

УДК 539.3

© 1992 г. А. Г. Колпаков

## К ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

Рассматривается общий случай задачи термоупругости неоднородных пластинок. Построено формальное асимптотическое разложение и получена предельная (при стремлении толщины пластинки  $\varepsilon$  к нулю) задача. Предельная задача в общем случае оказывается отличной от классической, в частности, в нее входят пять неизвестных функций, а определяющие уравнения содержат не только температуру, но и ее производные (хотя материал пластинки берется подчиняющимся закону Дюгамеля–Неймана). В то же время указанные эффекты не проявляются в однородных пластинках постоянной толщины. Это, по-видимому, является причиной того, что указываемые ниже эффекты, насколько известно автору, ранее не отмечались.

Ранее [1] излагалась общая схема асимптотического метода перехода от трехмерной задачи теории упругости в тонкой (толщины  $\varepsilon \ll 1$ ) области к задаче теории пластинок. В [2] рассмотрен случай приводящий к классическим уравнениям термоупругих пластинок (оказывается, он соответствует случаю когда коэффициенты теплового расширения материала пластинки имеют порядок  $\varepsilon$ ).

**1. Постановка задачи.** Пусть трехмерное линейно-упругое тело занимающее область  $Q_\varepsilon$  характерной толщины  $\varepsilon \ll 1$ , получается повторением элемента  $P_\varepsilon$  (ячейки периодичности ЯП) в плоскости  $x_1 x_2$  (фигура). Условие  $\varepsilon \ll 1$  формализуется в виде  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Уравнения равновесия описанного тела имеют вид [3]

$$\int_{Q_\varepsilon} \sigma_{ij} v_{i,j} d\bar{x} + \int_{Q_\varepsilon} \bar{f} \bar{v} d\bar{x} = 0 \quad (1.1)$$

$V\bar{v} \in V = \{\bar{v} \in H^1(Q_\varepsilon) : \bar{v}(\bar{x}) = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon\}$ ,  $\Gamma_\varepsilon$  — торцевая поверхность (фигура). Задача (1.1) соответствует закреплению тела на торцевой поверхности и свободной боковой поверхности.

Определяющие уравнения материала пластинки возьмем в виде (закон Дюгамеля — Неймана [3])

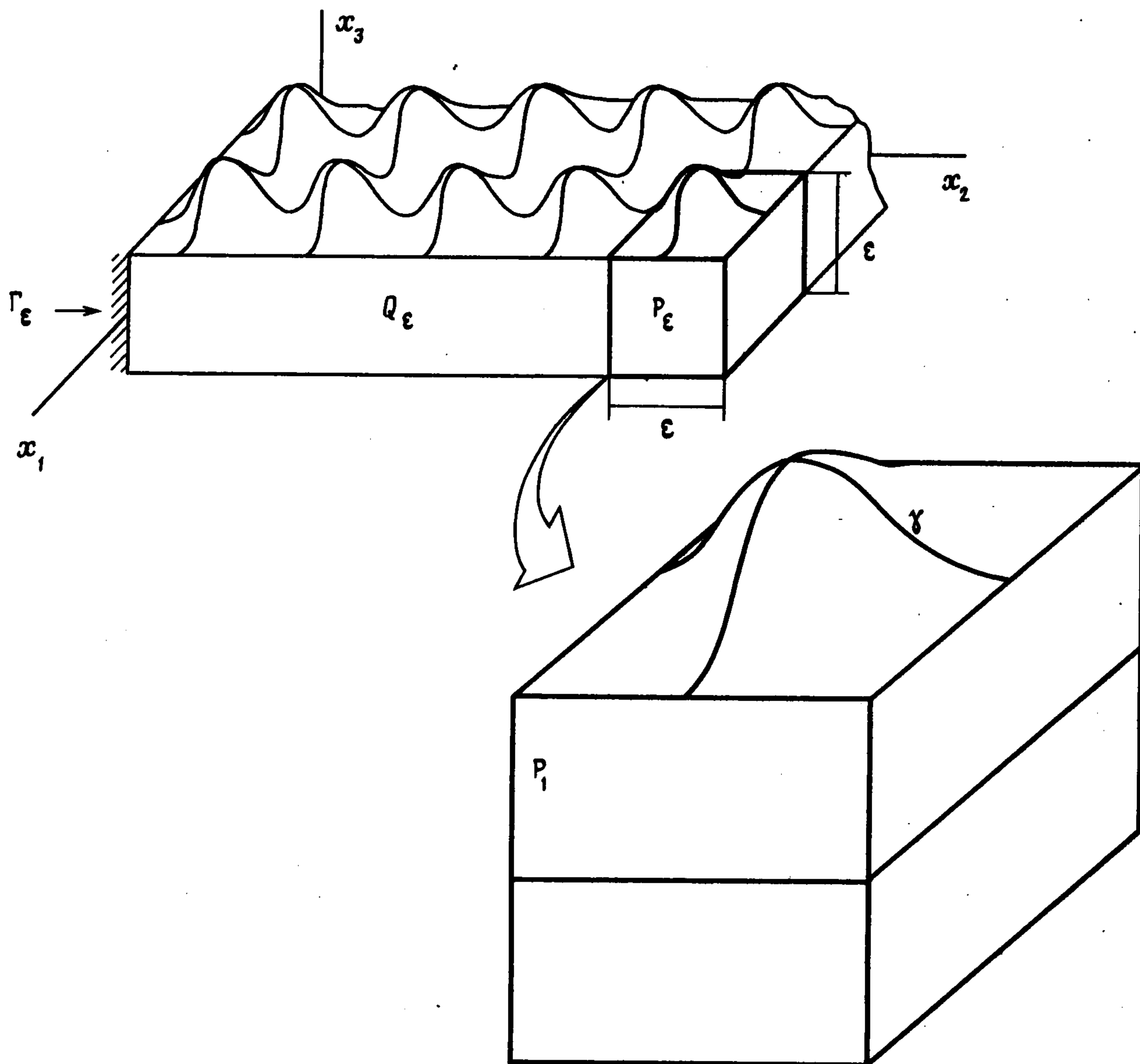
$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-3} (a_{ijkl}(\bar{x}/\varepsilon) u_{k,l} - \beta_{ij}(\bar{x}/\varepsilon) \theta) \quad (1.2)$$

