

УДК 539.3

© 1992 г. В. П. Левицкий, В. М. Онышкевич

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ ЖЕСТКИЙ ДИСК, ПРИЖИМАЕМЫЙ К УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассматривается осесимметричная контактная задача о вдавливании жесткого диска, моделируемого цилиндрическим штампом, в упругое полупространство. Верхний торец цилиндра подвергается конвективному нагреву или охлаждению тепловой контакт между штампом и полупространством неидеальный. Вне зоны контакта осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Решение задачи термоупругости для полупространства строится преобразованием Ганкеля, задача теплопроводности для цилиндра решается методом прямых. Установлено существование зон отрыва полупространства от штампа. Найдены температурные поля, тепловые потоки и контактные напряжения во взаимодействующих телах.

1. Постановка задачи. При решении контактных задач термоупругости представляют интерес исследования явления отрыва штампа от основания [1–3]. Но в этих и других исследованиях не решается уравнение теплопроводности для штампа, т. е. задается температура основания штампа или тепловой поток. Ниже предлагается методика решения осесимметричных контактных задач термоупругости при неполном контакте взаимодействующих тел при учете решения задачи теплопроводности для жесткого цилиндрического штампа. Вне штампа предполагается наличие конвективного теплообмена с внешней средой. Между штампом и основанием осуществляется неидеальный тепловой контакт.

Цилиндрический жесткий диск радиуса a и высоты H вдавливается силой P в упругое полупространство (фиг. 1). Верхний торец цилиндра подвергается конвективному нагреву или охлаждению с коэффициентом теплообмена γ_0 . Между боковыми поверхностями и внешней средой осуществляется теплообмен по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена γ_a . Через незагруженную поверхность полупространства осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой с коэффициентом теплообмена γ_h .

Для решения задачи необходимо проинтегрировать уравнения:

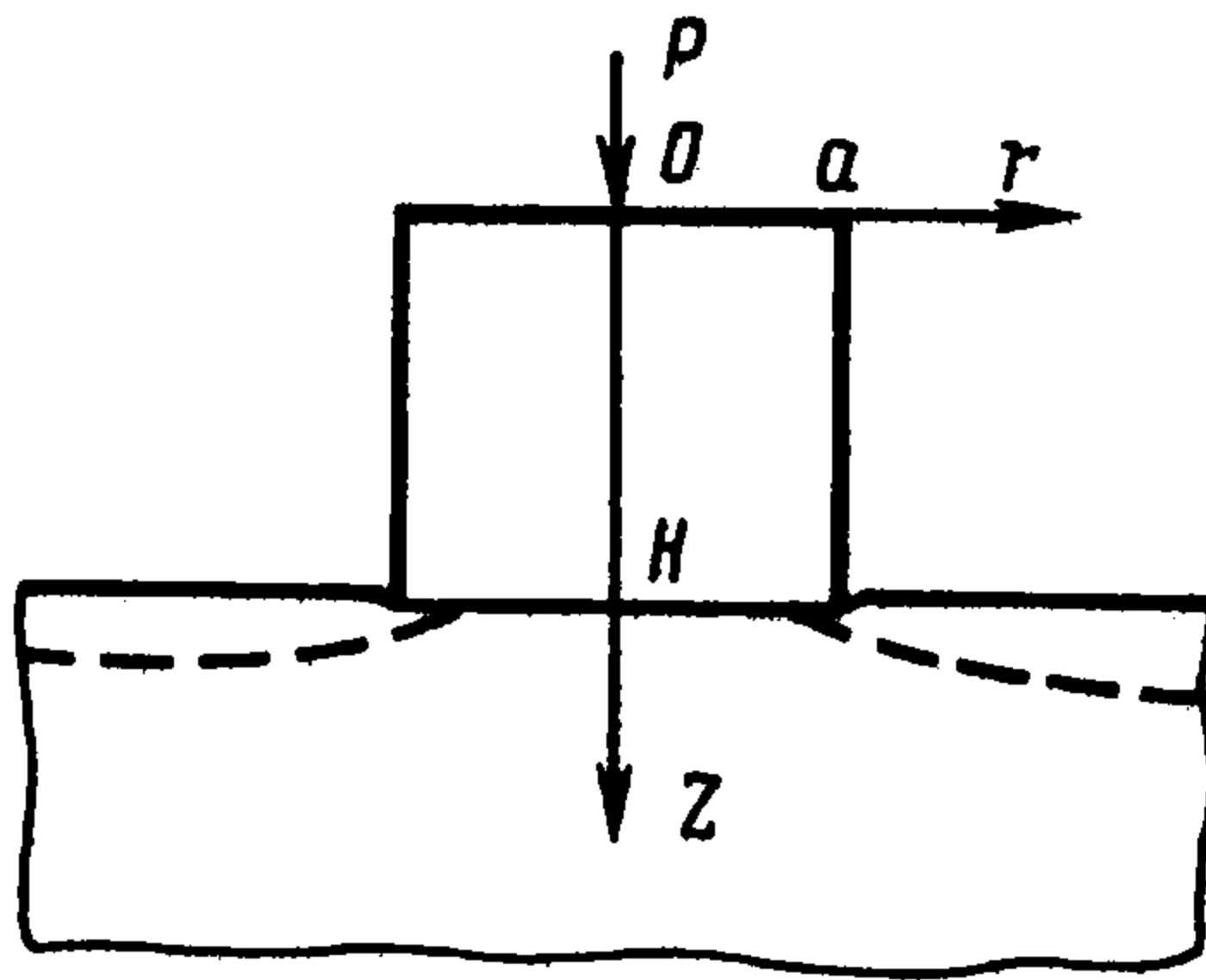
$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + k \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial r} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial r^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$k = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}, \quad \beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$$



