

УДК 539.3 : 534.1

© 1992 г. Б. В. Ермолаев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

Движение многозвенной антропоморфной модели описывается уравнением вынужденных поперечных колебаний одномерной стержневой системы с распределенными параметрами массы и изгибной жесткости и сосредоточенными включениями в эти параметры. Сосредоточенные включения вводятся в аналитическое выражение распределенных параметров при помощи импульсивных функций первого и более высоких порядков (дельта-функции и ее производных). Решение уравнения найдено операционным методом. Обобщенные функции А. Н. Крылова позволяют получить аналитическое решение уравнения, допускающее реализацию на ЭВМ, записанное сразу для всего многозвенника, в рамках прямой и обратной задач механики. В рамках прямой задачи механики решаются некоторые оптимизационные задачи для модели спортивного движения.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматривается механическая модель тела человека, совершающего колебательные движения, как одномерная стержневая система, параметры которой (плотность, момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной к плоскости колебаний, модуль упругости) соответствуют параметрам тела. Звенья соединены упругими шарнирами. Центры масс каждого из звеньев лежат на прямых, соединяющих центры вращений ближайших шарниров. Движение системы происходит в плоскости колебаний. Моделью служит движение спортсмена при метании копья.

В качестве математической модели процесса рассмотрим уравнение вынужденных поперечных колебаний стержневой системы с распределенными параметрами и сосредоточенными включениями в эти параметры. Впервые такая постановка задачи моделирования движений человека была предложена Ф. К. Агашиным [1].

Ограничимся моделированием сосредоточенных включений в распределенные параметры массы и изгибной жесткости стержня, имитирующей шарниры с упругими связями. Сосредоточенные включения вводятся в аналитическое выражение распределенных параметров при помощи дельта-функции и ее производных. Для моделирования процесса воспользуемся теорией обобщенных функций Шварца — Соболева [2–4].

Уравнение поперечных колебаний одномерной стержневой системы (при отсутствии продольных сил) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \chi \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right] + \\ & + m(x) \left[\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + \zeta \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right] = Q(x, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad t \in [t_0, t_1]$$

где $U(x, t)$ — уравнение упругой линии стержневой системы; $m(x)$, $EJ(x)$ — обобщенные функции, представляющие собой распределенные свойства и сосредоточенные включения в погонную массу стержня и жесткость на изгиб (E — модуль упругости, J — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси перпендикулярной к плоскости колебаний); $Q(x, t)$ — поперечная распределенная сила.

Ввиду того, что размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня, пренебрежем инерцией вращения системы. В рамках рассматриваемой задачи при низких частотах колебаний системы такая идеализация оправдана [5].

Линейное дифференциальное уравнение (1.1) с сингулярными коэффициентами описывает поперечные колебания моделируемой многозвенной стержневой системы. Оно учитывает внутренние силы трения, пропорциональные скорости изменения упругой восстанавливающей силы (гипотеза Фойхта) и внешние вязкие силы сопротивления, пропорциональные скорости поперечного перемещения точек стержневой системы [2, 3, 6].

Для удобства решения полагается, что интенсивность сил внешнего вязкого сопротивления пропорциональна погонной массе стержневой системы. Предположение, что погонная масса описывает конфигурацию системы, иногда оправданно [2, 3], например, в случае стержня прямоугольного сечения с постоянной величиной стороны поперечного сечения, параллельной плоскости колебаний. При этом, если имеются сосредоточенные массы, то к ним будут приложены сосредоточенные силы вязкого сопротивления, имеющие тот же коэффициент вязкости ζ .

Линейность сил сопротивления позволяет производить интегрирование уравнений движения сложных систем. Для ограниченных систем традиционно применяется колебательная трактовка решения уравнения — метод Бернулли. При этом любое движение рассматривается как сумма собственных колебаний системы.

Для неустановившихся режимов вынужденных колебаний, вызванных некоторыми динамическими источниками (силами), решение отыскивается путем представления в виде суммы некоторых стационарных состояний системы. Формы свободных колебаний для стержня с соответствующими параметрами и при определенных граничных условиях могут быть определены заранее, вне связи с конкретной нагрузкой в данной задаче.

На концах стержневой системы поставим следующие граничные условия:

$$\partial^2 U(0, t) / \partial x^2 = 0, \quad \partial^3 U(0, t) / \partial x^3 = 0$$

$$U(L, T) = 0, \quad \partial^2 U(L, t) / \partial x^2 = 0$$

($x=0$ — свободный конец, граничные условия для изгибающего момента и поперечной силы, $x=L$ — конец шарнирно оперт, граничные условия для прогиба и изгибающего момента).

