

УДК 539.3

© 1992 г. И. В. Панфёров

НАПРЯЖЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ КОНИЧЕСКОЙ ТРУБЕ С ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНОЙ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Методом возмущения формы границы определено напряженное состояние толстостенных конических и биконических изотропных оболочек [1, 2], причем предполагается, что оболочки замкнуты и их форма мало отличается от сферической.

В настоящей статье методом последовательных приближений найдено решение задачи о температурном нагружении упругой трансверсально-изотропной конической трубы (вообще говоря, усеченной) с постоянной толщиной. Ось симметрии исследуемого материала с криволинейной анизотропией направлена по толщине трубы. В естественной для рассматриваемого тела ортогональной системе координат выписаны формулы для определения напряженного состояния конической трубы на каждом шаге процесса итераций. Рассчитаны первые три приближения температурной задачи. Полученные числовые результаты свидетельствуют о хорошей практической сходимости применяемого метода для широкого диапазона значений геометрических параметров конической трубы.

1. Вывод основных уравнений, описывающих деформирование конической трубы постоянной толщины. Под конической трубой будем понимать тело вращения, которое ограничено параллельными коническими поверхностями с углом раствора 2φ (фиг. 1). Предполагается, что в рассматриваемой трубе (вообще говоря, усеченной) оси симметрии исследуемого трансверсально-изотропного материала направлены по толщине тела.

Введем естественную для данной трубы ортогональную коническую систему координат η, θ, x (фиг. 1). Оси η и x направлены соответственно по толщине и образующей трубы, а θ — полярный угол. Начало координат поместим в точке O . Внутренняя и внешняя боковые поверхности описываются соответственно уравнениями $\eta=0$ и $\eta=\eta_0$, а концы трубы будем считать сечениями $x=x_0$ и $x=x_1$.

В дальнейшем направлениям η, θ, x присвоим индексы 1, 2, 3.

Запишем связь конических координат с цилиндрическими (r, θ, z)

$$r = \eta \cos \varphi + x \sin \varphi, \quad \theta = \theta, \quad z = -\eta \sin \varphi + x \cos \varphi$$

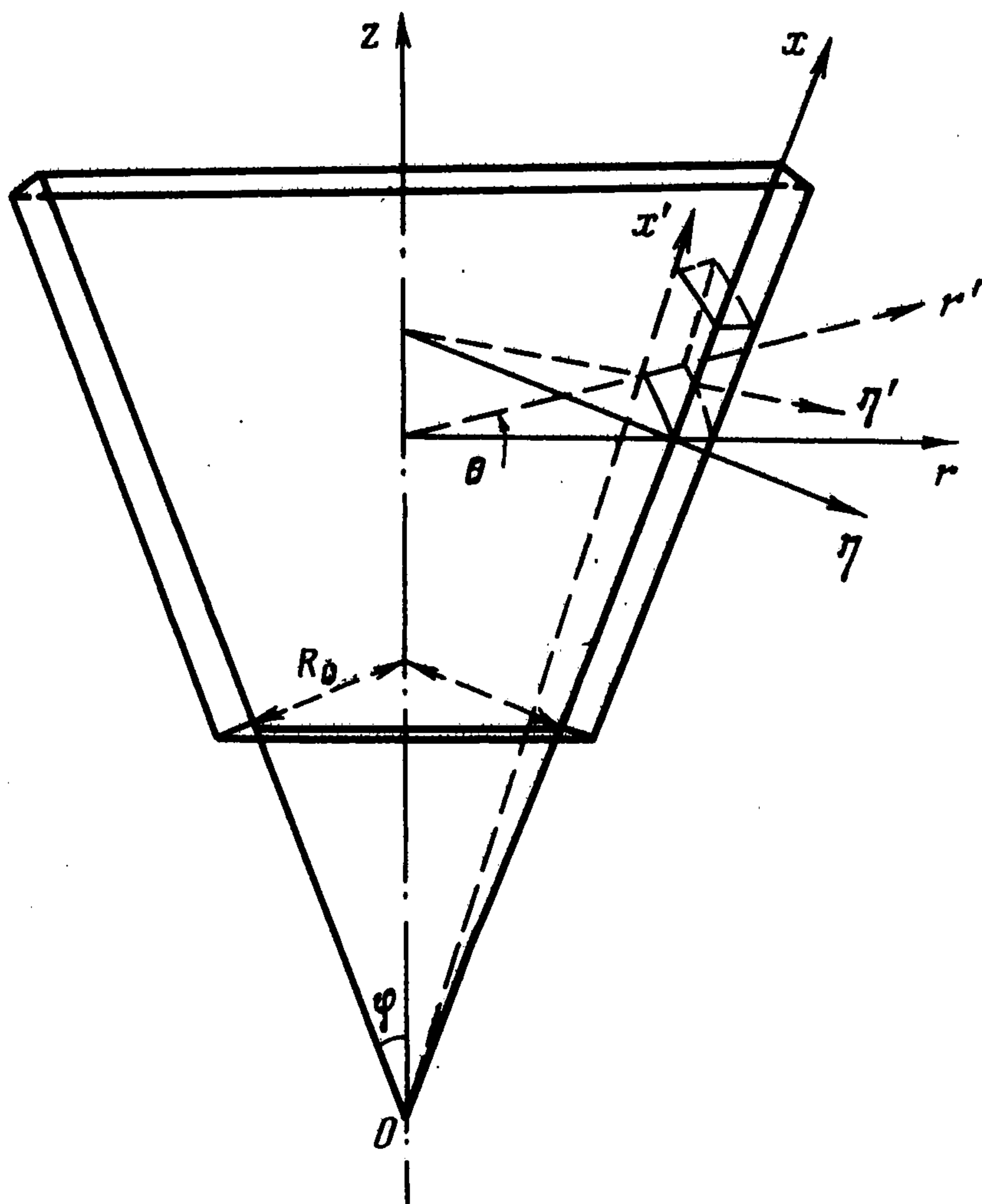
Следовательно, в системе координат $x^1 = \eta, x^2 = \theta, x^3 = x$ будем иметь

