Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 539.3:534.1

 П. Е. Товстик

СВОБОДНЫЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Методом асимптотического интегрирования трехмерных динамических уравнений теории упругости исследуется часть спектра частот свободных высокочастотных колебаний однородной анизотропной пластины переменной толщины. Рассматриваются формы колебаний, имеющие одну или несколько полуволн деформации в направлении толщины пластины. Предполагается, что одна из лицевых поверхностей пластины плоская, а другая гладкая с точкой максимума. Найдены условия существования форм колебаний, локализованных в окрестности точки максимума толщины пластины, и получены приближенные выражения для частот и форм колебаний указанного типа.

Интерес к колебаниям описанного типа связан с кварцевыми резонаторами, конструкции которых могут иметь форму пластин переменной толщины [1–4], причем одна из лицевых поверхностей плоская, а другая – сферическая. Исследовались [5] высокочастотные колебания оболочек, сопровождающиеся волнообразованием в направлении толщины.

1. В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 запишем систему уравнений гармонических колебаний трехмерного упругого анизотропного тела [6]

$$E_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l}+\rho\omega^2 u_i=0\quad (E_{ijkl}=E_{jikl}=E_{klij})\tag{1.1}$$

где u_k— проекции перемещения, E_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости, ρ — плотность, ω — частота колебаний. По повторяющимся индексам проводится суммирование, причем латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие — значения 1, 2.

Пусть пластина занимает область

$$0\leqslant x_3\leqslant h(x_1,\ x_2)$$

$$h(x_1,\ x_2)=h_0-{}^1/{}_2R^{-1}f_2+R^{-2}f_3+R^{-3}f_4+\ldots$$

$$f_k(x_1,x_2)=\sum_{i+j=k} d_{ij}x_1{}^i x_2{}^j,\quad k=2,3,\ldots$$

причем толщина пластины h максимальна при $x_1=x_2=0$. Здесь R – характерный радиус кривизны верхней лицевой поверхности, f_k – однородные многочлены по x_1, x_2 степени k с безразмерными коэффициентами d_{ij}, квадратичная форма f_2 предполагается положительно определенной.

Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными, что дает граничные условия

$$\sigma_{i3}=0 \quad (x_3=0)$$
$$\sigma_{i3}-(\partial h/\partial x_\alpha)\sigma_{i\alpha}=0 \quad (x_3=h(x_1, x_2)) \qquad (1.2)$$
$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\partial u_k/\partial x_l, \quad i, j=1, 2, 3$$

Ниже рассматриваются лишь формы колебаний, экспоненциально затухающие с ростом $x_1^2+x_2^2$ и называемые в дальнейшем локализованными. На такие колебания граничные условия на торцевой поверхности не влияют, поэтому их не конкретизируем.

2. Предположим сначала, что толщина пластины постоянна ($h(x_1, x_2)=h_0$), а функции u_i зависят только от x_3. Тогда краевая задача (1.1), (1.2) приводится к виду

$$E_{i3k3}\partial^2 u_k/\partial x_3^2+\rho\omega^2 u_i=0, \quad \partial u_k/\partial x_3=0 \quad (x_3=0, h_0) \qquad (2.1)$$

и определяет три серии частот колебаний

$$\omega_{pn}=n\pi h_0^{-1}(\lambda_p\rho^{-1})^{1/2} \quad (p=1, 2, 3; \ n=1, 2, \ldots) \qquad (2.2)$$

где λ_p — собственные значения матрицы E_{i3k3}.

Частотам (2.2) соответствуют формы колебаний

$$u_i^p(x_3)=U_i^p\cos(n\pi h_0^{-1}x_3) \qquad (2.3)$$

где U_i^p — собственные векторы матрицы E_{i3k3}, которые предполагаются нормированными:

$$E_{i3k3}U_k^p=\lambda_p U_i^p, \quad U_i^p U_i^q=\delta_{pq} \qquad (2.4)$$

Вблизи частот ω_{pn} будут группироваться частоты рассматриваемых ниже локализованных форм колебаний.