Фиг. 1

при температурных граничных условиях

$$z=0: \partial t^{(1)}/\partial z = \gamma_0(t^{(1)} - t_c), \quad 0 \leq r \leq a \quad (1.3)$$

$$r=a: \partial t^{(1)}/\partial r = -\gamma_a t^{(1)}, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$z=H: \lambda^{(2)} \partial t^{(2)}/\partial z = \lambda^{(1)} \partial t^{(1)}/\partial z, \quad 0 \leq r \leq a \quad (1.4)$$

$$\lambda^{(2)} \partial t^{(2)}/\partial z + \lambda^{(1)} \partial t^{(1)}/\partial z = h(t^{(2)} - t^{(1)}), \quad 0 \leq r \leq a$$

$$\partial t^{(2)}/\partial z = \gamma_n t^{(2)}, \quad r > a$$

и силовых граничных условиях

$$z=H: u_z = f(r), \quad 0 \leq r \leq a; \quad \sigma_z = 0, \quad r \geq a; \quad \tau_{rz} = 0, \quad r < \infty \quad (1.5)$$

где ν — коэффициент Пуассона, λ , μ — коэффициенты Ламе, α — температурный коэффициент линейного расширения, $i=1$ относится к цилиндрическому штампу, $i=2$ — к полупространству, γ_0 , γ_a , γ_n — коэффициенты теплообмена соответственно между верхним торцом цилиндра, боковыми поверхностями цилиндра, незагруженной поверхностью полупространства с одной стороны и внешней средой с другой, t_c — температура внешней среды, h^{-1} — термическое сопротивление контакта, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ — коэффициенты теплопроводности цилиндра и полупространства, $f(r)$ — заданная величина осадки штампа.

2. Решение задачи для штампа. Используя конечно-разностную аппроксимацию уравнений теплопроводности (1.2) для цилиндра и граничных условий (1.3) по безразмерной радиальной координате $\rho=r/a$, решение задачи для цилиндра строим методом прямых [4] в области

$$G = \{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1\}, \quad \zeta = x/M$$

В результате приходим к системе линейных дифференциальных уравнений

$$dv/d\zeta = Bv \quad (2.1)$$

Здесь

$$v^T = (t_1^{(1)}, \dots, t_N^{(1)}, dt_1^{(1)}/d\zeta, \dots, dt_N^{(1)}/d\zeta)$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & I \\ B_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4H^2}{a^2\Delta\rho^2}, -\frac{4H^2}{a^2\Delta\rho^2}, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, 0, \frac{H^2}{a^2\Delta\rho^2} \left[\frac{1}{2(i-1)} - 1 \right], \frac{2H^2}{a^2\Delta\rho^2}, -\frac{H^2}{a^2\Delta\rho^2} \left(1 + \frac{1}{2(i-1)} \right), 0, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0, \frac{2H^2}{a^2\Delta\rho^2}, \frac{H^2}{a} \left[\gamma_a \left(1 + \frac{2}{\Delta\rho} \right) + \frac{2}{a\Delta\rho^2} \right] \end{pmatrix}$$

где 0 — нулевая, I — единичная $N \times N$ матрицы $\Delta\rho = \rho_i - \rho_{i-1}$; $i = 1, \dots, N$; N — количество точек разбиения.

Решение системы (2.1) строится при помощи матричной экспоненты [5]

$$v(\zeta) = \exp(B\zeta) \cdot d$$

где d — произвольный постоянный вектор, определяемый из граничных условий (1.3) для каждой прямой. При вычислении матричной экспоненты используется формула [5]

$$t^{(1)}(\zeta) = \exp(B\zeta) = [\exp(B(\zeta \cdot 2^{-p}))]^{2^p}$$

где $q = \zeta \cdot 2^{-p}$ подбирается таким образом, чтобы обеспечить устойчивость вычислений.

