

УДК 539.3

© 1992 г. И. П. Гетман, В. А. Мольков

## ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ КОМПОЗИТОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

На основе метода осреднения [1, 2] предлагается способ определения точных, т. е. получаемых в результате аналитического решения задач на ячейке периодичности значений эффективных модулей упругости, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей пьезоактивного композита периодической структуры с однонаправленными волокнами, имеющими форму кругового цилиндра.

Ранее метод осреднения применялся для определения эффективных свойств слоистых пьезокомполитов в [3, 4]. Для исследования эффективных свойств волокнистых пьезокомполитов предлагались приближенные формулы, основанные на статистическом подходе [5] и на методе самосогласования и вариационных оценок [6].

1. Рассмотрим неоднородную задачу теории электроупругости для пьезоактивного композита с периодической структурой. Она описывается системой уравнений [7] и граничными условиями

$$\nabla \cdot \sigma + F = 0, \quad \nabla \cdot D = 0$$

$$\sigma = C \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \cdot \nabla u + e^T \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varphi \quad (1.1)$$

$$D = e \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \cdot \nabla u - \mathcal{E} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varphi$$

$$u|_{S_1} = u^0, \quad \sigma \cdot n|_{S_2} = \sigma^0 \quad (1.2)$$

$$\varphi|_{S_3} = \varphi^0, \quad D \cdot n|_{S_4} = \kappa^0$$

Здесь  $u$  — вектор перемещений,  $\varphi$  — электрический потенциал,  $F$  — вектор объемных сил,  $\sigma$  — тензор напряжений,  $D$  — вектор электрической индукции,  $C$  — тензор модулей упругости с компонентами  $C_{ijkl}$ ,  $e$  — тензор пьезомодулей с компонентами  $e_{kij}$ ,  $\mathcal{E}$  — тензор диэлектрических проницаемостей с компонентами  $\mathcal{E}_{kn}$ ,  $n$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $S$  области, занимаемой композитом,  $S_1$  — часть границы  $S$ , на которой заданы смещения,  $S_2 = S \setminus S_1$  — часть границы на которой заданы напряжения,  $S_3$  — часть границы  $S$ , покрытая электродами, на которых задан потенциал, и  $S_4 = S \setminus S_3$  — часть границы, свободная от электродов,  $\varepsilon$  определяет характерный линейный размер ячейки периодичности, отнесенный к линейному размеру композита.

Свяжем с ячейкой периодичности локальную систему координат  $\xi$  ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ),  $\xi_k = x_k/\varepsilon$ . Тогда в соответствии с методом осреднения [1, 2] решение задачи (1.1), (1.2) ищется в виде разложений

$$u = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \xi) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi) + \dots \quad (1.3)$$

$$\varphi = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x, \xi) + \varepsilon^2 \varphi_2(x, \xi) + \dots$$

подстановка которых в уравнения (1.1) приводит при учете равенства  $\nabla = \nabla_x + \varepsilon^{-1} \nabla_\xi$ , где  $\nabla_x, \nabla_\xi$  — набла-операторы в системах  $x$  и  $\xi$  соответственно, к последовательности уравнений ( $\delta_{ik}$  — символ Кронекера).

$$\nabla_x \cdot \sigma_{k-1} + \nabla_\xi \cdot \sigma_k + \delta_{ik} \mathbf{F} = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla_x \cdot \mathbf{D}_{k-1} + \nabla_\xi \cdot \mathbf{D}_k = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\sigma_k = \mathbf{C}(\xi) \cdot (\nabla_x \mathbf{u}_k + \nabla_\xi \mathbf{u}_{k+1}) + \mathbf{e}^T(\xi) \cdot (\nabla_x \varphi_k + \nabla_\xi \varphi_{k+1}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{e}(\xi) \cdot (\nabla_x \mathbf{u}_k + \nabla_\xi \mathbf{u}_{k+1}) - \mathfrak{D}(\xi) \cdot (\nabla_x \varphi_k + \nabla_\xi \varphi_{k+1})$$

— соответствующие компоненты в разложении по параметру  $\varepsilon$  тензора напряжений  $\sigma$  и вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$ . В (1.4) компоненты с отрицательным индексом следует полагать равными нулю.

Отметим, что  $\mathbf{u}_k(x, \xi), \varphi_k, \sigma_k(x, \xi), \mathbf{D}_k(x, \xi), (k \geq 1)$  — периодические по быстрой координате  $\xi$  функции.

Задача на нулевом этапе ( $k=0$ ) (назовем ее задачей на ячейке) представима в виде

$$\nabla_\xi \cdot \sigma_0 = 0, \quad \nabla_\xi \cdot \mathbf{D}_0 = 0 \quad (1.6)$$

и заключается в отыскании периодических функций  $u_1, \varphi_1$  на ячейке периодичности. С этой целью представим  $u_1$  и  $\varphi_1$  в виде

$$u_1(x, \xi) = \mathbf{N}(\xi) \cdot \nabla_x u_0 + \mathbf{R}(\xi) \cdot \nabla_x \varphi_0 \quad (1.7)$$

$$\varphi_1(x, \xi) = \mathbf{S}(\xi) \cdot \nabla_x u_0 + \mathbf{\Phi}(\xi) \cdot \nabla_x \varphi_0$$

где  $\mathbf{N}(\xi), \mathbf{R}(\xi), \mathbf{S}(\xi), \mathbf{\Phi}(\xi)$  — периодические по  $\xi$  тензорные функции соответственно третьего, второго, второго и первого рангов.