$$\beta_{ij}(\bar{x}/\varepsilon) = a_{ijkl}(\bar{x}/\varepsilon) \alpha_{kl}(\bar{x}/\varepsilon)$$

где  $\sigma_{ij}$  — локальные напряжения,  $\bar{u}$  — перемещения,  $\theta$  — температура (в рассматриваемой задаче она считается заданной стационарной величиной),  $a_{ijkl}(\bar{x}/\varepsilon)$  и  $\alpha_{ij}(\bar{x}/\varepsilon)$  — тензоры коэффициентов упругих постоянных и теплового расширения. Функции  $a_{ijkl}(\bar{x}/\varepsilon)$ ,  $\alpha_{ij}(\bar{x}/\varepsilon)$  ( $\beta_{ij}(\bar{x}/\varepsilon)$  соответственно) являются периодическими по  $\bar{x}$  с ЯП  $P_\varepsilon$ . При этом  $\beta_{ij}(\bar{x}/\varepsilon)$  возьмем в виде

$$\beta_{ij}(\bar{x}/\varepsilon) = \beta_{ij}^{(0)}(\bar{x}/\varepsilon) + \varepsilon \beta_{ij}^{(1)}(\bar{x}/\varepsilon) + \dots \quad (1.3)$$

$$\left( \alpha_{ij}(\bar{x}/\varepsilon) = \alpha_{ij}^{(0)}(\bar{x}/\varepsilon) + \varepsilon \alpha_{ij}^{(1)}(\bar{x}/\varepsilon) + \dots \right. \quad \text{соответственно)$$



Формулы (1.2), (1.3) вводят в определяющие соотношения параметр  $\epsilon$  — характерную толщину пластинки. Возможны следующие трактовки присутствия  $\epsilon$  в них.

**Физическая асимптотика.** Упругие и термоупругие постоянные материала переменны, т. е. рассматривается спектр пластинок различной толщины из различных материалов. Для этого случая характерно значение  $\beta_{ij}^{(0)} = 0$ . Последнее связано с тем, что с физических позиций при росте жесткости материала его коэффициент теплового расширения должен уменьшаться. Этот случай при  $\beta_{ij}^{(1)} \neq 0$  приводит к классической задаче термоупругости [2]. Отметим, что физические представления не гарантируют, что именно  $\beta_{ij}^{(1)} \neq 0$ . Скорее, с физической точки зрения можно ожидать, что  $\beta_{ij}^{(k)} = 0$  при  $k=0, 1, 2$  и  $\beta_{ij}^{(k)} \neq 0$  начиная с  $k=3$ .

**Геометрическая асимптотика.** Пусть материал пластинки физически один и тот же при всех значениях ее толщины. Тогда  $\epsilon$  в (1.2), (1.3) понимается как формальный параметр, вводимый для учета связи жесткостей пластинки с ее толщиной. Для этого случая  $\beta_{ij}^{(0)} \neq 0$  и  $\beta_{ij}^{(k)} = 0$  при  $k \geq 1$ .