3. Решение задачи для полупространства. Применяя интегральное преобразование Ганкеля по координате ρ к уравнениям (1.1), (1.2) и граничным условиям (1.4), (1.5), решение осесимметричных уравнений термоупругости для упругого полупространства в изображениях по Ганкелю представим в виде:

$$\begin{aligned} \bar{t}^{(2)}(\xi, \zeta) &= B(\xi) e^{-\xi(\zeta-1)} \\ \bar{u}_z(\xi, \zeta) &= \xi^2 [kC_1(\xi) + 2C_2(\xi) + k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)] e^{-\xi(\zeta-1)} + \\ &+ \frac{1}{2}\Lambda\xi^{-1}B(\xi) [1 - \xi(\zeta-1)] e^{-\xi(\zeta-1)} \\ \bar{\sigma}_z(\xi, \zeta) &= -2\mu\xi^3 [kC_1(\xi) + C_2(\xi) + k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)] e^{-\xi(\zeta-1)} + \\ &+ \mu\xi(\zeta-1)\Lambda B(\xi) e^{-\xi(\zeta-1)} \\ \bar{r}_{rz}(\xi, \zeta) &= 2\mu\xi^3 [(k-1)C_2(\xi) - kC_1(\xi) - k\xi(\zeta-1)C_2(\xi)] e^{-\xi(\zeta-1)} - \\ &- \mu\Lambda B(\xi) [1 - \xi(\zeta-1)] e^{-\xi(\zeta-1)} \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{H}, \quad \Lambda = \frac{\nu+1}{\nu-1} \alpha = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \alpha$$

$B(\xi)$, $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ — неизвестные функции.

Удовлетворяя последнему условию (1.5) и используя полученное соотношение

$$C_2(\xi) = \frac{k}{k-1} C_1(\xi) + \frac{\Lambda}{2(k-1)\xi^3} B(\xi)$$

искомые функции на площадке контакта представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_z|_{\zeta=1} &= \theta_1 \xi^2 C_1(\xi) + \theta_2 \xi^{-1} B(\xi), \quad \bar{\sigma}_z|_{\zeta=1} = \sigma_1 \xi^3 C_1(\xi) + \sigma_2 B(\xi) \\ \bar{t}^{(2)}|_{\zeta=1} &= B(\xi), \quad \partial \bar{t}^{(2)} / \partial \zeta|_{\zeta=1} = -\xi H B(\xi) \end{aligned}$$

$$\theta_1 = k \frac{k+1}{k-1}, \quad \theta_3 = \frac{\Lambda}{2} \frac{k+1}{k-1}, \quad \sigma_1 = -\frac{2\mu k^2}{k-1}, \quad \sigma_3 = -\frac{\mu\Lambda}{k-1}$$

4. Удовлетворение граничным условиям при $\xi=1$. Используя формулу обращения интегрального преобразования Ганкеля и удовлетворяя первым двум силовым граничным условиям (1.5), получаем

$$\int_0^{\infty} \eta \left(\frac{\theta_1}{a^2} \eta^2 C_1(\eta) + \frac{a\theta_3}{\eta} C_3(\eta) \right) J_0(\eta\rho) d\eta = a^2 f(\rho), \quad \rho \leq 1 \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \eta \left(\frac{\sigma_1 \eta^3}{a^3} C_1(\eta) + \sigma_3 C_3(\eta) \right) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad \rho > 1 \quad (4.2)$$

где $\eta = \xi a$, а тепловые граничные условия (1.4) приводят к соотношениям

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\lambda^{(2)}}{a^3} \int_0^{\infty} \eta^2 C_3(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad \rho \leq 1 \quad (4.3)$$

$$\frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \xi} + ht^{(1)} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \left(h + \frac{\lambda^{(2)}\eta}{a} \right) \eta C_3(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \quad \rho \leq 1 \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \eta \left(\gamma_h + \frac{\eta}{a} \right) C_3(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0, \quad \rho > 1 \quad (4.5)$$

Представляя контактные напряжения в виде ряда

$$\sigma_z(\rho) = \sum_{n=1}^N a_n J_0(\lambda_n \rho)$$

и вводя неизвестную функцию

$$\chi(\rho) = b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} b_n J_0(\lambda_n \rho)$$

в соотношения (4.2), (4.5), используя формулу обращения интегрального преобразования Ганкеля и проводя вычисления некоторых интегралов [6], получим соотношения для $C_1(\eta)$ и $C_3(\eta)$, подстановка которых в (4.1), (4.3), (4.4) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_1}{\sigma_1} a \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^{\infty} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta + \\ & + \left(\theta_3 - \frac{\sigma_3 \theta_1}{\sigma_1} \right) a^2 \left(b_0 \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta(\eta + a\gamma_h)} d\eta + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta + a\gamma_h} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta \right) = f(\rho), \quad \rho \leq 1 \quad (4.6) \\ & \lambda^{(2)} b_0 \int_0^{\infty} \frac{\eta}{\eta + a\gamma_h} J_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta + \end{aligned}$$

$$+ \lambda^{(2)} \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta + a\gamma_h} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta + \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \rho \leq 1 \quad (4.7)$$

$$b_0 \int_0^{\infty} \frac{ah + \lambda^{(2)}\eta}{\eta + a\gamma_h} J_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta(ah + \lambda^{(2)}\eta)}{\eta + a\gamma_h} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_k^2 - \eta^2} d\eta = \frac{\lambda^{(1)}}{H} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta} + ht^{(1)}, \quad \rho \leq 1 \quad (4.8)$$