На основании соотношений (1.5) запишем представления

$$\sigma_0 = (\mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \nabla_\xi \mathbf{N} + \mathbf{e}^T \cdot \nabla_\xi \mathbf{S}) \cdot \nabla_x u_0 + (\mathbf{e}^T + \mathbf{C} \cdot \nabla_\xi \mathbf{R} + \mathbf{e}^T \cdot \nabla_\xi \mathbf{\Phi}) \cdot \nabla_x \varphi_0 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{D}_0 = (\mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla_\xi \mathbf{N} - \mathfrak{D} \cdot \nabla_\xi \mathbf{S}) \cdot \nabla_x u_0 - (\mathfrak{D} - \mathbf{e} \cdot \nabla_\xi \mathbf{R} + \mathfrak{D} \cdot \nabla_\xi \mathbf{\Phi}) \cdot \nabla_x \varphi_0$$

Тогда уравнения (1.6) будут выполняться для любых  $u_0(x), \varphi_0(x)$ , если будут справедливы следующие две группы равенств:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla_\xi \mathbf{N} + \mathbf{e}^T \cdot \nabla_\xi \mathbf{S} + \mathbf{C}) &= 0 \\ \nabla_\xi \cdot (\mathbf{e} \cdot \nabla_\xi \mathbf{N} - \mathfrak{D} \cdot \nabla_\xi \mathbf{S} + \mathbf{e}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla_\xi \mathbf{R} + \mathbf{e}^T \cdot \nabla_\xi \mathbf{\Phi} + \mathbf{e}^T) &= 0 \\ \nabla_\xi \cdot (\mathbf{e} \cdot \nabla_\xi \mathbf{R} - \mathfrak{D} \cdot \nabla_\xi \mathbf{\Phi} - \mathfrak{D}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом, задача на ячейке свелась к определению периодических локальных функций  $N_{kpq}(\xi), S_{pq}(\xi)$  из системы уравнений (1.9)

$$(C_{ijkl} N_{kpq,l} + e_{kij} S_{pq,k})_{,j} = -C_{ijpq,j} \quad (1.11)$$

$$(e_{kij} N_{ipq,j} - \mathfrak{D}_{kn} S_{pq,n})_{,k} = -e_{kpq,k}$$

и функций  $R_{kq}(\xi)$ ,  $\Phi_q(\xi)$  из системы (1.10)

$$(C_{ijkl}R_{kq,l} + e_{kij}\Phi_{q,h})_{,j} = -e_{qij,j}, \quad (e_{kij}R_{iq,j} - \partial_{kn}\Phi_{q,n})_{,k} = \partial_{kq,k} \quad (1.12)$$

на ячейке периодичности.

Для однозначной разрешимости уравнений (1.11) и (1.12) следует потребовать условие

$$\langle N_{kpq}(\xi) \rangle = \langle S_{pq}(\xi) \rangle = \langle R_{pq}(\xi) \rangle = \langle \Phi_q(\xi) \rangle = 0 \quad (1.13)$$

где угловыми скобками обозначается среднее по объему ячейки периодичности. Кроме условий (1.13), к (1.11) и (1.12) необходимо добавить условия непрерывности на границе волокна и матрицы перемещений, вектора напряжений, электрического потенциала и нормальной компоненты вектора электрической индукции

$$\begin{aligned} [N_{kpq}] &= 0, \quad [S_{pq}] = 0 \\ [C_{ijkl}N_{kpq,l} + e_{kij}S_{pq,h} + C_{ijpq}]n_j &= 0 \\ [e_{kij}N_{ipq,j} - \partial_{kn}S_{pq,n} + e_{kpq}]n_k &= 0 \\ [R_{kq}] &= 0, \quad [G_{ijkl}R_{kq,l} + e_{kij}\Phi_{q,h} + e_{qij}]n_j = 0 \\ [\Phi_q] &= 0, \quad [e_{kij}R_{iq,j} - \partial_{kn}\Phi_{q,n} - \partial_{kq}]n_k = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} [R_{kq}] &= 0, \quad [G_{ijkl}R_{kq,l} + e_{kij}\Phi_{q,h} + e_{qij}]n_j = 0 \\ [\Phi_q] &= 0, \quad [e_{kij}R_{iq,j} - \partial_{kn}\Phi_{q,n} - \partial_{kq}]n_k = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

где квадратные скобки обозначают скачок заключенных в них величин на границе раздела фаз,  $n_j$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности волокна.