**2. Асимптотическое разложение.** Используем для анализа рассматриваемой задачи стандартное асимптотическое разложение из [1] для решения

$$\bar{u} = \bar{u}^{(0)}(\bar{X}) + \epsilon \bar{u}^{(1)}(\bar{X}, \bar{y}) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}^{(k)}(\bar{X}, \bar{y}) \quad (2.1)$$

$$\langle \bar{u}^{(k)} \rangle = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\text{mes } S_1} \int_{P_1} \cdot d\bar{y}$  — среднее по ЯП  $P_1 = \epsilon^{-1} P_\epsilon = \{\bar{y} = \bar{x}/\epsilon : \bar{x} \in P_\epsilon\}$  в «бы-

стрых» переменных  $\bar{y} = \bar{x}/\varepsilon$ ,  $S_1$  — проекция  $P_1$  на плоскость  $y_1 y_2$ ;  
для пробной функции

$$\bar{v} = \bar{v}^{(0)}(\bar{X}) + \varepsilon \bar{v}^{(1)}(\bar{X}, \bar{y}) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{v}^{(k)}(\bar{X}, \bar{y}) \quad (2.2)$$

для напряжений

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-3} \sigma_{ij}^{(-3)}(\bar{X}, \bar{y}) + \varepsilon^{-2} \sigma_{ij}^{(-2)}(\bar{X}, \bar{y}) + \dots = \sum_{m=-3}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}(\bar{X}, \bar{y}) \quad (2.3)$$

Здесь  $\bar{X} = (x_1, x_2)$  — «медленная» переменная в плоскости пластинки, см. [1]. Функции в правых частях (2.1)–(2.3) берутся периодическими по  $y_1, y_2$  с ЯП  $S_1$ .

Для функции аргументов  $\bar{X}, \bar{y}$  операторы дифференцирования  $\partial/\partial x_i$  представимы в виде (см. [1])  $\partial/\partial X_\alpha + \varepsilon^{-1} \partial/\partial y_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ),  $\varepsilon^{-1} \partial/\partial y_3$ .

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, латинские — 1, 2, 3 (если явно не указано иное). Также используются обозначения  $f_{,jv} = \partial f/\partial y_j$ ,  $f_{,\alpha x} = \partial f/\partial x_\alpha$ .

Подстановка разложений (2.1)–(2.3) в (1.1) при учете правила замены операторов дифференцирования дает

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-3}^{\infty} \int_{Q_1 \varepsilon} \varepsilon (\varepsilon^{m+k-1} \sigma_{ij}^{(m)} v_{i,jv}^{(k)} + \varepsilon^{m+k} \sigma_{i\alpha}^{(m)} v_{i,\alpha x}^{(k)}) d\bar{v} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Q_1 \varepsilon} \varepsilon \varepsilon^k \bar{f} \bar{v}^{(k)} d\bar{v} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь также произведен переход к переменной  $\bar{v} = (x_1, x_2, y_3)$  в интегралах. Эта замена переводит область интегрирования  $Q_\varepsilon$  переменной толщины в область  $Q_1 \varepsilon = \{(x_1, x_2, y_3 = x_3/\varepsilon) : \bar{x} \in Q_\varepsilon\}$  — толщины порядка единицы. Последнее удобно для исследования задачи. Множитель  $\varepsilon$  в интегралах в (2.4) связан с указанной заменой.

Подстановка разложений (2.2), (2.3) в (1.2) дает после приравнивания выражений при одинаковых степенях  $\varepsilon$  соотношение

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijk\alpha} u_{k,\alpha x}^{(m+2)} + a_{ijkl} u_{k,ly}^{(m+3)} - \beta_{ij}^{(m+3)} \theta \quad (2.5)$$

Далее полезным оказывается соотношение

$$\int_{Q_1 \varepsilon} f(\bar{X}, \bar{y}) d\bar{v} \rightarrow \int_S \langle f \rangle(\bar{X}) dX \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

где  $S$  — проекция  $Q_1 \varepsilon$  (и  $Q_\varepsilon$ ) на плоскость  $x_1 x_2$ . Обоснование этого соотношения см. в [1].

**3. Уравнения равновесия пластинки.** Указанные уравнения получаются независимо от определяющих уравнений. Они получены в [1], поэтому не будем приводить здесь подробного вывода уравнений. Отметим только, что уравнения для усилий  $N_{i\alpha}^{(m)} = \langle \sigma_{i\alpha}^{(m)} \rangle$  и моментов  $M_{i\alpha}^{(m)} = \langle \sigma_{i\alpha}^{(m)} y_3 \rangle$  получаются из (2.4) при рассмотрении пробных функций вида  $\bar{v} = \bar{v}^{(0)}(\bar{X})$  (уравнения для усилий) и  $\bar{v} = \varepsilon \bar{v}^{(1)} = \varepsilon y_3 \bar{v}_0(\bar{X})$  (уравнения для

моментов). Уравнения для усилий имеют вид

$$N_{i\alpha, \alpha x}^{(m)} = 0, \quad m = -3, -2, -1 \quad (3.1)$$

Уравнения для моментов имеют вид

$$-M_{i\alpha, \alpha x}^{(m)} + N_{i3}^{(m+1)} = 0, \quad m = -2 \quad (3.2)$$

Приведенные уравнения равновесия совпадают с классическими и одинаковыми независимо от определяющих соотношений материалов пластинки [1]. Специфика задачи рассматриваемой в работе проявляется при анализе учитывающем определяющие соотношения проводимом ниже.