3. Проделаем ряд преобразований. Вместо неизвестных функций u_i введем функции v_p по формулам

$$u_i(x_1, x_2, x_3)=U_i^p v_p(x_1, x_2, x_3) \qquad (3.1)$$

Тогда соотношения (1.1), (1.2) после умножения на U_i^q и сложения принимают вид

$$C_{qjpl}\partial^2 v_p/\partial x_j\partial x_l+\rho\omega^2 v_q=0, \quad C_{qjpl}=E_{ijkl}U_i^q U_k^p \qquad (3.2)$$

$$C_{q3pl}\partial v_p/\partial x_l-(\partial h/\partial x_\alpha)C_{q\alpha pl}\partial v_p/\partial x_l=0 \text{ при } x_3=h(x_1, x_2) \qquad (3.3)$$

При $x_3=0$ граничное условие получается отбрасыванием второго слагаемого в левой части равенства (3.3).

Введем малый параметр μ и сделаем растяжение масштабов переменных x_i по формулам

$$\mu^4=h_0R^{-1}, \ x_\alpha=R\mu^3 y_\alpha \quad (\alpha=1, 2), \ x_3=h_0 fz$$
$$f=f(y_\alpha, \mu)=1-{}^1/_2\mu^2 f_2(y_\alpha)+\mu^3 f_3(y_\alpha)+\ldots \qquad (3.4)$$

Тогда $0\leqslant z\leqslant 1$ и, как показывают последующие выкладки, в представляющей интерес области будет $y_\alpha\sim 1$.

Вместо неизвестных функций $v_i(x_j)$ введем

$$v_i'(y_\alpha, z) \equiv v_i(x_\alpha, x_3) \tag{3.5}$$

Тогда

$$\partial v_i/\partial x_\alpha = h_0^{-1}\mu D_\alpha v_i', \quad \partial v_i/\partial x_3 = (h_0 f)^{-1}\partial v_i'/\partial z$$
$$D_\alpha = \partial/\partial y_\alpha - zf^{-1}(\partial f/\partial y_\alpha)\partial/\partial z, \quad \alpha=1,\ 2 \tag{3.6}$$

В связи с тем, что в силу (3.4) $\partial f/\partial y_\alpha = O(\mu^2)$, дифференциальные операторы D_α и $\partial/\partial y_\alpha$ различаются лишь в малых членах. В дальнейшем для краткости штрих у v_i опускаем.

После преобразований (3.4)—(3.6) уравнения (3.2) и граничные условия (3.3) принимают вид:

$$\lambda_q f^{-2}\partial^2 v_q/\partial z^2 + h_0^2\rho\omega^2 v_q + \mu B_{q\alpha p}D_\alpha(f^{-1}\partial v_p/\partial z) +$$
$$+\mu^2 C_{q\alpha p\beta}D_\alpha D_\beta v_p = 0, \quad B_{q\alpha p} = C_{q\alpha p3} + C_{q3p\alpha} \tag{3.7}$$

$$f^{-1}\lambda_q \partial v_q/\partial z + \mu C_{q3p\alpha}D_\alpha v_p -$$
$$-\mu(\partial f/\partial y_\alpha) + \mu(C_{q\alpha p3}f^{-1}\partial v_p/\partial z + C_{q\alpha p\beta}D_\beta v_p) = 0 \quad (z=1) \tag{3.8}$$

Граничные условия при $z=0$ получаются из (3.8) отбрасыванием слагаемых с множителем $\partial f/\partial y_\alpha$. Отметим, что эти слагаемые имеют порядок μ^3 по сравнению с главными и не сказываются при построении найденных ниже первых приближений. Последнее обстоятельство позволяет распространить полученные результаты на пластины, у которых обе лицевые поверхности не являются плоскими

$$h_1(x_\alpha) \leqslant x_3 \leqslant h_2(x_\alpha), \quad h(x_\alpha) = h_2 - h_1 \tag{3.9}$$

беря в последующих выкладках $h(x_\alpha)$ из (3.9).

4. Выберем одно из собственных значений λ_q матрицы E_{i3k3} и попытаемся построить соответствующую ему трехпараметрическую серию частот и форм локализованных колебаний. Не нарушая общности, будем считать, что $\lambda_q = \lambda_3$. Предположим, что $\lambda_\alpha \neq \lambda_3$ $(\alpha=1,\ 2)$.