где λ_k — нули функции Бесселя

$$J_0(\lambda_k) = 0, \quad (k=1, \dots, N) \quad (4.9)$$

5. Сведение решения задачи к системе линейных алгебраических уравнений. Удовлетворяя соотношения (4.6)–(4.8) и граничные условия (1.3) в ряде равноотдаленных точек

$$\rho_i = (i-1)/(N-1), \quad (i=1, \dots, N)$$

получаем систему $4 \cdot N$ линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $a_i, b_i, d_i, (i=1, \dots, N; j=1, \dots, 2N)$, через которые определяются искомые функции:

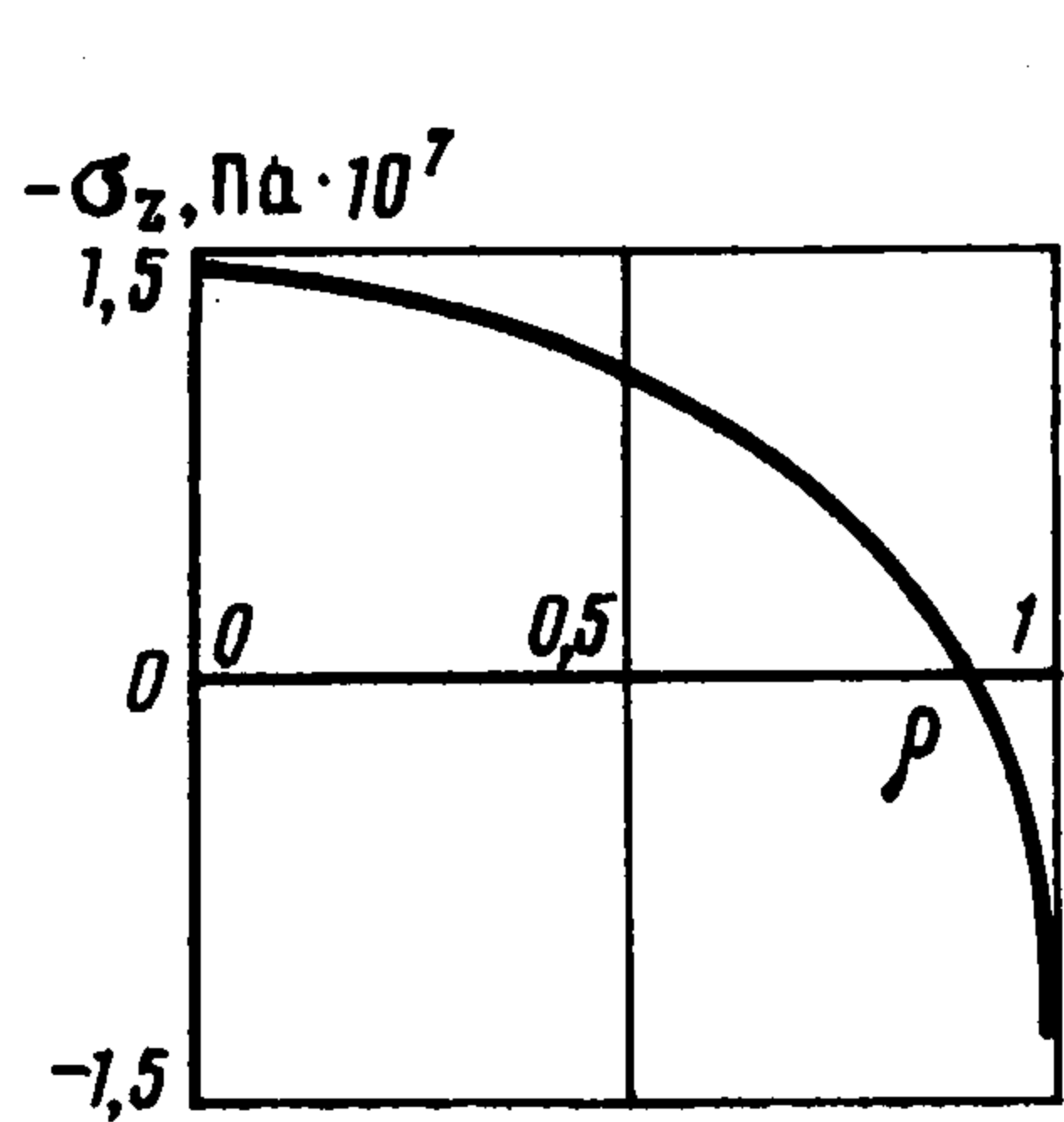
$$t^{(1)}(\rho_i, \zeta) = \sum_{j=1}^{2N} t_{i,j}(\zeta) d_j \quad (5.1)$$

$$q^{(1)}(\rho_i, \zeta) = \frac{\lambda^{(1)}}{a} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial \zeta}; \quad (i=1, \dots, N)$$