**4. Получение определяющих соотношений пластинки 1°. Растяжение в плоскости пластинки.** Возьмем пробную функцию в уравнении (2.4) в виде  $\bar{v} = \varepsilon \bar{v}^{(1)}(\bar{y})$ . Тогда  $v_{i, \alpha x}^{(1)} = 0$  и в (2.4) остаются только члены, соответствующие  $k=1$ . Рассмотрим выражения в (2.4) при одинаковых неотрицательных степенях  $\varepsilon$ . При  $m=-3$  интегрирование (2.4) по частям дает

$$\sigma_{ij, j\gamma}^{(-3)} = 0 \text{ в } Q_1, \quad \sigma_{ij}^{(-3)} n_j = 0 \text{ на } \gamma \quad (4.1)$$

Здесь  $Q_1 = \varepsilon^{-1} Q_\varepsilon$  (не путать с  $Q_1^\varepsilon$ ) получается периодическим повторением ЯП  $P_1$  в плоскости  $y_1 y_2$ ;  $\bar{n}$  — внешняя нормаль к  $Q_1$ ;  $\gamma$  — боковая (свободная) поверхность  $Q_1$ , получается путем периодического повторения боковой поверхности ЯП  $P_1$  (в связи с чем далее  $\gamma$  используется для обозначения обеих поверхностей).

Обратимся к (2.5). При  $m=-3$  эти соотношения дают

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijk\alpha} u_{k, \alpha x}^{(0)} + a_{ijkl} u_{k, l\gamma}^{(1)} - \beta_{ij}^{(0)} \theta \quad (4.2)$$

В результате приходим к задаче (4.1), (4.2) с вытекающими из определения функции  $\bar{u}^{(h)}$  в разложении (2.1) условиями

$$\bar{u}^{(1)}(\bar{X}, \bar{y}) \text{ периодичны по } y_1, y_2 \text{ с ЯП } S_1 \text{ и } \langle \bar{u}^{(1)} \rangle = 0 \quad (4.3)$$

Для решения этой задачи (являющейся линейной в переменных  $\bar{y}$  при  $\bar{u}^{(0)}(\bar{X})$ ,  $\theta(\bar{X})$  играющих роль параметров) были введены [1, 2], так называемые ячеечные задачи (ЯЗ), имеющие вид: ЯЗ теории упругости для пластинок

$$\begin{aligned} (a_{ijkl} N_{k, l\gamma}^{p\alpha v} - a_{ijp\alpha} y_3^v),_{j\gamma} &= 0 \text{ в } P_1 \\ (a_{ijkl} N_{k, l\gamma}^{p\alpha v} - a_{ijp\alpha} y_3^v) n_j &= 0 \text{ на } \gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\bar{N}^{p\alpha v}(\bar{y})$  периодична по  $y_1, y_2$  на  $S_1$  и  $\langle \bar{N}^{p\alpha v} \rangle = 0$ ,  $v=0, 1$  и ЯЗ термоупругости для пластинок

$$\begin{aligned} (a_{ijkl} F_{k, l\gamma}^{(v)} - \beta_{ij}^{(v)}),_{j\gamma} &= 0 \text{ в } P_1 \\ (a_{ijkl} F_{k, l\gamma}^{(v)} - \beta_{ij}^{(v)}) n_j &= 0 \text{ на } \gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\bar{F}^{(v)}(\bar{y})$  периодична по  $y_1, y_2$  на  $S_1$  и  $\langle \bar{F}^{(v)} \rangle = 0$ ,  $v=0, 1$ .

Решения задач (4.4), (4.5) при стандартных условиях на упругие и термоупругие постоянные (например [3]) существуют и единственны.

Было показано [1], что

$$\bar{N}^{\alpha\beta 0}(\bar{y}) = -y_3 \bar{e}_\beta \quad (4.6)$$

$\{\bar{e}_\beta\}$  — базисные векторы.

Сравнение (4.4), (4.5) с (4.1)–(4.3) при учете линейности последней задачи дает (учитывается равенство (4.6))

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{N}^{\alpha\beta 0} u_{\alpha, \beta x}^{(0)} - y_3 u_{z, \alpha x}^{(0)} \bar{e}_\alpha + \bar{F}^{(0)} \theta + \bar{w}(\bar{X}) \quad (4.7)$$

Появление функции  $\bar{w}(\bar{X})$  обусловлено тем, что задача (4.1)–(4.3) содержит производные только по переменной  $\bar{y}$ .