После решения задач (1.11), (1.12) могут быть найдены эффективные модули композита. Для этого рассмотрим систему уравнений (1.4) при  $k=1$  и проинтегрируем их по объему ячейки периодичности

$$\nabla_x \langle \sigma_0 \rangle + \langle \nabla_\xi \cdot \sigma_1 \rangle + F = 0, \quad \nabla_x \cdot \langle D_0 \rangle + \langle \nabla_\xi \cdot D_1 \rangle = 0 \quad (1.16)$$

Вторые слагаемые в (1.16) в силу теоремы Гаусса — Остроградского и условий периодичности обращаются в нуль, поэтому макроскопические уравнения равновесия имеют вид

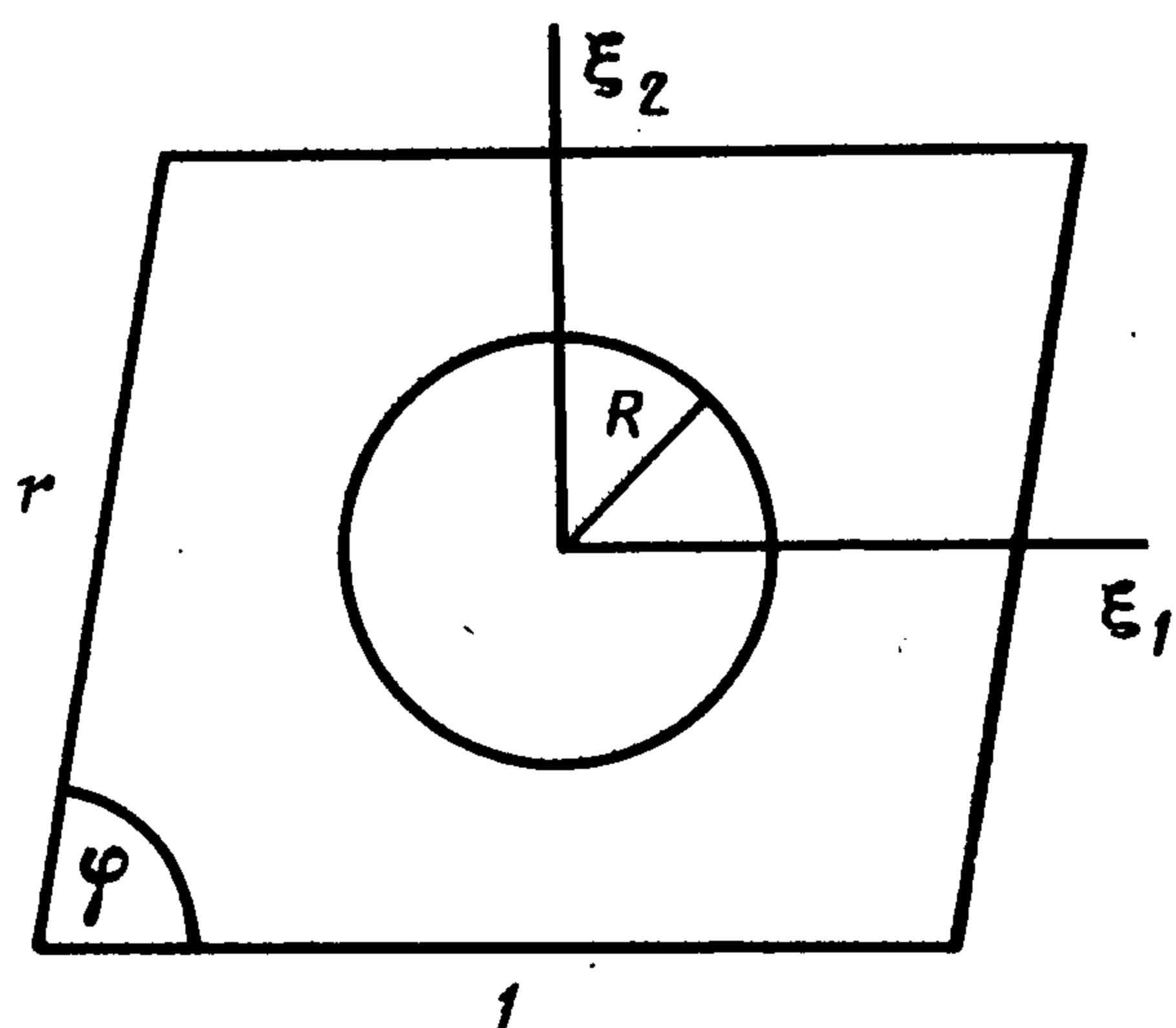
$$\nabla_x \cdot \sigma^* + F = 0, \quad \nabla_x \cdot D^* = 0 \quad (1.17)$$

где  $\sigma^* = \langle \sigma_0 \rangle$ ,  $D^* = \langle D_0 \rangle$ . Сравнивая с соотношениями (1.8), определяем эффективные свойства пьезоактивного композита

$$C_{ijpq}^* = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl}N_{kpq,l} + e_{kij}S_{pq,k} \rangle$$

$$\partial_{kn}^* = \langle \partial_{kn} + \partial_{kl} \Phi_{n,l} - e_{kij} R_{in,j} \rangle \quad (1.18)$$

$$e_{kij}^* = \langle e_{kij} + e_{kmn} N_{mij,n} - \partial_{kn} S_{ij,n} \rangle$$



Фиг. 1

2. Рассмотрим пьезоактивный композит периодической структуры с однонаправленными волокнами, имеющими форму кругового цилиндра. Ось  $x_3$  прямоугольной декартовой системы координат  $x(x_1, x_2, x_3)$  выберем совпадающей с направлением волокон. В дальнейшем будем считать, что сечение ячейки периодичности плоскостью  $x_1 x_2$  — параллелограмм, длина одной из сторон которого равна единице, а длина другой стороны —  $r$  (фиг. 1). При  $r=1$ ,  $\varphi=\pi/2$  имеем квадратную структуру,

случай  $r=1$ ,  $\varphi=\pi/3$  — соответствует гексагональной структуре. Для квадратной структуры максимальная объемная концентрация включений  $\gamma$  составляет 0,78, а для гексагональной — 0,86 от объема композита.