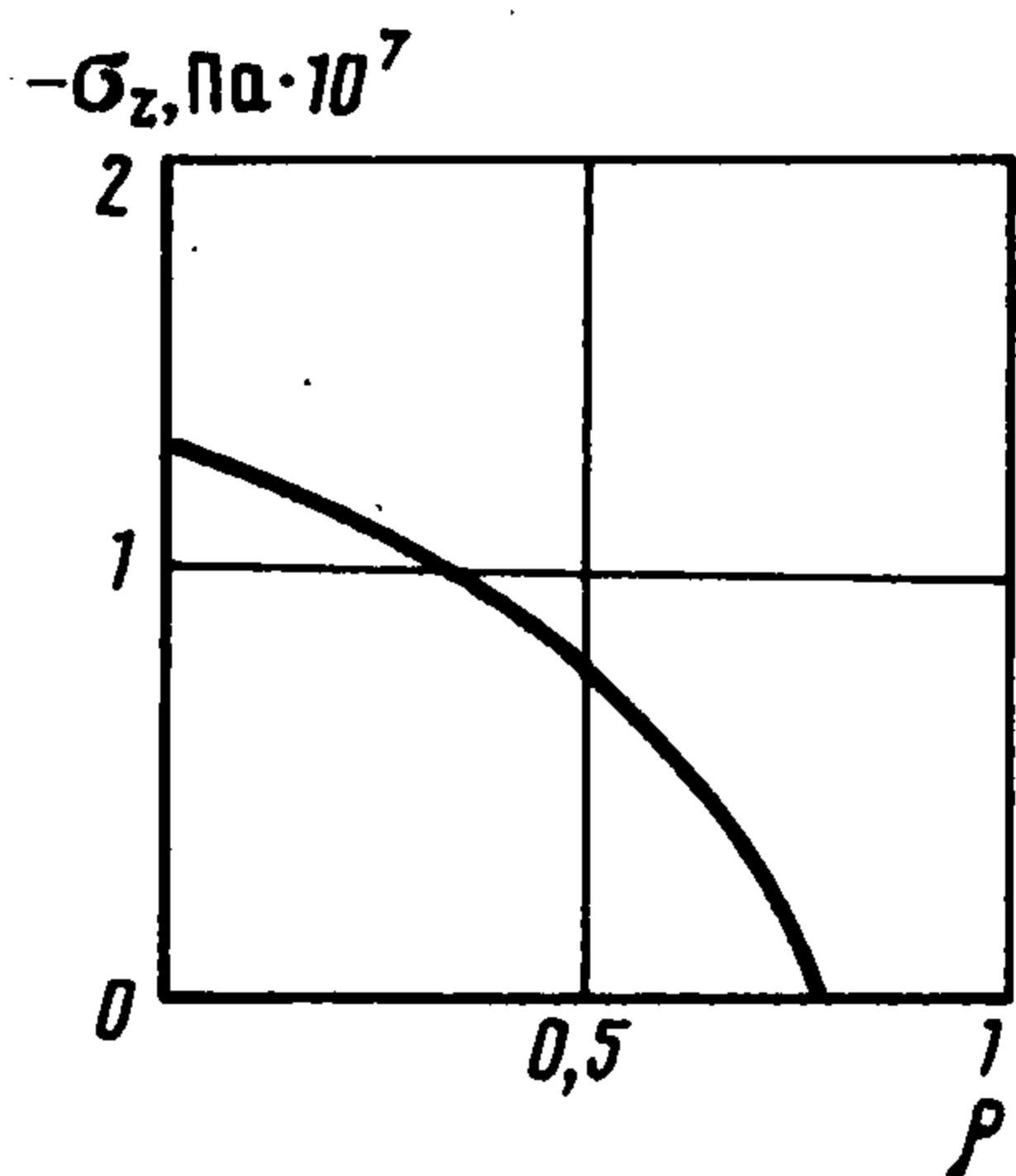
$$t^{(2)}(\rho, \zeta) = ab_0 \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta + a\gamma_h} e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta + \\ + a \sum_{n=1}^{N-1} b_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^{\infty} \frac{\eta}{\eta + a\gamma_h} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2 - \eta^2} e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta$$

$$q^{(2)}(\rho, \zeta) = \frac{\lambda^{(2)}}{a} \frac{\partial t^{(2)}(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = \lambda^{(2)} b_0 \int_0^{\infty} \frac{\eta J_1(\eta) J_0(\eta\rho)}{\eta + a\gamma_h} e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta + \\ + \lambda^{(2)} \sum_{n=1}^{N-1} b_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2}{\eta + a\gamma_h} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2 - \eta^2} e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta$$