Для определения функций  $u_\alpha^{(0)}$  ( $\alpha=1, 2$ ) воспользуемся уравнениями (3.1) при  $m=-3$ . Подстановка (4.7) в (4.2) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} &= a_{ijk\alpha} u_{k, \alpha x}^{(0)} + a_{ijkl} N_{k, ly}^{\alpha\beta 0} u_{\alpha, \beta x}^{(0)} - a_{ij\beta z} u_{z, \beta x}^{(0)} + a_{ijkl} F_{k, ly}^{(0)} \theta - \beta_{ij}^{(0)} \theta = \\ &= a_{ij\alpha\beta} u_{\alpha, \beta x}^{(0)} + a_{ijkl} N_{k, ly}^{\alpha\beta 0} u_{\alpha, \beta x}^{(0)} + a_{ijkl} F_{k, ly}^{(0)} \theta - \beta_{ij}^{(0)} \theta \end{aligned}$$

Осреднив последнее равенство по ЯП  $P_1$ , получаем при  $ij=\gamma\delta$

$$N_{\gamma\delta}^{(-3)} = \langle \sigma_{\gamma\delta}^{(-3)} \rangle = \langle a_{\gamma\delta\alpha\beta} + a_{\gamma\delta kl} N_{k, ly}^{\alpha\beta 0} \rangle u_{\alpha, \beta x}^{(0)} - \langle \beta_{\gamma\delta}^{(0)} - a_{\gamma\delta kl} F_{k, ly}^{(0)} \rangle \theta \quad (4.8)$$

2°. *Изгиб.* Подстановка (4.8) в (3.1) при  $m=-3$  и  $ij=\gamma\delta$  дает уравнение

$$\langle a_{\gamma\delta\alpha\beta} + a_{\gamma\delta kl} N_{k, ly}^{\alpha\beta 0} \rangle u_{\alpha, \beta x}^{(0)} - \langle \beta_{\gamma\delta}^{(0)} - a_{\gamma\delta kl} F_{k, ly}^{(0)} \rangle \theta, \delta x = 0 \quad (4.9)$$

Граничные условия для  $u_\alpha^{(0)}$ ,  $\alpha=1, 2$ , вытекают из исходных граничных условий и разложения (2.1), подробнее см. [1], и имеет вид

$$u_\alpha^{(0)}(\bar{X}) = 0, \quad \alpha=1, 2 \quad \text{на } \partial S \quad (4.10)$$

Решение задачи (4.9), (4.10), которое в отличие от упругого случая [1] не обязательно нулевое, обозначим через

$$u_\alpha^{(0)} = (R\theta)_\alpha, \quad \alpha=1, 2 \quad (4.11)$$

где  $R$  — разрешающий оператор задачи (4.9), (4.10). (Фактически оператор в (4.11) зависит только от  $\nabla\theta$ , так как коэффициенты при  $\theta$  в (4.9) постоянные; см. [4]).

Необращение в общем случае величины  $R\theta$  в нуль порождает в конечном случае всю специфику рассматриваемой задачи.

Учтя (4.11), перепишем равенство (4.7) в виде

$$\bar{u}^{(1)} = \bar{N}^{\alpha\beta 0} (R\theta)_{\alpha, \beta x} - y_3 u_{z, \beta x}^{(0)} \bar{e}_\beta + \bar{F}^{(0)} \theta + \bar{w}(\bar{X}) \quad (4.12)$$

Продолжим рассмотрение уравнения (2.4) с пробной функцией  $\bar{v} = \varepsilon \bar{v}^{(1)}(\bar{y})$  ( $k=1$ ), только теперь рассмотрим члены соответствующие  $m=-2$ . Для них имеем

$$\sigma_{ij, jy}^{(-2)} = 0 \quad \text{в } Q_1, \quad \sigma_{ij}^{(-2)} n_j = 0 \quad \text{на } \gamma \quad (4.13)$$

Соотношения (2.5) при  $m=-2$  дают

$$\sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijkl} u_{k, ly}^{(2)} + a_{ijk\alpha} u_{k, \alpha x}^{(1)} - \beta_{ij}^{(1)} \theta \quad (4.14)$$

Подставив (4.12) в (4.14), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-2)} = & a_{ijkl} u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk\gamma} N_k^{\alpha\beta 0} (R\theta)_{\alpha, \beta\gamma\gamma} - \\ & - a_{ija\beta} y_3 u_{3, \alpha\beta\beta}^{(0)} + a_{ijka} F_k^{(0)} \theta_{, \alpha\alpha} + a_{ijka} w_{k, \alpha\alpha} - \beta_{ij}^{(1)} \theta \end{aligned} \quad (4.15)$$