Решение будем искать в виде формальных рядов по степеням μ:

$$v_q = v_q^{(0)} + \mu v_q^{(1)} + \mu^2 v_q^{(2)} + \ldots, \quad q=1,\ 2,\ 3$$
$$v_\alpha^{(0)} = 0, \quad \alpha=1,\ 2; \quad v_3^{(0)} \neq 0 \tag{4.1}$$
$$\omega = \omega_{3n}(1 + \mu^2\beta_2 + \mu^4\beta_4 + \ldots), \quad n=1,\ 2, \ldots$$

Неизвестные функции $v_p^{(i)}(y_\alpha, z)$ и числа β_k определяются в результате подстановки рядов (4.1) в равенства (3.7), (3.8). При μ^0 получаем однородную краевую задачу

$$\lambda_3\partial^2 v_3^{(0)}/\partial z^2 + h_0^2\rho\omega^2 v_3^{(0)} = 0, \quad \partial v_3^{(0)}/\partial z = 0 \quad (z=0,\ 1) \tag{4.2}$$

решение которой

$$v_3^{(0)}(y_\alpha, z) = V(y_\alpha)\cos(n\pi z), \quad \omega = \omega_{3n}, \quad n=1,\ 2, \ldots \tag{4.3}$$

согласуется с (2.2), (2.3), однако в отличие от (2.3) содержит функцию $V(y_\alpha)$, определяемую из последующих приближений.

Функции $v_q^{(1)}$ в (4.1) определяются из неоднородных краевых задач

$$\lambda_q\partial^2 v_q^{(1)}/\partial z^2+\lambda_3(n\pi)^2 v_q^{(1)}-n\pi B_{q\alpha 3}(\partial V/\partial y_\alpha)\sin(n\pi z)=0$$

$$\lambda_q\partial v_q^{(1)}\ \partial z+C_{q33\alpha}(\partial V/\partial y_\alpha)\cos(n\pi z)=0 \quad (z=0,\ 1) \tag{4.4}$$

При $q=\beta=1$, 2 задачи (4.4) имеют решение

$$v_\beta^{(1)}(y_\alpha, z)=\frac{B_{\beta\alpha 3}}{n\pi(\lambda_3-\lambda_\beta)}\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\sin(n\pi z)-\left(\frac{B_{\beta\alpha 3}}{\lambda_3-\lambda_\beta}+\frac{C_{\beta 33\alpha}}{\lambda_\beta}\right)\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\frac{F_\beta(z)}{k_\beta}$$

$$k_\beta=n\pi\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_\beta}\right)^{1/2} \tag{4.5}$$

$$F_\beta(z)=\begin{cases}(\cos{}^1/_2k_\beta)^{-1}\sin\xi, & n=2k\\ (\sin{}^1/_2k_\beta)^{-1}\cos\xi, & n=2k+1;\quad \xi=k_\beta(z-{}^1/_2)\end{cases}$$

Видим, что решение (4.5) не существует, если $k_\beta=(2k+1)\pi$ для четного n и $k_\beta=2k\pi$ -- для нечетного n, т. е. в случаях «внутренних резонансов», когда частота ω_{3n} (см. (2.2)) совпадает с одной из частот $\omega_{\beta m}$, причем четности чисел n и m различны. Из последующих приближений можно установить, что внутренний резонанс служит препятствием для построения решений и в тех случаях, когда четности чисел n и m одинаковы. Условия возникновения внутреннего резонанса можно записать в виде

$$\lambda_3 n^2=\lambda_\beta m^2,\ \beta=1,\ 2,\ m=1,\ 2,\dots \tag{4.6}$$

где число n фиксированно, а m, β – переменны. В дальнейшем предполагаем, что внутренний резонанс не имеет места.

При $q=3$ задача (4.4) является задачей «на спектре». Запишем ее в виде

$$\lambda_3\partial^2 w/\partial z^2+\lambda_3(n\pi)^2 w+g(z)=0,\ \lambda_3\partial w/\partial z+h(z)=0$$
$$(z=0,\ 1)$$

Тогда условие ее совместности имеет вид

$$\int_0^1 g(z)\cos(n\pi z)\,\mathrm{d}z+h(0)-(-1)^n h(1)=0 \tag{4.7}$$

В силу того, что условие (4.7) выполнено и $B_{3\alpha 3}=2C_{333\alpha}$, находим

$$v_3^{(1)}=-\frac{B_{3\alpha 3}}{2\lambda_3}\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\left(z-\frac{1}{2}\right)\cos(n\pi z)+Cv_3^{(0)} \tag{4.8}$$

Решение (4.8) найдено с точностью до произвольного слагаемого, являющегося общим решением однородной задачи. Не нарушая общности, считаем $C=0$.