Будем считать, что компоненты пьезокомпозита принадлежат классу симметрии  $6mm$ , а ось поляризации совпадает с направлением волокон. Тогда определяющие соотношения из (1.1) могут быть представлены в виде [7]:

$$\sigma_{11} = C_{11}\epsilon_{11} + C_{12}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33} - e_{31}E_3, \quad \sigma_{22} = C_{12}\epsilon_{11} + C_{11}\epsilon_{22} + C_{13}\epsilon_{33} - e_{31}E_3 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{33} = C_{13}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + C_{33}\epsilon_{33} - e_{33}E_3, \quad \sigma_{\alpha 3} = 2C_{44}\epsilon_{\alpha 3} - e_{15}E_\alpha, \quad \sigma_{12} = 2C_{66}\epsilon_{12}$$

$$D_\alpha = 2e_{15}\epsilon_{\alpha 3} + \partial_{11}E_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad D_3 = e_{31}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + e_{33}\epsilon_{33} + \partial_{33}E_3$$

Здесь использована традиционная двухиндексная запись компонент тензоров  $C_{ijkl}$  и  $e_{klm}$ , согласно которой симметричная пара индексов заменяется одним по правилу:  $ij$  заменяется на  $i$  при  $i=j$ , и на  $9-i-j$  при  $i \neq j$ .

Если волокна выполнены из пьезоактивного материала, а связующая матрица — пассивный диэлектрик ( $e_{klm} \equiv 0$ ), то пьезокомпозит согласно классификации [8] имеет структуру 1—3. В противоположном случае — структуру 3—1, допускающую, в частности, пористую керамику.

Композиты указанного строения широко используются при изготовлении пьезоэлектрических преобразователей с высокой объемной пьезочувствительностью, низким импедансом и равномерной амплитудно-частотной характеристикой [8, 9].

Для композита выбранной структуры неизвестные функции  $N_{kpq}$ ,  $S_{pq}$ ,  $R_{kq}$ ,  $\Phi_q$  зависят от двух координат  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и определяются из задач (1.11), (1.14) и (1.12), (1.15), которые обозначим  $I_{pq}$  и  $J_q$  соответственно. В силу симметрии  $C_{ijpq}$ ,  $e_{kpq}$  по последним двум индексам достаточно решить шесть задач  $I_{pq}$  при  $p \leq q$  и три задачи  $J_q$ . Для краткости в дальнейшем последнюю пару индексов у функций  $N_{kpq}$ ,  $S_{pq}$  и последний индекс у функций  $R_{kq}$ ,  $\Phi_q$  будем опускать.

Из решения задач  $I_{\beta\beta}$  ( $p=q=\beta=1, 2, 3$ ), которые при учете соотношений (2.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} (C_{11kl}N_{k,l}+C_{1\beta})_{,1}+(C_{12kl}N_{k,l})_{,2}&=0 \\ (C_{21kl}N_{k,l})_{,1}+(C_{22kl}N_{k,l}+C_{2\beta})_{,2}&=0 \\ N_3=S&\equiv 0, \quad k, l=1, 2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

могут быть определены в соответствии с (1.18) эффективные значения следующих отличных от нуля параметров:

$$\begin{aligned} C_{1\beta}^* &= \langle C_{1\beta} + C_{11}N_{1,1} + C_{12}N_{2,2} \rangle \\ C_{2\beta}^* &= \langle C_{2\beta} + C_{12}N_{1,1} + C_{11}N_{2,2} \rangle \\ C_{3\beta}^* &= \langle C_{3\beta} + C_{13}N_{1,1} + C_{13}N_{2,2} \rangle \\ C_{\beta\beta}^* &= \langle C_{\beta\beta}(N_{1,2} + N_{2,1}) \rangle \\ e_{3\beta}^* &= \langle e_{3\beta} + e_{31}N_{1,1} + e_{31}N_{2,2} \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение задачи  $I_{12}$

$$\begin{aligned} (C_{11kl}N_{k,l})_{,1}+(C_{12kl}N_{k,l}+C_{\beta\beta})_{,2}&=0 \\ (C_{21kl}N_{k,l}+C_{\beta\beta})_{,1}+(C_{22kl}N_{k,l})_{,2}&=0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

позволяет определить

$$C_{\beta\beta}^* = \langle C_{\beta\beta} + C_{\beta\beta}(N_{1,2} + N_{2,1}) \rangle, \quad e_{3\beta}^* = \langle e_{31}(N_{1,1} + N_{2,2}) \rangle \quad (2.5)$$