Кроме того, согласно определению функций  $\bar{u}^{(k)}$  из разложения (2.1), заключаем, что

$$\bar{u}^{(2)}(\bar{X}, \bar{y}) \text{ периодична по } y_1, y_2 \text{ на } S_1 \text{ и } \langle \bar{u}^{(2)} \rangle = 0 \quad (4.16)$$

Решение задачи (4.13), (4.15), (4.16) получается опять при помощи введения ЯЗ. В данном случае это вторая ЯЗ термоупругости

$$(a_{ijkl} T_{k,ly}^{\alpha\beta\gamma} + a_{ijk\gamma} N_k^{\alpha\beta 0}),_{j\gamma} = 0 \text{ в } P_1 \quad (4.17)$$

$$(a_{ijkl} T_{k,ly}^{\alpha\beta\gamma} + a_{ijk\gamma} N_k^{\alpha\beta 0}) n_j = 0 \text{ на } \gamma$$

$\bar{T}^{\alpha\beta\gamma}(\bar{y})$  периодична по  $y_1, y_2$  на  $S_1$  и  $\langle \bar{T}^{\alpha\beta\gamma} \rangle = 0$  и третья задача термоупругости

$$(a_{ijkl} G_{k,ly}^{(\alpha)} + a_{ijka} F_k^{(0)}),_{j\gamma} = 0 \text{ в } P_1 \quad (4.18)$$

$$(a_{ijkl} G_{k,ly}^{(\alpha)} + a_{ijka} F_k^{(0)}) n_j = 0 \text{ на } \gamma$$

$\bar{G}^{(\alpha)}(\bar{y})$  периодична по  $y_1, y_2$  на  $S_1$  и  $\langle \bar{G}^{(\alpha)} \rangle = 0$ .

После этого решение (4.13), (4.15), (4.16) получается в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(2)} = & N^{\alpha\beta 1} u_{3, \alpha\beta\beta}^{(0)} + \bar{T}^{\alpha\beta\gamma} (R\theta)_{\alpha, \beta\gamma\gamma} + \bar{N}^{\alpha\beta 0} w_{\alpha, \beta\beta} + \\ & + \bar{G}^{(\alpha)} \theta_{, \alpha\alpha} + \bar{F}^{(1)} \theta - y_3 w_{3, \beta\beta} \bar{e}_\beta \end{aligned} \quad (4.19)$$

Подстановка (4.19) в (4.15) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-2)} = & (a_{ijkl} N_{k,ly}^{\alpha\beta 1} - y_3 a_{ija\beta}) u_{3, \alpha\beta\beta}^{(0)} + (a_{ijkl} N_{k,ly}^{\alpha\beta 0} + a_{ija\beta}) w_{\alpha, \beta\beta} + \\ & + (a_{ijkl} T_{k,ly}^{\alpha\beta\gamma} + a_{ijk\gamma} N_k^{\alpha\beta 0}) (R\theta)_{\alpha, \beta\gamma\gamma} + (a_{ijkl} G_{k,ly}^{(\alpha)} + a_{ijka} F_k^{(0)}) \theta_{, \alpha\alpha} + \\ & + (a_{ijkl} F_{k,ly}^{(1)} - \beta_{ij}^{(1)}) \theta \end{aligned} \quad (4.20)$$

Первые два слагаемых в соотношении (4.20) совпадают с полученными в [1] для чисто упругой пластины, член  $\beta_{ij}^{(1)} \theta$  соответствует [2].

Интегрируя по ЯП  $P_1$  равенство (4.20) и его же, умноженное на  $y_3$ , получим определяющие уравнения, связывающие усилия и моменты  $N_{ij}^{(-2)}$  и  $M_{ij}^{(-2)}$  с деформационными и тепловыми характеристиками.

**Определяющие соотношения.** Упругие и термоупругие постоянные пластины — это коэффициенты в уравнениях связывающих усилия и моменты с деформационными и температурными характеристиками. Выпишем их.

*Упругие постоянные*

$$A_{ija\beta}^{v+\mu} = \langle (a_{ija\beta} + a_{ijkl} N_{k,ly}^{\alpha\beta\gamma}) y_3^\mu \rangle \quad (4.21)$$

$$v, \mu = 0, 1$$

при  $v=\mu=0$  — жесткости на растяжение (в плоскости пластинки), при  $v+\mu=1$  — кососимметрическая часть жесткостей, при  $v=\mu=1$  — жесткости на изгиб.