Функции $v_q^{(2)}$ определяются из краевых задач

$$\lambda_q\frac{\partial^2 v_q^{(2)}}{\partial z^2}+\lambda_3(n\pi)^2 v_q^{(2)}+B_{q\alpha p}\frac{\partial^2 v_p^{(1)}}{\partial y_\alpha\partial z}+C_{q\alpha 3\beta}\frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}+$$
$$+(2\lambda_3\beta_2-\lambda_q f_2(y_\alpha))(n\pi)^2 v_q^{(0)}=0$$
$$\lambda_q\frac{\partial v_q^{(2)}}{\partial z}+C_{q3p\alpha}\frac{\partial v_p^{(1)}}{\partial y_\alpha}=0\quad(z=0,1)$$

($v_3^{(0)}$, $v_p^{(1)}$ задаются формулами (4.3), (4.5), (4.8)).

При сделанных предположениях $v_1^{(2)}$ и $v_2^{(2)}$ определяются единственным образом. Обратимся к условию совместности (4.7), необходимому для построения $v_3^{(2)}$. После упрощений оно может быть записано в виде:

$$a_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 V}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} + \lambda_3 (n\pi)^2 (2\beta_2 - f_2(y_\alpha)) V = 0 \tag{4.9}$$

$$\alpha_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{(0)} + a_{\alpha\beta}^{(\gamma)} F_\gamma(0), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$$

$$a_{\alpha\beta}^{(0)} = C_{3\alpha3\beta} - \frac{B_{3\alpha3}B_{3\beta3}}{4\lambda_3} + \frac{B_{3\alpha\gamma}B_{\gamma\beta3}}{\lambda_3 - \lambda_\gamma} \tag{4.10}$$

$$a_{\alpha\beta}^{(\gamma)} = -\frac{4\lambda_3}{k_\gamma}\left(\frac{B_{3\alpha\gamma}}{\lambda_\gamma - \lambda_3} + \frac{C_{33\gamma\alpha}}{\lambda_3}\right)\left(\frac{B_{\gamma\beta3}}{\lambda_3 - \lambda_\gamma} + \frac{C_{\gamma33\beta}}{\lambda_\gamma}\right)$$

(функция $F_\gamma(z)$ – та же, что и в (4.5)).

Этот процесс построения последовательных приближений может быть продолжен.

5. Будем искать решения уравнения (4.9), экспоненциально затухающие при $y_1^2+y_2^2\to\infty$, и соответствующие им значения β_2. В [7], [8] получены решения уравнений, для которых (4.9) является частным случаем. Последнее обстоятельство позволяет предложить более простой способ решения.

Квадратичная форма f_2 положительно определена, а матрица $A=\{a_{\alpha\beta}\}$ симметрична. Найдем аффинное преобразование переменных y_α

$$y_\alpha = c_{\alpha\beta} t_\beta, \quad C=\{c_{\alpha\beta}\} \tag{5.1}$$

в результате которого $f_2=t_1^2+t_2^2$, а матрица A станет диагональной. Для этого сначала найдем какое-нибудь преобразование $y_\alpha=d_{\alpha\beta}z_\beta$, переводящее f_2 в $z_1^2+z_2^2$ (если $h(x_1, x_2)$ – поверхность вращения радиуса R в вершине, то это преобразование делать не нужно). В результате матрица A перейдет в

$$A' = (D^{-1})^T A D^{-1}, \quad D=\{d_{\alpha\beta}\}$$

Далее возьмем ортогональное преобразование поворота

$$z_\alpha = e_{\alpha\beta} t_\beta, \quad E=\{e_{\alpha\beta}\}, \quad E^{-1}=E^T$$

такое, что матрица A'' станет диагональной:

$$A'' = EA'E^T = \mathrm{diag}(a_1, a_2)$$

Тогда преобразование (5.1) с матрицей $C=DE$ будет искомым, а уравнение (4.9) примет вид

$$a_1\frac{\partial^2 V}{\partial t_1^2} + a_2\frac{\partial^2 V}{\partial t_2^2} + \lambda_3 (n\pi)^2 (2\beta_2 - t_1^2 - t_2^2) V = 0 \tag{5.2}$$