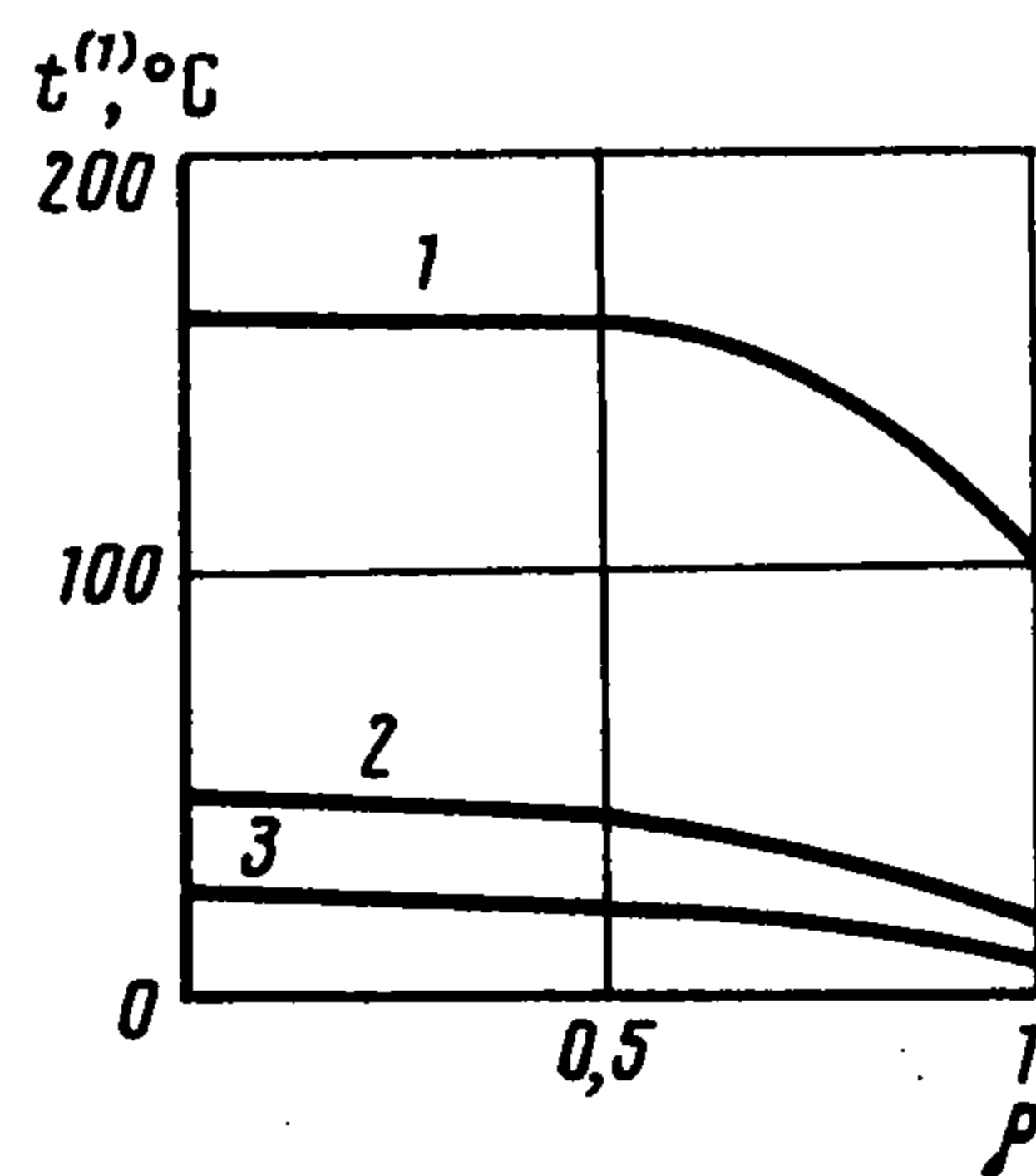
$$u_z(\rho, \zeta) = \frac{a}{\sigma_1} \sum_{n=1}^N a_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^{\infty} \left(\theta_1 + \frac{k^2 \eta (\zeta - 1)}{k - 1} \right) \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2 - \eta^2} e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta + \\ + a^2 b_0 \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta) J_0(\eta\rho)}{(\eta + a\gamma_h) \eta} A(\eta, \zeta) e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta + \\ + a^2 \sum_{n=1}^{N-1} b_n \lambda_n J_1(\lambda_n) \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta + a\gamma_h} \frac{J_0(\eta) J_0(\eta\rho)}{\lambda_n^2 - \eta^2} A(\eta, \zeta) e^{-\eta(\zeta-1)} d\eta$$



