое (пьезо-керамика $PZT-4$) содержится параболический разрез $\xi_1 = p_0 + p_1 \delta$, $\xi_2 = h + p_2 \delta^2$, $\delta \in [-1, 1]$. Приближенные значения функции Ω_0 вычислялись при числе узлов $n=9, 11, 13$, в рядах удерживалось $m=9$ слагаемых. Дальнейшее увеличение параметров n, m практически не уточняло результатов.

Пусть $X_3=0$ (берега разрезов свободны от сил), а из бесконечности на прямолинейный разрез падает SH — волна смещения. Изменение величины $\alpha^+ = c_{44}^E |\Omega_0(1)| / T_{23}^0 \sqrt{ls'(1)}$ в функции от нормализованного волнового числа $\gamma_2^* l = \gamma_2 l \sqrt{1 + \kappa_0^2}$, $a=1$ м ($2l$ — длина разреза) при $h/a = p_0/a = 0,5$, $p_1/a = 0,2$ показано на фиг. 2. Кривые 1 и 2 построены для значений параметра $A=1; -1$ соответственно, причем сплошные линии относятся к случаю керамики, штриховые — к случаю $\kappa_0=0$ (изотропный материал). Здесь T_{23}^0 — модуль амплитуды напряжения τ_{23} в падающей волне.

Зная величины α^\mp и $\delta^\mp = \arg[\Omega_0(\mp 1)]$, можно определить коэффициент интенсивности K_{III} по формуле

$$K_{III}^\mp = \mp T_{23}^0 \sqrt{\pi l \alpha^\mp \cos(\omega t - \delta^\mp)}$$

На фиг. 3 приведены графики величины $\alpha^+ = c_{44}^E |\Omega_0(1)| / |X_3| \sqrt{ls'(1)}$ в зависимости от параметра $\gamma_2^* l$ для случая, когда излучения из бесконечности нет, а на берегах разреза действует гармоническая во времени сдвиговая нагрузка ($\tau=0, X_3=\text{const}$). Кривые 1, 2 построены для тех же пара-

метров и в том же соответствии, что и на фиг. 2; кривая 3 относится к значению параметра $p_2/a = -0,1$ (криволинейный разрез).

Коэффициент интенсивности вычисляется в этом случае по формуле

$$K_{III}^{\mp} = \mp |X_3| \sqrt{\pi l} \alpha^{\mp} \cos(\omega t - \delta^{\mp})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Партон В. З., Кудряцев В. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. Т. 5. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 703 с.
5. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
6. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239 с.
7. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Москва, Сумы

Поступила в редакцию
23.V.1991