Пусть сначала $a_1>0$, $a_2>0$. Тогда затухающие решения уравнения (5.2) являются произведениями функций параболического цилиндра

$$V^{(m_1, m_2)} = H_{m_1}(c_1t_1)H_{m_2}(c_2t_2)\exp[-{}^1/_2(c_1^2t_1^2+c_2^2t_2^2)]$$

$$m_1, m_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad c_\alpha = [\lambda_3(n\pi)^2 a_\alpha^{-1}]^{1/4} \tag{5.3}$$

причем

$$\beta_2=\beta_2^{(m_1,\,m_2)}=\frac{1}{n\pi}\left[\left(\frac{a_1}{\lambda_3}\right)^{1/2}\left(m_1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{a_2}{\lambda_3}\right)^{1/2}\left(m_2+\frac{1}{2}\right)\right]$$

где $H_m(x)$ — полиномы Эрмита степени m.

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, представим приближенное выражение для трехпараметрической серии частот, соответствующих локализованным формам колебаний,

$$\omega_{3n}^{(m_1,\,m_2)}=\frac{n\pi}{h_0}\left(\frac{\lambda_3}{\rho}\right)^{1/2}\left\{1+\frac{1}{n\pi}\left(\frac{h_0}{R}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{a_1}{\lambda_3}\right)^{1/2}\left(m_1+\frac{1}{2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{a_2}{\lambda_3}\right)^{1/2}\left(m_2+\frac{1}{2}\right)\right]+O\left(\frac{h_0}{R}\right)\right\}$$
$$n=1,\ 2,\ldots,\ m_1,\ m_2=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

и характерный масштаб r формы колебаний в тангенциальном направлении

$$r=\left[\frac{Rh_0^3}{\lambda_3(n\pi)^2}\max(a_1,a_2)\right]^{1/4}$$

При данном n наименьшая частота колебаний получается при $m_1=$ $=m_2=0$, причем полиномы $H_0(x)\equiv1$ в (5.3).

При построении старших приближений приходим к неоднородному уравнению, левая часть которого совпадает с (5.2), а в правой части стоит функция

$$Q(t_1,\ t_2)\exp[-{}^1/_2(c_1^2t_1^2+c_2^2t_2^2)]$$

При этом, как и в [8], для четных приближений четность степени полинома Q та же, что и четность степени m_1+m_2 полинома в (5.3). В связи с этим из условия существования затухающих решений для четных приближений находим β_k в (4.1). Для нечетных приближений $\beta_k=0$, что отмечено в (4.1).

Если хотя бы одно из чисел a_1, a_2 отрицательно или равно нулю, экспоненциально затухающих решений уравнения (5.2), а вместе с ним и системы (1.1) не существует. Следовательно, необходимым условием существования таких решений является положительная определенность матрицы A (см. (4.10)). Отметим, что в связи с наличием множителя $F_\gamma(0)$ элементы этой матрицы могут принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. В частности, ее положительная определенность обязательно нарушается в окрестностях тех внутренних резонансов (4.6), для которых четности чисел m и n различны. Положительная определенность матрицы A — это факт в известной мере случайный и зависит от упругих модулей E_{ijkl}, выбора одного из собственных значений λ_p матрицы E_{i3k3} и числа n полуволн по толщине пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по кварцевым резонаторам/Под ред. П. Г. Позднякова. М.: Связь, 1978. 287 с.
2. *Зеленка М.* Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах: Материалы, технология, конструкция, применение. М.: Мир, 1990. 584 с.
3. *Tiersten H. F.* Analysis of trapped energy resonators operating in overtones of coupled thickness shear and thickness twist // Acoust. Soc. Amer. 1976. 59. № 4. P. 879–888.
4. *Slavov S. H.* Modes of vibration, motion inductance and resonance interval circular convex AT-cut belled design trapped energy quartz resonators // Appl. Phys. 1986. A-40. P. 59–65.
5. *Каплунов Ю. Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменяемости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147–157.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Маслов В. П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
8. *Товстик П. Е.* К вопросу о локальной потере устойчивости оболочек // Вестн. ЛГУ. 1982. № 13. Вып. 3. С. 72–78.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
15.VII.1991