Решая задачи  $I_{\alpha 3}$  ( $\alpha=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} (C_{44}N_{3,1}+e_{15}S_{,1}+\delta_{1\alpha}C_{44})_{,1}+(C_{44}N_{3,2}+e_{15}S_{,2}+\delta_{2\alpha}C_{44})_{,2}&=0 \\ (e_{15}N_{31}-\mathcal{E}_{11}S_{,1}+\delta_{1\alpha}e_{15})_{,1}+(e_{15}N_{32}-\mathcal{E}_{11}S_{,2}+\delta_{2\alpha}e_{15})_{,2}&=0, \quad N_1=N_2 \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

определяем следующие эффективные параметры:

$$\begin{aligned} C_{55}^* &= \langle C_{44} + C_{44}N_{3,1} + e_{15}S_{,1} \rangle \\ C_{45}^* &= \langle C_{44}N_{3,2} + e_{15}S_{,2} \rangle \\ e_{15}^* &= \langle e_{15} + e_{15}N_{3,1} - \mathcal{E}_{11}S_{,1} \rangle \\ e_{25}^* &= \langle e_{15}N_{3,2} - \mathcal{E}_{11}S_{,2} \rangle \quad (\alpha=1) \\ C_{44}^* &= \langle C_{44} + C_{44}N_{3,2} + e_{15}S_{,2} \rangle \\ e_{14}^* &= \langle e_{15}N_{3,1} - \mathcal{E}_{11}S_{,1} \rangle \\ e_{24}^* &= \langle e_{15} + e_{15}N_{3,2} - \mathcal{E}_{11}S_{,2} \rangle \quad (\alpha=2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из решения задач  $J_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ), совпадающих по виду с уравнениями (2.6), в которых функции  $N_3$  и  $S$  заменяются на  $R_3$  и  $\Phi$ , а коэффициенты при символах Кронекера  $C_{44}$  и  $e_{15}$  заменяются на  $e_{15}$  и  $-\mathcal{E}_{11}$  соответственно, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11}^* &= \langle \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{11}\Phi_{,1} - e_{15}R_{3,1} \rangle \\ \mathcal{E}_{12}^* &= \langle \mathcal{E}_{11}\Phi_{,2} - e_{15}R_{3,2} \rangle \quad (\alpha=1) \\ \mathcal{E}_{22}^* &= \langle \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{11}\Phi_{,2} - e_{15}R_{3,2} \rangle \quad (\alpha=2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эффективную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_{33}^*$  определяем по формуле

$$\varepsilon_{33}^* = \langle \varepsilon_{33} - e_{31} R_{1,1} - e_{31} R_{2,2} \rangle \quad (2.9)$$

где функции  $R_1, R_2$  — решения задачи  $J_3$ , которая получается из (2.2) заменой  $N_k$  на  $R_k, S$  на  $\Phi$  и  $C_{1\beta}, C_{2\beta}$  на  $e_{31}$ .

3. Для решения сформулированных задач  $I_{pq}, J_q$  воспользуемся методами теории функций комплексной переменной [10]. Для задач  $I_{\beta\beta}, I_{12}, J_3$  решения могут быть выражены через функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{a_0}{R} z + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \\ \psi_1(z) &= \frac{b_0}{R} z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k R^k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k \frac{Q^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \\ \varphi_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{z}{R}\right)^k, \quad \psi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{R}\right)^k \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $z = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $\zeta(z)$  — дзета-функция Вейерштрасса,  $Q(z)$  — функция Нансона [10],  $a_0, b_0, a_k, b_k, c_k, d_k$  — некоторые комплексные постоянные,  $\Sigma^*$  — суммирование по нечетным значениям индекса. Здесь  $\varphi_1(z), \psi_1(z)$  — функции, относящиеся к области связующего материала, а  $\varphi_2(z)$  и  $\psi_2(z)$  относятся к области волокна, содержащего начало координат (фиг. 1).

Коэффициенты  $a_0$  и  $b_0$  выражаются через  $a_1$  и  $b_1$  из условия периодичности искомых функций [11]. Коэффициенты  $a_k, b_k, c_k$  и  $d_k$  ( $k \geq 1$ ) определяются из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, полученных в результате выполнения условий сопряжения на границе раздела сред (1.14), (1.15). Эта бесконечная система относится к нормальному типу и ее вид известен [11].

После решения линейной алгебраической системы уравнений эффективные характеристики пьезокompозита могут быть определены через коэффициенты  $a_1$  и  $C_1$  по формулам:

$$\begin{aligned} C_{1\beta}^* &= \langle C_{1\beta} \rangle - \gamma \operatorname{Re} \{A_1 + p_2(1)A_2 + p_1(\beta)\} \\ C_{2\beta}^* &= \langle C_{2\beta} \rangle + \gamma \operatorname{Re} \{A_1 - p_2(1)A_2 + p_1(\beta)\} \\ C_{3\beta}^* &= \langle C_{3\beta} \rangle - \gamma [C_{31}] \operatorname{Re} A_2, C_{6\beta}^* = -\gamma \operatorname{Im} A_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} e_{3\beta}^* &= \langle e_{3\beta} \rangle - \gamma [e_{31}] \operatorname{Re} A_2, C_{66}^* = C_{66}^1 - \gamma \operatorname{Im} A_1 \\ e_{36}^* &= -\gamma [e_{31}] \operatorname{Re} A_2, \varepsilon_{33}^* = \langle \varepsilon_{33} \rangle + \gamma [e_{31}] \operatorname{Re} A_2 \\ p_1(\beta) &= ([C_{2\beta}] - [C_{1\beta}])/2, p_2(\beta) = ([C_{1\beta}] + [C_{2\beta}])/2 \\ A_1 &= (1 + \kappa_1) a_1 / R, A_2 = (\kappa_2 C_1 - \bar{C}_1) / C_{66}^2 / R, \kappa_x = 3 - 4C_{12}^\alpha / (C_{11}^\alpha + C_{12}^\alpha) \end{aligned}$$

Здесь и далее верхний индекс означает принадлежность к компоненту композита: 1 — к связующему материалу, 2 — к материалу волокна; квадратными скобками обозначен скачок заключенной в ней величины  $[F] = F^1 - F^2$ .