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = d\eta^2 + r^2 d\theta^2 + dx^2, \\ g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = r^2 = (\eta \cos \varphi + x \sin \varphi)^2, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

где ds — длина элементарного вектора, а g_{ij} — метрический тензор.

Ненулевые символы Кристоффеля в ортогональной системе введенных координат вычисляются по формулам

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \Gamma_{23}^2 = \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r \cos \varphi, \quad \Gamma_{22}^3 = -r \sin \varphi$$



Фиг. 1

При этом символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам.

Запишем соотношения Коши для случая осесимметричной деформации [3]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = r(u_1 \cos \varphi + u_3 \sin \varphi), \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial \eta}$$

где ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} и $1/2\varepsilon_{13}$ — ковариантные компоненты тензора деформаций, а u_1 , u_3 — перемещения.

Уравнения равновесия [3] при осесимметричном напряженном состоянии принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial x} + \frac{\sigma^{11} \cos \varphi}{r} - \sigma^{22} r \cos \varphi + \frac{\sigma^{13} \sin \varphi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial x} + \frac{\sigma^{13} \cos \varphi}{r} + \frac{\sigma^{33} \sin \varphi}{r} - \sigma^{22} r \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

где σ^{ij} — контрвариантные компоненты тензора напряжений.

Уравнения равновесия и совместности деформаций запишем относительно смешанных компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{.1}^{.1}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{.3}^{.1}}{\partial x} + \frac{\sigma_{.1}^{.1} - \sigma_{.2}^{.2}}{R} + \frac{\sigma_{.3}^{.1} \operatorname{tg} \varphi}{R} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{.3}^{.1}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_{.3}^{.1}}{R} + \frac{\partial \sigma_{.3}^{.3}}{\partial x} + \frac{\sigma_{.3}^{.3} - \sigma_{.2}^{.2}}{R} \operatorname{tg} \varphi &= 0 \end{aligned}$$

$$R \frac{\partial \varepsilon_{.2^2.}}{\partial \eta} + \varepsilon_{.2^2.} - \varepsilon_{.1^1.} = \operatorname{tg} \varphi \left[\varepsilon_{.3^3.} - \frac{\partial}{\partial x} (R \varepsilon_{.2^2.}) + \operatorname{tg} \varphi \varepsilon_{.3^3.} \right]$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{.3^3.}}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{.3^1.} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R \varepsilon_{.2^2.}) + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{.3^3.}$$

$$R = r / \cos \varphi = \eta + \operatorname{tg} \varphi x$$

$$\sigma_{.1^1.} = \sigma^{11}, \quad \sigma_{.3^1.} = \sigma^{13}, \quad \sigma_{.3^3.} = \sigma^{33}, \quad \sigma_{.2^2.} = r^2 \sigma^{22}$$

$$\varepsilon_{.1^1.} = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{.3^1.} = \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{.3^3.} = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_{.2^2.} = \varepsilon_{22} / r^2$$