### Термоупругие постоянные

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ij}^{(\nu)\mu} &= -\langle (\beta_{ij}^{(\nu)} - a_{ijkl} F_{k,ly}^{(\nu)}) y_3^\mu \rangle \\ \mathbf{F}_{ij\alpha}^\mu &= \langle (a_{ijkl} G_{k,ly}^{(\alpha)} + a_{ijka} F_k^{(0)}) y_3^\mu \rangle \\ \mathbf{T}_{ij\alpha\beta\gamma}^\mu &= \langle (a_{ijkl} T_{k,ly}^{\alpha\beta\gamma} + a_{ijk\gamma} N_k^{\alpha\beta 0}) y_3^\mu \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

при  $\mu=0$  — термоупругие характеристики при деформировании в плоскости пластинки, при  $\mu=1$  — при изгибе.

*Определяющие уравнения.* Используя введенные величины (4.21), (4.22), можно записать (в записи учтено выражение (4.11))

$$\begin{aligned} N_{\gamma\delta}^{(-3)} &= A_{\gamma\delta\alpha\beta}^0 u_{\alpha,\beta x}^{(0)} - \mathbf{B}^{(0)0} \theta \\ N_{\gamma\delta}^{(-2)} &= A_{\gamma\delta\alpha\beta}^0 w_{\alpha,\beta x} + A_{\gamma\delta}^1 u_{3,\alpha x \beta x}^{(0)} + \mathbf{T}_{\gamma\delta\alpha\beta\kappa}^{(0)} u_{\alpha,\beta\kappa\kappa x}^{(0)} + \mathbf{F}_{\gamma\delta\alpha}^0 \theta_{,\alpha x} - \mathbf{B}_{\gamma\delta}^{(1)0} \theta \\ M_{\gamma\delta}^{(-2)} &= A_{\gamma\delta\alpha\beta}^1 w_{\alpha,\beta x} + A_{\gamma\delta\alpha\beta}^2 u_{3,\alpha x \beta x}^{(0)} + \mathbf{T}_{\gamma\delta\alpha\beta\kappa}^{(1)} u_{\alpha,\beta\kappa\kappa x}^{(0)} + \mathbf{F}_{\gamma\delta\alpha}^1 \theta_{,\alpha x} - \mathbf{B}_{\gamma\delta}^{(1)1} \theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

*Уравнения равновесия.* Из (3.1), (3.2) имеем

$$N_{\gamma\delta,\delta x}^{(-3)} = 0, \quad N_{\gamma\delta,\delta x}^{(-2)} = 0, \quad N_{3\delta,\delta x}^{(-1)} = 0, \quad -M_{\delta\alpha,\alpha x}^{(-2)} + N_{\delta 3}^{(-1)} = 0 \quad (4.24)$$

*Краевые условия.* Они получаются так же, как в [1], подстановкой разложения (2.1) в исходные краевые условия и имеют вид

$$u_\alpha^{(0)}(\bar{X}) = 0, \quad w_\alpha(\bar{X}) = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad u_3^{(0)}(\bar{X}) = \frac{\partial u_3^{(0)}(\bar{X})}{\partial \bar{n}} = 0 \quad \text{на } \partial S \quad (4.25)$$

Задача (4.23) — (4.25) представляет собой асимптотическую версию задачи термоупругости тонких пластинок. Во многом она аналогична классической модели, однако полного совпадения нет.

*Количество неизвестных в задаче термоупругости.* В случае чисто упругой задачи величины  $u_\alpha^{(0)}$  и  $w_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) удовлетворяют одинаковым уравнениям, см. [1], вследствие чего они могут быть отождествлены. Решение задачи изгиба, соответственно, может быть проведено относительно вектора  $(w_1, w_2, u_3^{(0)})$ , который может быть трактован как классический трехмерный вектор перемещений (хотя по исходному смыслу его компоненты — это элементы разложения (2.1) вектора перемещений в задаче (1.1)). В случае задачи термоупругости даже при отсутствии прогибов (при  $u_3^{(0)}=0$ ) и неклассических эффектов (см. ниже)  $u_\alpha^{(0)}$  и  $w_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) не могут быть отождествлены, так как удовлетворяют различным определяющим уравнениям (с постоянными теплового расширения  $\mathbf{B}_{\gamma\delta}^{(0)0} \neq \mathbf{B}_{\gamma\delta}^{(1)0}$  для  $N_{\gamma\delta}^{(-3)}$  и  $N_{\gamma\delta}^{(-2)}$ , см. (4.23)). Таким образом, решением задачи термоупругости для пластинок выступает пятимерный вектор  $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, w_1, w_2, u_3^{(0)})$ . При этом задача относительно  $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$  — перемещений в плоскости пластинки, не связана с задачей относительно  $(w_1, w_2, u_3^{(0)})$  перемещениями изгибного характера и может решаться независимо от последней (но в общем случае не наоборот).