Для задач  $I_{\alpha z}, J_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) комплексные потенциалы имеют вид (3.1). При этом в выражении для функции  $\psi_1(z)$  последнюю сумму следует по-

ложить равной нулю. В отличие от задач  $I_{\text{об}}$ ,  $I_{12}$ ,  $J_3$  данные задачи являются связанными (отличные от нуля функции  $S$  и  $\Phi$  выражаются через потенциал  $\psi_1(z)$ ). Из удовлетворения условиям сопряжения на границе раздела волокна и связующего может быть сформирована бесконечная алгебраическая система уравнений для определения комплексных коэффициентов  $a_k$ ,  $b_k$ . По найденным из бесконечной системы коэффициентам  $a_1$ ,  $b_1$  соответствующие эффективные характеристики композита определяются по формулам:

$$\begin{aligned} C_{55}^* &= C_{44}^1 - \gamma \operatorname{Re} B_1, & C_{45}^* &= -\gamma \operatorname{Im} B_1 \\ e_{15}^* &= e_{15}^1 - \gamma \operatorname{Re} B_2, & e_{25}^* &= -\gamma \operatorname{Im} B_2 \\ C_{44}^* &= C_{44}^1 - \gamma \operatorname{Im} B_1, & e_{14}^* &= -\gamma \operatorname{Re} B_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$e_{24}^* = e_{15}^1 - \gamma \operatorname{Im} B_2, \quad \mathcal{E}_{11}^* = \mathcal{E}_{11}^1 + \gamma \operatorname{Re} B_2, \quad \mathcal{E}_{21}^* = \gamma \operatorname{Im} B_2, \quad \mathcal{E}_{22}^* = \mathcal{E}_{11}^1 + \gamma \operatorname{Im} B_2$$

$$B_1 = 2(C_{44}^1 a_1 + e_{15}^1 b_1) / R, \quad B_2 = 2(e_{15}^1 a_1 - \mathcal{E}_{11}^1 b_1) / R$$

Заметим, что постоянные  $a_1$ ,  $C_1$  в формулах (3.2),  $a_1$ ,  $b_1$  в формулах (3.3) изменяются в зависимости от типа решаемой задачи.

По найденной полной матрице эффективных модулей  $C_{ij}^*$ ,  $e_{kl}^*$ ,  $\mathcal{E}_{mn}^*$  можно определить любой другой набор параметров, характеризующих пьезоактивную среду, в частности пьезомодули  $d_{km}^*$ , объемный пьезомодуль  $d_V^* = d_{33}^* + 2d_{31}^*$  пьезочувствительность  $g_V^* = d_V^* / \mathcal{E}_{33}$  [12] и др.