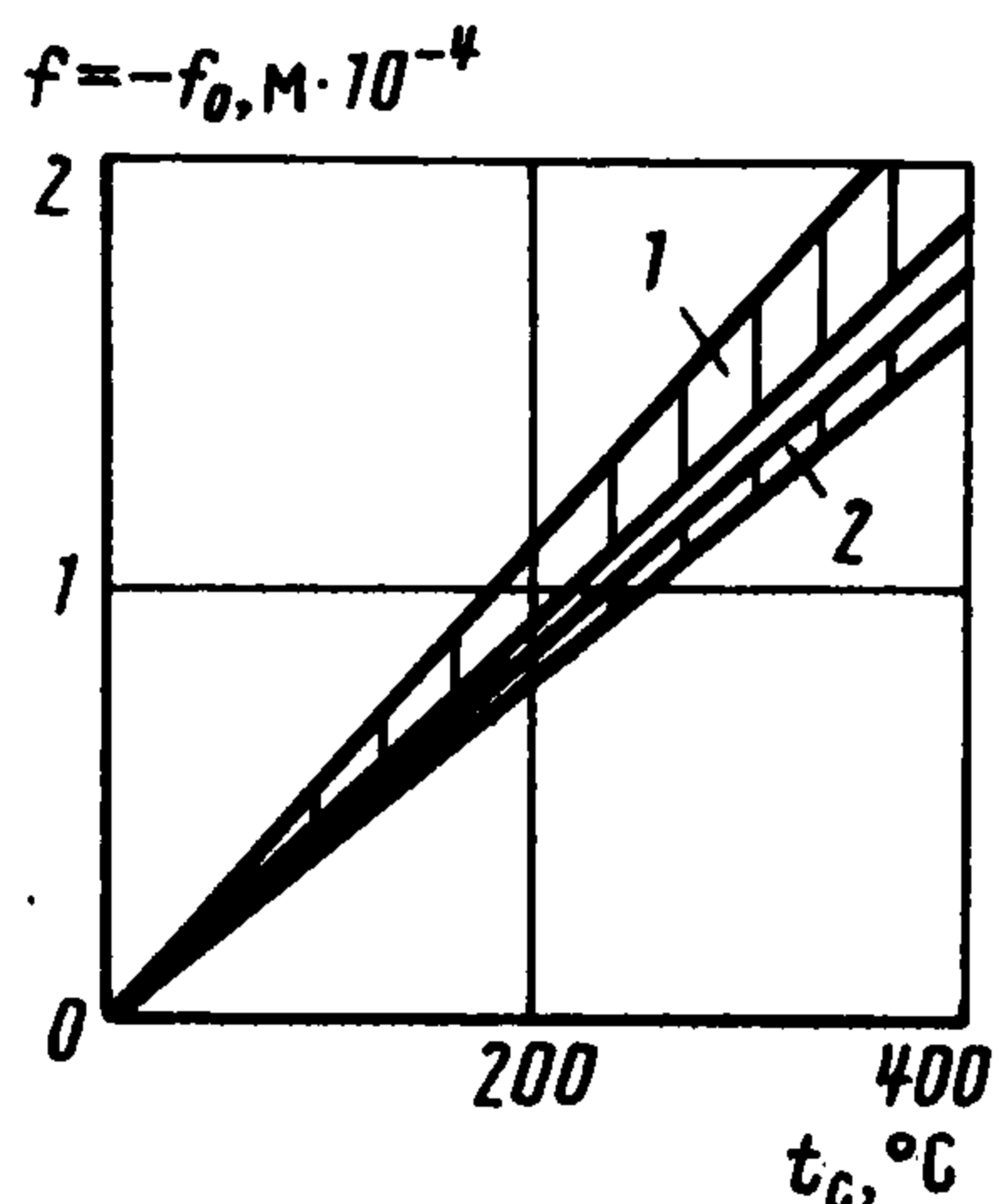
Фиг. 2



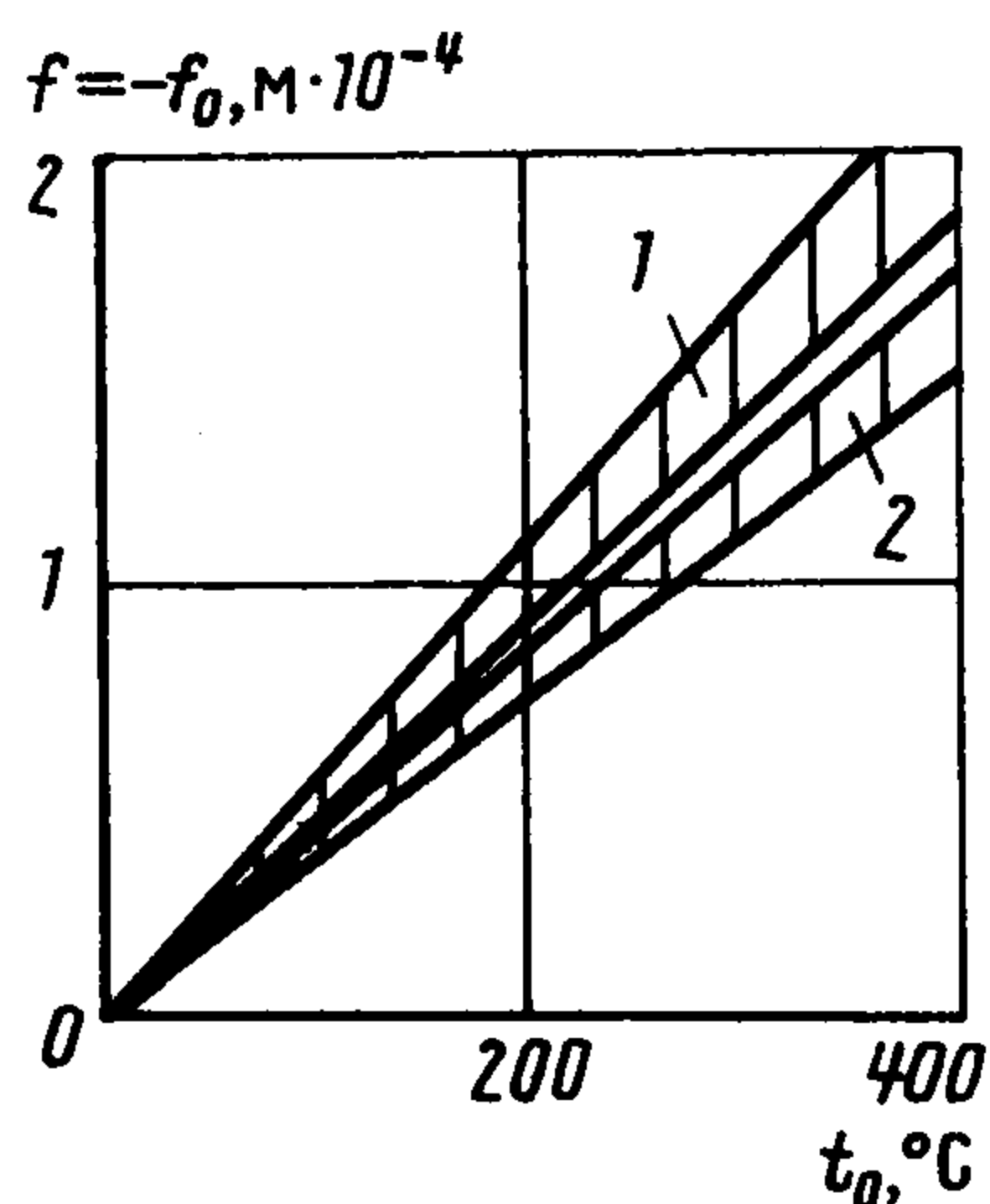
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