**5. Геометрическая и физическая асимптотики.** 1°. В случае физической асимптотики, когда  $\beta_{ij}^{(0)}=0$ , в силу (4.5) (4.18) имеем, что  $\bar{F}^{(0)}=\bar{G}^{(\alpha)}=0$ , а в силу  $R\theta=0$  (см. (4.11)) член с  $\bar{T}^{\alpha\beta\gamma}$  не входит в определяющие уравнения. В этом случае  $u_1^{(0)}=u_2^{(0)}=0$  и может не рассматриваться, а опре-

деляющие уравнения для задачи относительно  $(w_1, w_2, u_3^{(0)})$  получаются, если в (4.23) формально положить  $\mathbf{V}_{\gamma\delta}^{(\nu)\mu} = \mathbf{T}_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(\nu)\mu} = \mathbf{F}_{\gamma\delta\alpha}^\mu = 0$ . При этом  $\mathbf{V}_{\gamma\delta}^{(0)0} = 0$  указывает на то, что пластинка при нагревании не расширяется в ее плоскости. Последнее вполне согласуется с тем, что коэффициент теплового расширения материала пластинки  $\beta_{ij} = \varepsilon\beta_{ij}^{(1)} + \dots \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (см. (1.3)).

2°. Геометрической асимптотике соответствует случай  $\beta_{ij}^{(0)} \neq 0$ , приводящий, вообще говоря, к присутствию всех коэффициентов в (4.23). Эта асимптотика соответствует, в частности, «нормальному» тепловому расширению пластинки в ее плоскости (согласно (1.3),  $\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(0)}$  в этом случае).

*Однородная пластинка постоянной толщины, геометрическая асимптотика.* Пусть пластинка изготовлена из однородного изотропного материала и имеет постоянную толщину:

$$a_{ijkl} = \text{const}, \quad \beta_{ij} = \text{const}, \quad P_1 = [-1, 1]^2 \times [-1/2, 1/2]$$

В этом случае решения задач (4.4), (4.5) таковы

$$N_1^{\alpha\beta 0} = N_2^{\alpha\beta 0} = 0, \quad N_3^{\alpha\beta 0} = -\frac{a_{33\alpha\beta}}{a_{3333}} y_3$$

$$F_1^{(0)} = F_2^{(0)} = 0, \quad F_3^{(0)} = \frac{\beta_{33}}{a_{3333}} y_3$$

Подстановка этих выражений в (4.17) и (4.18) соответственно и последующее решение возникающих задач дает

$$T_\kappa^{\alpha\beta\gamma} = 0 \text{ при } \kappa \neq \gamma, \quad T_\gamma^{\alpha\beta\gamma} = -\frac{a_{33\alpha\beta}}{2a_{3333}} \left( y_3^2 - \frac{1}{12} \right)$$

$$G_\kappa^{(\alpha)} = 0 \text{ при } \kappa \neq \alpha, \quad G_\alpha^{(\alpha)} = -\frac{\beta_{33}}{2a_{3333}} \left( y_3^2 - \frac{1}{2} \right)$$

Подстановка этих выражений в (4.22) дает

$$\mathbf{F}_{ija}^\mu = \left\langle \left( -a_{ij\alpha\gamma} \frac{\beta_{33}}{a_{3333}} y_3 + a_{ij\gamma\alpha} \frac{\beta_{33}}{a_{3333}} y_3 \right) y_3^\mu \right\rangle = 0$$

$$\mathbf{T}_{ija\beta\gamma}^\mu = \left\langle \left( -a_{ij\gamma\beta} \frac{a_{33\alpha\beta}}{a_{3333}} y_3 + a_{ij\beta\gamma} \frac{a_{33\alpha\beta}}{a_{3333}} y_3 \right) y_3^\mu \right\rangle = 0$$

Здесь использовались известные симметрии тензора упругих постоянных [3]. Зануление коэффициентов  $\mathbf{T}_{ija\beta\gamma}^\mu$  «развязывает» задачи относительно  $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$  и  $(w_1, w_2, u_3^{(0)})$ .

*Пластинки непостоянной толщины из однородных материалов.* Пусть, как и выше,  $a_{ijkl} = \text{const}$ ,  $\beta_{ij} = \text{const}$ , но  $P_1$  — произвольная область (могущая выступать в качестве ЯП). В этом случае, вообще говоря,  $\mathbf{F}_{ija}^\mu, \mathbf{T}_{ija\beta\gamma}^\mu \neq 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gaillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984, V. 6. N 2. P. 159–191.
2. Каламкароев А. Л., Кудрявцев Б. А., Паргон В. З. Термоупругость регулярно неоднородного искривленного слоя с волнистыми поверхностями // ПММ. 1987. Т. 57. Вып. 6. С. 1000–1008.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
4. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
5.V.1991