Решение уравнения движения ищем в виде суммы

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) \quad (1.2)$$

где $X_k(x)$ — k -я собственная форма колебаний, $T_k(t)$ — коэффициент динамического увеличения k -й собственной формы колебаний, $k=1, 2, \dots$

Основанный на применении принципа суперпозиции, этот способ правомочен только для линейных систем и в принципе вносит некоторую погрешность при ограничении числа учитываемых членов.

Фундаментальные функции $X_k(x)$ строятся с учетом их ортогональности с весом $m(x)$, т. е.

$$\int_0^L m(x) X_k(x) X_n(x) dx = 0, \quad k \neq n$$

Это свойство позволяет использовать формы собственных колебаний в качестве ядра интегрального преобразования, позволяющего получить решение для неустановившихся режимов колебаний (нестационарная задача) в форме ряда по собственным функциям системы [2].

Интенсивность возмущающей нагрузки, как правило, также разлагается в ряд по фундаментальным функциям $X_k(x)$:

$$Q(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) m(x) X_k(x)$$

После разделения переменных уравнение (1.1) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(EJ(x) X_k''(x))'' - m(x) \nu_k^2 X_k(x) = 0$$

$$T_k''(t) + 2H_k T_k'(t) + \nu_k^2 T_k(t) = a_k(t), \quad H_k = 1/2(\zeta + \chi \nu_k^2) \quad (1.3)$$

где ν_k — собственная частота k -й формы колебаний, причем первое уравнение системы (1.3) описывает свободные колебания. Приходим к простой задаче об определении лишь масштаба рассматриваемых форм колебаний (т. е. темпа затухания колебаний), которая решается при учете рассеяния энергии. Такой подход, основанный на задании коэффициентов демпфирования применительно к собственным формам для системы без демпфирования, принят [5, 7, 8] и в литературе имеет название «демпфирование по формам колебаний».

2. Формальная схема построения главного решения. Рассмотрим решение первого уравнения системы (1.3) при условии сингулярности коэффициентов $m(x)$ и $EJ(x)$. Дельта-функция дает возможность перенести понятия погонной массы и изгибной жесткости на случай их дискретного распределения [2, 3, 9, 10].

Предположим, что к стержню постоянной погонной массы m_0 жестко прикреплено некоторое число сосредоточенных масс M_i в точках x_i ($i=1, 3, 5, \dots, 2n+1$). Распределенные свойства погонной массы, при постоян-

ной жесткости системы ($EJ(x) = EJ_0 = \text{const}$) выражаются уравнением

$$m(x) = m_0 + \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} M_i \sigma_1(x - x_i)$$

($\sigma_1(x) = \sigma_0'(x)$ — дельта-функция). Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.3) и используя непрерывность собственных форм колебаний, получаем

$$X_k^{\text{IV}}(x) - K_k^4 X_k(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \frac{M_i v_k^2}{EJ_0} X_k(x_i) \sigma_1(x - x_i) \quad (2.1)$$

$$K_k^4 = m_0 v_k^2 / (EJ_0)$$

Сосредоточенные включения в изгибную жесткость моделируют упругие шарнирные соединения звеньев стержневой системы в точках x_i ($i=2, 4, \dots, 2n$), т. е. в месте расположения шарниров нет сосредоточенных масс. Устойчивость стержневой системы обеспечивается тем, что все шарниры — упругие. При этом

$$X_k(x) = X_k^0(x) + \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1 + (-1)^i}{2} (X_k'(x_i - 0) - X_k'(x_i + 0)) \times \\ \times (x - x_i) \sigma_0(x - x_i) \quad (2.2)$$

где $X_k^0(x)$ — непрерывная функция по x , имеющая непрерывную первую производную, $X_k'(x_i - 0) - X_k'(x_i + 0) = \Delta X_k'(x_i)$ — взаимный угол поворота сечения справа и слева от шарнира, $(x - x_i) \sigma_0(x - x_i)$ — элементарный линейный сплайн (ломаная линия). Первое уравнение системы (1.3) запишется в виде системы

$$X_k''(x) = (J_0/J(x)) Z_k(x), \quad EJ_0 Z_k''(x) = m_0 v_k^2 X_k(x) \quad (2.3)$$

где $Z_k(x)$ — нормированный «масштабированный» изгибающий момент — непрерывная с производной функция ($Z_k(x) \in C^1([0, L])$), и его нельзя приложить в сечении $x = x_i$, а только выше или ниже шарнира. В случае упругого шарнира

$$Z_k(x_i - 0) = K_{M_i} (EJ_0)^{-1} \Delta X_k'(x_i)$$

где K_{M_i} — упругая постоянная шарнира.