Заметим, что выписанные смешанные компоненты тензоров напряжений и деформаций в системе координат η , θ , x одновременно являются и физическими компонентами соответственно напряжений и деформаций [3]. В дальнейшем для удобства будем обозначать физические компоненты напряжений и деформаций соответственно σ_{ij} и ε_{ij} .

Отнесем координаты η и x к коническому радиусу R_0 нижнего конца трубы (фиг. 1). В дальнейшем под η и x будем понимать введенные здесь безразмерные координаты. Таким образом, η_0 — относительная толщина нижнего сечения трубы, а $x_0 = \operatorname{ctg} \varphi$.

2. Трансверсально-изотропная коническая труба под действием осевой силы и температуры. Пусть исследуемая труба находится под действием осевой силы Q и температурного поля $\Delta T = \Delta T(\eta)$.

Связь между напряжениями и деформациями для рассматриваемого трансверсально-изотропного материала с криволинейной анизотропией имеет вид [4]:

$$E_2 \varepsilon_{11} = k \sigma_{11} - k \nu' (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + E_2 \alpha_1 \Delta T$$

$$E_2 \varepsilon_{22} = \sigma_{22} - \nu \sigma_{33} - k \nu' \sigma_{11} + E_2 \alpha_2 \Delta T$$

$$E_2 \varepsilon_{33} = \sigma_{33} - \nu \sigma_{22} - k \nu' \sigma_{11} + E_2 \alpha_2 \Delta T$$

$$E_2 \varepsilon_{13} = \gamma \sigma_{13}, \quad k = E_2 / E_1, \quad \gamma = E_2 / G$$
(2.1)

Здесь принято, что ось изотропии материала направлена по оси 1 (по толщине трубы); E_2 , E_1 — модули упругости по оси 2 и 1; G — модуль сдвига; ν и ν' — коэффициенты Пуассона; α_1 , α_2 — коэффициенты линейного расширения соответственно по осям 1 и 2.

Запишем граничные условия на боковых поверхностях трубы

$$\sigma_{11}(0, x) = \sigma_{11}(\eta_0, x) = 0, \quad \sigma_{13}(0, x) = 0, \quad \sigma_{13}(\eta_0, x) = 0$$
(2.2)

Граничные условия на концах $x = x_0$, $x = x_1$ длинной конической трубы будем задавать, следуя принципу Сен-Венана

$$\int_0^{\eta_0} \sigma_{33} R d\eta - \frac{Q}{2\pi (R_0 \cos \varphi)^2} = \operatorname{tg} \varphi \int_0^{\eta_0} \sigma_{13} R d\eta$$
(2.3)

Уравнения равновесия и совместности деформаций перепишем следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{R} = F_1(\eta, x), \quad F_1 = - \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R} \sigma_{13} \right)$$
(2.4)

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_{13}}{R} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x} + \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{R} \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (2.5)$$

$$R \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{E_2} F_2, \quad F_2 = E_2 \left[\varepsilon_{13} - \frac{\partial}{\partial x} (R \varepsilon_{22}) + \operatorname{tg} \varphi \varepsilon_{33} \right] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial \eta} = \frac{F_3}{E_2}, \quad F_3 = E_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{13} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R \varepsilon_{22}) + \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{33} \right] \quad (2.7)$$

Уравнения (2.4)–(2.7), (2.1) при условиях (2.2) и (2.3) описывают деформирование конической трубы под действием осевой силы Q и температуры. При выполнении равенств (2.4), (2.5), (2.3) и первых двух условий из соотношений (2.2) граничное условие $\sigma_{13}(\eta_0, x) = 0$ выполняется автоматически.