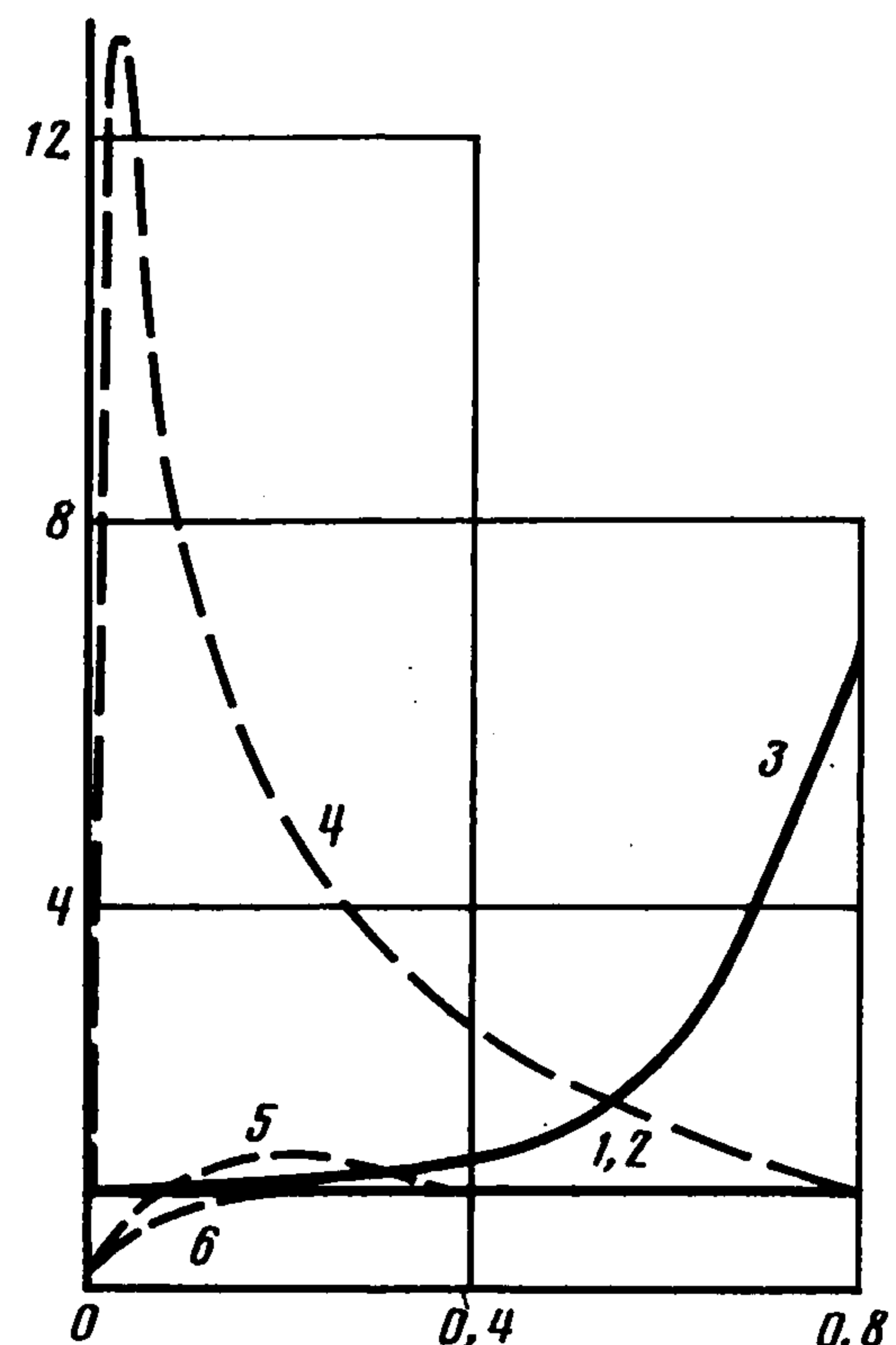
4. Приведем некоторые результаты расчетов по определению эффективных характеристик рассмотренных пьезокомпозитов.

На фиг. 2 сплошными кривыми представлены графики эффективных характеристик, нормированных к соответствующим значениям для пьезоактивного компонента, в случае пористого композита типа 3-1 с гексагональной структурой в зависимости от объемной концентрации пор  $\gamma$ . В качестве пьезоактивной матрицы выбрана пьезокерамика PZT-4 [12].

Характерными особенностями пьезокомпозита такого типа являются практическая независимость пьезомодулей  $d_{33}^*$  и  $d_V^*$  (кривые 1 и 2) от объемной концентрации пор  $\gamma$ , резкое увеличение пьезочувствительности  $g_V^*$  (кривая 3) с ростом  $\gamma$ .

Отметим, что заполнение пор эпоксидной смолой (модуль Юнга  $E=3$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu=0,4$ , диэлектрическая проницаемость  $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0=5$ ) не приводит к качественному изменению отмеченных закономерностей, при этом незначительно меняются лишь количественные показатели.

Пунктирные кривые на фиг. 2 соответствуют эффективным значениям для пьезокомпозита типа 1-3, представляющего собой волокна пьезокерамики PZT-4, находящиеся в наполнителе из эпоксидной смолы (гексагональная упаковка). По оси абсцисс откладывается объемная концентрация пьезоактивных волокон  $\gamma$ .



Фиг. 2

Типичными особенностями такого композита являются значительный рост пьезочувствительности  $g_V^*$  (кривая 4) при малых концентрациях пьезокерамических волокон, наличие локального максимума у величины объемного пьезомодуля  $d_V^*$  (кривая 5), слабая зависимость пьезомодуля  $d_{33}^*$  (кривая 6) от параметра  $\gamma$  в широкой области его изменения.

Помимо расчетов свойств композитов с гексагональной упаковкой были проведены расчеты для квадратной упаковки. Заметим, что в обоих случаях симметрия эффективных свойств композита совпадает с симметрией пьезоактивного компонента. Исключение представляет модуль упругости  $C_{66}^*$  для квадратной структуры, который не равен  $(C_{11}^* - C_{12}^*)/2$ . Из расчетов установлено, что при малых объемных концентрациях волокон (пор) эффективным модули в том и другом случаях практически совпадают. С ростом объемной концентрации волокон расхождения становятся существенными. Так, например, для модулей  $C_{11}^*$ ,  $C_{13}^*$ ,  $C_{44}^*$ ,  $e_{31}^*$ ,  $e_{15}^*$  при  $\gamma=0,75$  расхождения превышают 25%.