Дифференцируя уравнение (2.2) дважды по x , подставляем результат в первое уравнение системы (2.3), и используя равенства $(X_k^0(x))'' = Z_k(x)$, $J(x) = J_0$ при $x \neq x_i$, получаем

$$\frac{J_0}{J(x)} = 1 + \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1 + (-1)^i}{2} \frac{EJ_0}{K_{M_i}} \sigma_1(x - x_i) \quad (2.4)$$

Используя это, находим окончательное выражение для уравнения свободных колебаний в случае импульсивных включений (2.4) в податливость

$$X_k^{\text{IV}}(x) - K_k^4 X_k(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1 + (-1)^i}{2} \frac{EJ_0}{K_{M_i}} Z_k(x_i - 0) \sigma_3(x - x_i) \quad (2.5)$$

Движение стержневой системы описывается линейными уравнениями, поэтому для написания общего уравнения свободных поперечных колебаний системы с распределенными параметрами массы и жесткости и сосредоточенными включениями в эти параметры воспользуемся методом наложения. Получаем

$$X_k^{IV}(x) - K_k^4 X_k(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[\frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \frac{M_i v_k^2}{EJ_0} X_k(x_i) \sigma_1(x - x_i) + \frac{1 + (-1)^i}{2} \frac{EJ_0}{K_{M_i}} Z_k(x_i - 0) \sigma_3(x - x_i) \right] \quad (2.6)$$

3. Характеристическое уравнение и его решение. Решение дифференциального уравнения (2.6) с постоянными коэффициентами и сингулярной правой частью найдем операционным методом. Каждый из членов, образующих левую и правую части дифференциального уравнения, преобразуются по формуле

$$\bar{X}_k(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} X_k(t) dt \quad (3.1)$$

к функциям нового переменного p , используя преобразование по Карсону — Хевисайду [11]. Дифференциальное уравнение (2.6) после преобразования становится алгебраическим. Промежуточные параметры $X_k(x_i)$ и $Z_k(x_i - 0)$, содержащиеся в решении уравнения, исключаются в общем виде при помощи некоторых рекуррентных соотношений. Итоговое решение уравнения свободных колебаний стержневой системы с сосредоточенными включениями в массу и изгибную жесткость стержня записывается в виде:

$$X_k(x) = \sum_{r=0}^3 X_k^{(r)}(0) \left\{ Y_r(x) + \sum_{i=1}^{2n+1} [A_{ir} Y_3(x - x_i) \sigma_0(x - x_i) + B_{ir} Y_1(x - x_i) \sigma_0(x - x_i)] \right\} \quad (3.2)$$

$$A_{ir} = \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \frac{M_i v_k^2}{EJ_0} \left\{ Y_r(x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} [A_{jr} Y_3(x_i - x_j) + B_{jr} Y_1(x_i - x_j)] \right\}$$

$$B_{ir} = \frac{1 + (-1)^i}{2} \frac{EJ_0}{K_{M_i}} \left\{ Y_r''(x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} [A_{jr} Y_1(x_i - x_j) + K_k^4 B_{jr} Y_3(x_i - x_j)] \right\}$$

$$A_{1r} = M_1 v_k^2 (EJ_0)^{-1} Y_r(x_1), \quad B_{1r} = 0$$

В конечном счете решение выразится только через начальные параметры и некоторые функции влияния — обобщенные функции Крылова [2, 3, 8]

$$Y_0(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} K_k x + \cos K_k x), \quad Y_2(x) = \frac{1}{2K_k^2} (\operatorname{ch} K_k x - \cos K_k x)$$

$$Y_1(x) = \frac{1}{2K_k} (\operatorname{sh} K_k x + \sin K_k x), \quad Y_3(x) = \frac{1}{2K_k^3} (\operatorname{sh} K_k x - \sin K_k x)$$

Переписывая граничные условия для собственных форм колебаний $X_k(x)$ и подставляя в (3.2), получим характеристическое уравнение для K_k . Решая это трансцендентное уравнение на компьютере, получаем собственные частоты поперечных колебаний системы и соответствующие им собственные формы колебаний.

4. Решение прямой задачи механики. Задача определения реакции системы на различные внешние нагрузки сводится к решению линейного дифференциального уравнения – второго уравнения системы (1.3). Решение находим, используя интеграл Дюамеля [3, 5, 9]

$$T_k(t) = (T_{k_0} \cos(\psi_k t) + \frac{T_{k_0}' + H_k T_{k_0}}{\psi_k} \sin(\psi_k t)) \exp(-H_k t) + \frac{1}{\psi_k} \int_0^t a_k(\tau) \exp(-H_k(t-\tau)) \sin(\psi_k(t-\tau)) d\tau, \quad \psi_k = (\nu_k^2 - H_k^2)^{1/2}$$

где $T_{k_0} = T_k(0)$, $T_{k_0}' = T_k'(0)$ – начальные условия.