Предположим сначала, что $\operatorname{tg} \varphi \ll 1$, т. е. исследуется малоконусная труба. Члены в правых частях уравнений (2.3), (2.4), (2.6) и (2.7) пропорциональны величине $(\operatorname{tg} \varphi)^2$ и, следовательно, малы по сравнению с членами в левых частях соответствующих уравнений. В этом нетрудно убедиться, записав уравнения теории упругости в координатах η и $\xi = x \operatorname{tg} \varphi$, от которых явно зависят искомые напряжения. Решение задачи будем искать методом последовательных приближений, полагая, что правые части уравнений (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) вычислены на предыдущем шаге итераций.

Пусть исследуется тонкостенная коническая труба ($\eta_0/(x \operatorname{tg} \varphi \ll 1)$). В данном случае при наличии интегрального граничного условия (2.3) на концах конической трубы справедливо предположить, что изменчивость напряжений вдоль оси x мала по сравнению с изменчивостью по координате η . Следовательно, правые части уравнений (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) малы по сравнению с главными членами в левых частях соответствующих уравнений даже при значительных величинах параметра $\operatorname{tg} \varphi$. Решение задачи целесообразно искать упомянутым ранее методом итераций. В качестве первого приближения рассматривается решение системы (2.2)–(2.7), в которой отсутствуют указанные правые части уравнений (2.3), (2.4), (2.6) и (2.7).

Распределение температуры $\Delta T(\eta)$ представим в форме

$$\Delta T(\eta) = T_0 + T_1(\eta), \quad T_0 = \text{const}$$

т. е. выделим постоянную составляющую T_0 .

Запишем формулы для определения напряженного состояния на n -м шаге процесса итераций. При интегрировании уравнений задачи предполагалось, что:

$$\omega = \sqrt{\frac{k - (kv')^2}{1 - v^2}} \neq 1$$

$$\sigma_{33}^{(n)}(\eta, x) = v \sigma_{22}^{(n)}(\eta, x) + kv' \sigma_{11}^{(n)}(\eta, x) + B(x) + \int_0^\eta F_3^{(n-1)}(\rho, x) d\rho - E_2 \alpha_2 T_1(\eta)$$

$$\sigma_{11}^{(n)}(\eta, x) = C(x) R^{\omega-1} + D(x) R^{-\omega-1} - \Pi(x) + \Phi^{(n-1)}(\eta, x)$$

$$\sigma_{22}^{(n)}(\eta, x) = C(x) R^{\omega-1} \omega - D(x) R^{-\omega-1} \omega - \Pi(x) + \Phi_1^{(n-1)}(\eta, x)$$

$$\sigma_{13}^{(n)}(\eta, x) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\eta \sigma_{33}^{(n)}(\rho, x) R(\rho, x) d\rho + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R} \int_0^\eta \sigma_{22}^{(n)}(\rho, x) d\rho$$

$$R = \eta + x \operatorname{tg} \varphi, \quad \Pi = \frac{P + B(x)(v - kv')}{(1 - v^2)(\omega^2 - 1)}, \quad P = E_2(\alpha_1 - \alpha_2) T_0$$

$$\Phi^{(n-1)} = 1/2(I_+ - I_- + J_+ + J_-)/\omega, \quad \Phi_1^{(n-1)} = 1/2(I_+ + I_- + J_+ - J_-)$$

$$I_\pm(\eta, x) = \frac{1}{1 - v^2} R^{\pm\omega-1} \int_0^\eta R^{\mp\omega}(\rho, x) \left[\operatorname{tg} \varphi F_2^{(n-1)}(\rho, x) + \right. \\ \left. + (v - kv') \int_0^\rho F_3^{(n-1)}(t, x) dt + S_T(\rho, x) \right] d\rho$$

$$J_\pm(\eta, x) = R^{\pm\omega-1} \int_0^\eta R^{\mp\omega+1}(\rho, x) \left[\left(\omega \pm \frac{kv'}{1 - v} \right) F_1^{(n-1)}(\rho, x) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{v}{1 - v^2} F_3^{(n-1)}(\rho, x) \right] d\rho$$

$$S_T(\eta, x) = E_2 \left[-(1 + v) R \alpha_2 \frac{d}{d\eta} T_1 - (v - kv') \alpha_2 T_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) T_1 \right]$$

Функции $C(x)$, $D(x)$ и $B(x)$ находятся на каждом шаге n процесса итераций из (2.3) и первых двух условий в соотношениях (2.2). Правая часть уравнения (2.3) и выписанные выше функции с верхним индексом $(n-1)$ известны; они определены на предыдущем $(n-1)$ -м шаге.