где

$$A(\eta, \zeta) = \theta_3 + \frac{\theta_3}{k+1} \eta(\zeta-1) - \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \left(\theta_1 + \frac{k^2 \eta(\zeta-1)}{k-1} \right)$$

Числовые расчеты проведены для случая, когда материал цилиндра — сталь ($\lambda^{(1)}=22$ Вт/(м·К)), а материал полупространства — алюминий ($\lambda^{(2)}=209$ Вт/(м·К)), $\gamma_0=\gamma_a=\gamma_h=10$ м⁻¹, $t_c=473$ К, $h=10^4$ Вт/(м²·К), $\alpha=22,9 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $a=1$ м, $H=0,3$ м, $f=-10^{-4}$ м, $N=19$.

Получено распределение контактных напряжений (фиг 2). Изменение знака σ_z на участке $[0, a]$ свидетельствует о существовании зон отрыва полупространства от цилиндрического штампа. Следовательно, контакт между телами происходит на участке $[0, \rho_0]$, где $\rho_0 < 1$, поэтому первые два условия контакта (1.4) и первое условие (1.5) следует отнести только к $\rho \leq \rho_0$, а второе условие (1.5) — к $\rho > \rho_0$. На участке $\rho_0 < \rho < 1$ между нижним торцом цилиндра и внешней средой осуществляется конвективный теплообмен по закону Ньютона

$$\zeta=1: \partial t^{(1)}/\partial \zeta = -N\gamma_p t^{(1)}, \quad \rho_0 < \rho < 1 \quad (5.2)$$

где γ_p — коэффициент теплообмена между незагруженной поверхностью нижнего торца цилиндра и внешней средой.

Удовлетворение измененным граничным условиям приводит к необходимости решения новой системы $4 \cdot (N-1)$ линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Значение параметра l достигается последовательным изменением числа точек разбиения, в которых произошла смена знака напряжений σ_z , т. е. отрыв полупространства от штампа.

Окончательные контактные напряжения приведены на фиг. 3 для силы P , которая определялась из условия равновесия штампа

$$P = 2\pi\rho_0^2 \sum_{n=1}^{N-1} a_n \lambda_n J_1(\lambda_n)$$

Температура и тепловые потоки в контактирующих телах, вертикальные перемещения упругого полупространства определяются соотношениями (5.1). На фиг. 4 представлена, например, температура цилиндра. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $z=0$, $z=0,25$ м, $z=0,3$ м.

6. Выводы.

1. Коэффициент термической проводимости контакта h существенно влияет на величину участка контакта. С ростом h размер зоны контакта уменьшается. (На фиг. 5 область 1 соответствует $h=10^4$ Вт/(м²·К), а область 2 — $h=10^3$ Вт/(м²·К)).

2. Коэффициент теплообмена верхнего торца цилиндра с внешней средой также существенно влияет на размер участка контакта. (На фиг. 6 область 1 соответствует $\gamma_0=10$ м⁻¹, а область 2 — $\gamma_0=5$ м⁻¹).

3. При заданной силе P возможен вариант контакта $\rho_0 \rightarrow 0$ (левая граница зоны 1 и 2 на фиг. 5–6). Левее от заштрихованной области решение контактной задачи не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barber J. R. The effect of thermal distortion on construction resistance // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1971. V. 14. № 6. P. 751–766.
2. Barber J. R. Indentation of an elastic half-space by a cooled flat punch // Quart. J. Mech. appl. Math. 1982. V. 35. № 1. P. 141–154.
3. Gladwell G. M. L., Barber J. R. Thermoelastic contact problems with radiation conditions // Quart. J. Mech. appl. Math. 1983. V. 36. № 3. P. 403–417.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963. 659 с.
5. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1986. 1108 с.

Львов

Поступила в редакцию
22.VIII.1991