В заключение приведем простые расчетные формулы для определения эффективных свойств рассмотренных волокнистых пьезокомпозитов. Относительная погрешность

$$\Delta = 100\% \cdot (m - m_0)/m \quad (3.4)$$

для этих формул, следующих из аналитического решения задач на ячейке периодичности, не превышает 1% в диапазоне изменения  $\gamma$  от 0 до 0,4. В (3.4)  $m$  — точное значение модуля,  $m_0$  — приближенное значение, вычисленное по формулам, которые, например, для модулей  $C_{55}^*$ ,  $e_{15}^*$  и  $\mathcal{D}_{11}^*$  имеют вид

$$\begin{aligned} C_{55}^* &= C_{44}^1 - 2\gamma C_{44}^1 \beta_1 - 2\gamma e_{15}^1 \beta_2 \\ e_{15}^* &= e_{15}^1 - 2\gamma e_{15}^1 \beta_1 + 2\gamma \mathcal{D}_{11}^1 \beta_2 \\ \mathcal{D}_{11}^* &= \mathcal{D}_{11}^1 + 2\gamma e_{15}^1 \beta_1 - 2\gamma \mathcal{D}_{11}^1 \beta_2 \end{aligned}$$

где  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  удовлетворяют системе уравнений

$$a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 = a_{10}, \quad a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 = a_{20}$$

в которой

$$\begin{aligned} a_{11} &= C_{44}^1(1+\gamma) + C_{44}^2(1-\gamma) \\ a_{12} &= a_{21} = e_{15}^1(1+\gamma) + e_{15}^2(1-\gamma) \\ a_{22} &= -\mathcal{D}_{11}^1(1+\gamma) - \mathcal{D}_{11}^2(1-\gamma) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  для определения  $C_{55}^*$ ,  $e_{15}^*$  имеют вид

$$a_{10} = C_{44}^1 - C_{44}^2, \quad a_{20} = e_{15}^1 - e_{15}^2$$

а для определения  $\mathcal{D}_{11}^*$  —

$$a_{10} = e_{15}^1 - e_{15}^2, \quad a_{20} = \mathcal{D}_{11}^2 - \mathcal{D}_{11}^1$$

Другие независимые модули можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} C_{11}^* &= \langle C_{11} \rangle - \gamma p_1(1)\alpha_1 - \gamma p_2(1)\alpha_2 \\ C_{21}^* &= \langle C_{21} \rangle + \gamma p_1(1)\alpha_1 - \gamma p_2(1)\alpha_2 \\ C_{31}^* &= \langle C_{31} \rangle - \gamma [C_{31}] \alpha_2, \quad e_{31}^* = \langle e_{31} \rangle - \gamma [e_{31}] \alpha_2 \\ C_{33}^* &= \langle C_{33} \rangle - \gamma [C_{31}]^2 \alpha_3, \quad \mathcal{D}_{33}^* = \langle \mathcal{D}_{33} \rangle + \gamma [e_{31}]^2 \alpha_3 \\ e_{33}^* &= \langle e_{33} \rangle - \gamma [C_{31}] [e_{31}] \alpha_3 \\ C_{66}^* &= C_{66}^1 - \gamma [C_{66}] (1 + \kappa_1) / (1 + \kappa_1 \kappa + \alpha_{33}) \\ \alpha_1 &= 1 - (1 + \kappa_1) / (1 + \kappa_1 \kappa + \alpha_{11}) \\ \alpha_2 &= (1 - \gamma) (\kappa_2 - 1) p_2(1) / (C_{66}^1 \alpha_{22}) \\ \alpha_{11} &= (1 - \kappa) \{ (\kappa_1 + 5S_4/\pi^2) \gamma - 6S_4 R^4 \} \\ \alpha_{22} &= 2\kappa (1 - \gamma) + (\kappa_2 - 1) (1 + 2\gamma / (\kappa_1 - 1)) \\ \alpha_{33} &= (1 - \kappa) \{ (\kappa_1 - 5S_4/\pi^2) \gamma + 6S_4 R^4 \} \\ \alpha_3 &= \alpha_2 / p_2(1), \quad \kappa = C_{66}^2 / C_{66}^1 \end{aligned}$$

Параметр  $S_4=3,151212$  для квадратной структуры, а для гексагональной структуры  $S_4=0$ .

Полученные результаты позволяют прогнозировать эффективные свойства однонаправленного волокнистого композита периодической структуры в зависимости от упругих, электрических и геометрических параметров его компонентов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. Победря Б. Е., Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
3. Гетман И. П., Рябов А. П., Устинов Ю. А. О возможностях метода осреднения в задаче о распространении волн в электроупругом слое с периодической неоднородностью по толщине // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 118–124.
4. Кудрявцев Б. А., Милосердова В. И. Математическая модель пьезоэлектрического композита регулярной структуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 83–89.
5. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989. 207 с.
6. Греков А. А., Крамаров С. О., Куприенко А. А. Эффективные свойства трансверсально-изотропного пьезокомпозита с цилиндрическими включениями // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 62–69.
7. Улитко А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 15. С. 90–99.
8. Newnham R. E., Bowen L. T., Klicker K. A., Cross L. E. Composite piezoelectric transducers // Materials in Eng. 1980. V. 2. № 2. P. 93–106.
9. Gururaja T. R., Schulze W. A., Cross L. E., Newnham R. E. et al. // Piezoelectric composite materials for ultrasonic transducer applications Pt. 1: Resonant modes of vibration of PZT rod-polymer composites // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. 1985. V. SU-32. № 4. P. 481–498.
10. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
11. Мольков В. А., Победря Б. Е. Эффективные характеристики однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 119–130.
12. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. Т. I. Ч. А. С. 204–326.

Ростов-на-Дону, Москва

Поступила в редакцию  
28.III.1991