Методом последовательных приближений решена задача о деформировании конической трубы под действием равномерно распределенной температуры. В этом случае $Q=0$, $T_1(\eta) \equiv 0$ и $\Delta T(\eta) = T_0 = \text{const}$.

Получены три приближения $\sigma_{ij}^{(n)}$, $n=1, 2, 3$ температурной задачи.

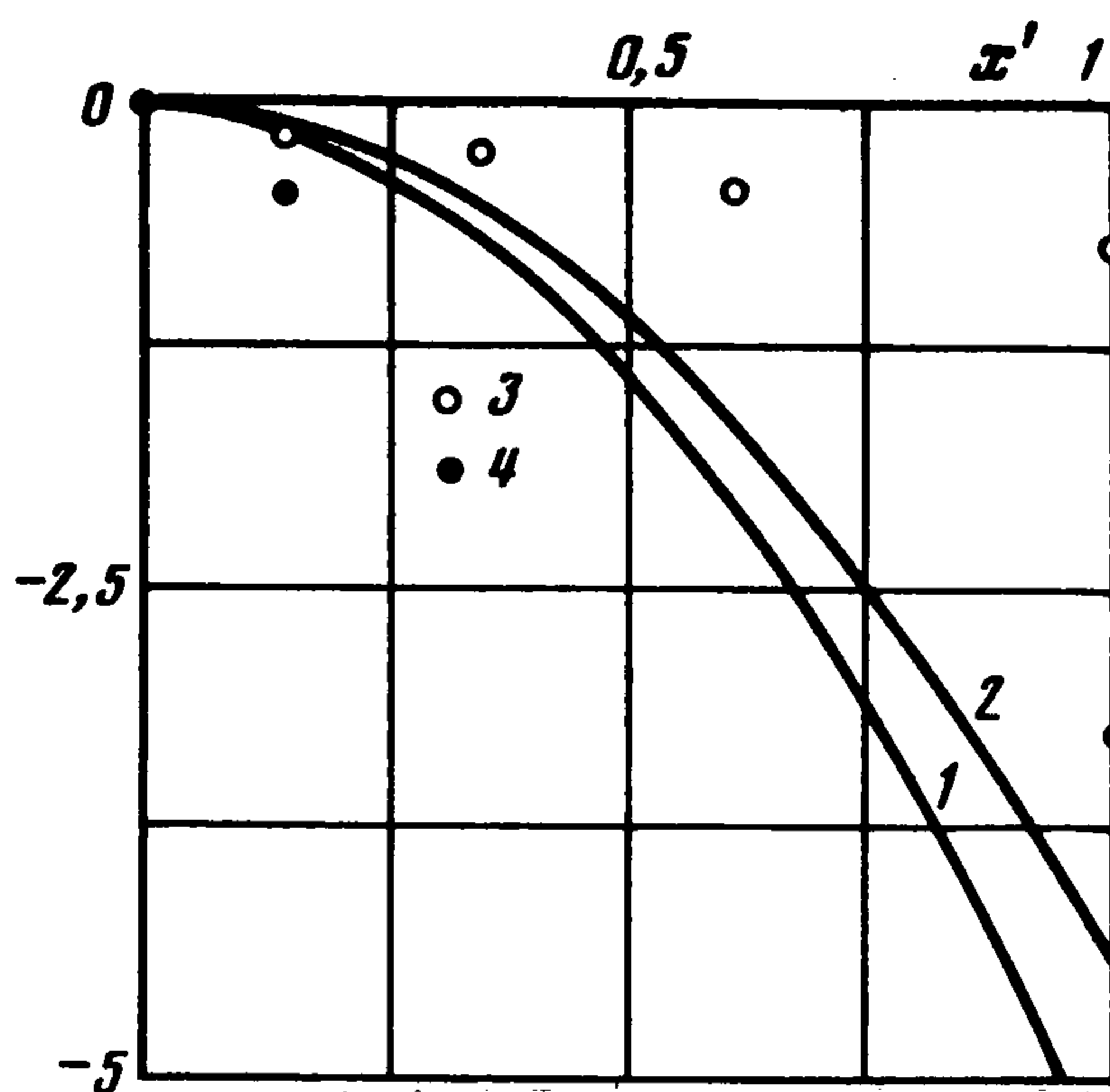
В таблице приведены результаты расчета напряжений, действующих в сечении $x=x_0$ (на нижнем конце трубы) при $k=4$, $v=0,2$, $kv'=0,3$, $\gamma=6$. Безразмерные напряжения $\sigma_{11}' = 10^4 \sigma_{11}/P$, $\sigma_{22}' = 10^2 \sigma_{22}/P$, $\sigma_{33}' = 10^2 \sigma_{33}/P$ и $\sigma_{13}' = 10^4 \sigma_{13}/P$ вычислены

η/η_0	σ_{11}'	σ_{22}'	σ_{33}'	σ_{13}'	σ_{11}''	σ_{22}''	σ_{33}''	σ_{13}''
0	0	-3,447	-0,686	0	0	-1,891	-0,369	0
0,25	-4,211	-1,676	-0,344	-3,362	-1,203	-0,798	-0,187	-0,707
0,50	-5,463	0,036	-0,005	-4,368	-1,387	0,090	-0,014	-0,821
0,75	-3,990	1,694	0,331	-3,195	-0,913	0,847	0,151	-0,545
1	0	3,301	0,664	0	0	1,516	0,313	0
0	0	-3,421	-0,715	0	0	-1,838	-0,448	0
0,25	-4,193	-1,650	-0,372	-3,372	-1,177	-0,754	-0,257	-0,731
0,50	-5,458	0,060	-0,029	-4,383	-1,368	0,118	-0,051	-0,858
0,75	-4,000	1,715	0,312	-3,205	-0,909	0,862	0,148	-0,573
1	0	3,321	0,647	0	0	1,525	0,326	0
0	0	-3,420	-0,716	0	0	-1,838	-0,461	0
0,25	-4,193	-1,650	-0,372	-3,372	-1,174	-0,749	-0,265	-0,745
0,50	-5,458	0,060	-0,029	-4,383	-1,366	0,122	-0,053	-0,877
0,75	-4,000	1,715	0,312	-3,206	-0,909	0,865	0,152	-0,586
1	0	3,321	0,647	0	0	1,528	0,334	0

при $\eta_0=0,067$, $\operatorname{tg} \varphi=0,8$, а $\sigma_{11}''=10^2 \sigma_{11}/P$, $\sigma_{22}''=10 \sigma_{22}/P$, $\sigma_{33}''=10 \sigma_{33}/P$ и $\sigma_{13}''=10^2 \sigma_{13}/P$ соответственно при $\eta_0=0,4$, $\operatorname{tg} \varphi=0,6$. Величина $P=E_2(\alpha_1-\alpha_2)T_0$ — характерный силовой параметр задачи. Таблица содержит все три приближения (они разделены линиями и записаны в последовательности, соответствующей номеру приближения).

На фиг. 3 показано распределение по оси x напряжений $\sigma_{11}'=10^4 \sigma_{11}(1/2\eta_0, x)/P$ (линия 1), $\sigma_{22}'=10^2 \sigma_{22}(0, x)/P$ (точки 4), $\sigma_{33}'=10^2 \sigma_{33}(0, x)/P$ (точки 3) и $\sigma_{13}'=10^4 \sigma_{13}(1/2\eta_0, x)/P$ (линия 2) при $k=4$, $\nu=0,2$, $k\nu'=0,3$, $\gamma=6$, $\eta_0=0,067$, $\operatorname{tg} \varphi=0,8$. По оси абсцисс отложены значения $x'=(x \operatorname{tg} \varphi)^{-1}$ ($x_0=\operatorname{ctg} \varphi$, $x \geq x_0$).

Полученные числовые результаты показывают, что второе приближение температурной задачи о деформировании тонкостенной конической



Фиг. 2

трубы обладает очень высокой точностью даже при больших углах раствора трубы φ (например, при $\operatorname{tg} \varphi=0,8$). Первое (асимптотическое) приближение достаточно точно описывает напряженное состояние тонкостенной трубы с малой конусностью.

Для толстых конических оболочек второе приближение также является достаточно точным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Статика упругих тел неканонической формы. Киев: Наук. думка, 1984. 279 с.
2. Немиш Ю. Н., Лялюк Д. Ф. О напряженном состоянии толстостенных неканонических оболочек, близких к сферическим // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 8. С. 29–34.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 535 с.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.IX.1991