При наличии в системе сил трения критическое затухание будет при $H_k = \nu_k$, и члены ряда, начиная с некоторого, будут описывать аperiodическое затухающее движение.

5. Основные приложения. Значения параметров системы выбирались по литературным данным. Экспериментальные данные о реальном движении спортсмена – финальная фаза метания копья – получены высокоскоростной киносъемкой.

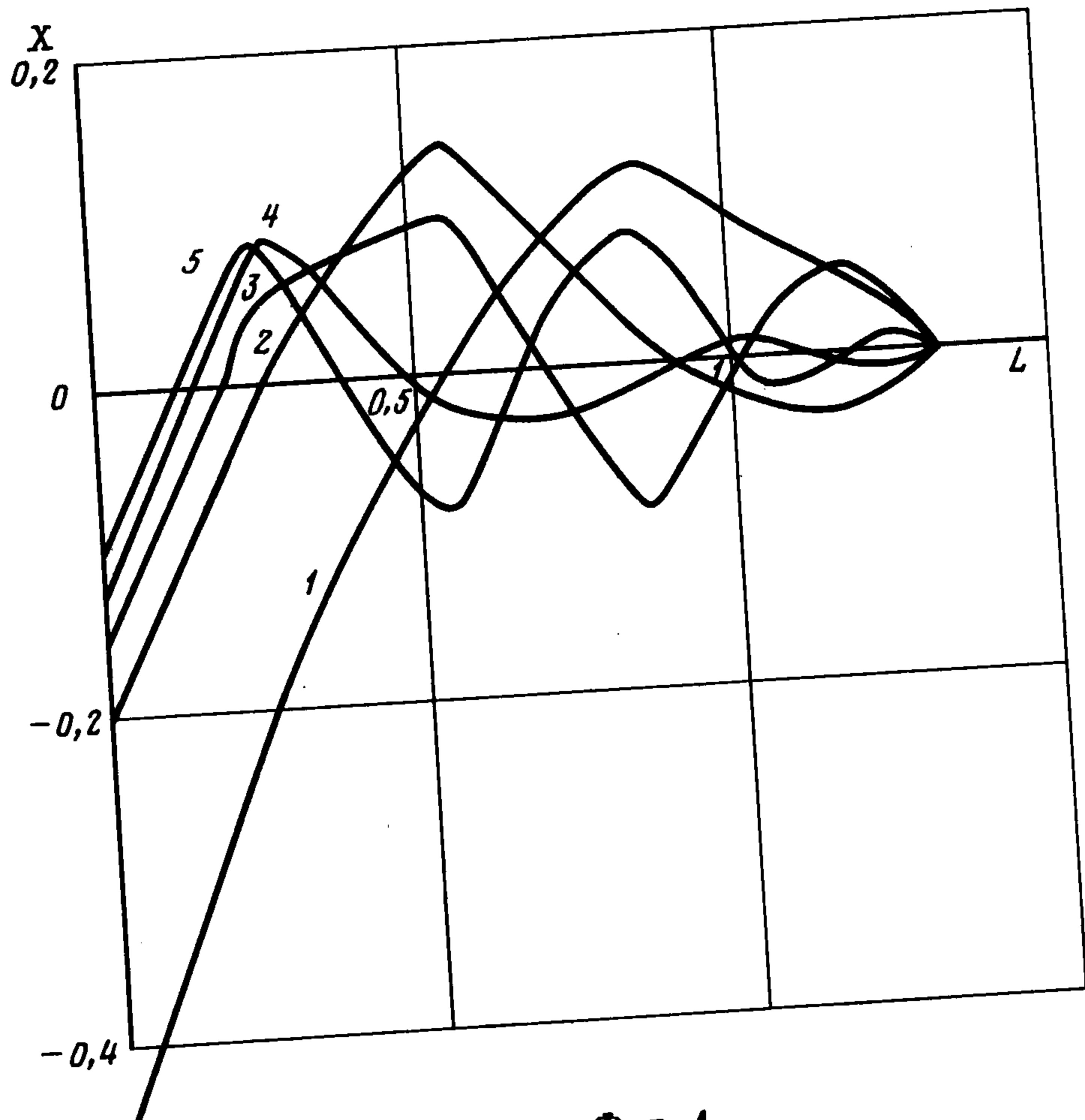
В приложениях особый интерес представляет решение обратной и прямой задач механики в замкнутой форме. Предложенная модель дает возможность аналитического решения уравнения сразу для всей системы, удобное для программирования на компьютере. Целевой функцией исследуемого процесса будем полагать скорость кисти с копьем в момент выпуска снаряда.

Моделировалось движение верхней части тела, соответственно задавались и исходные данные для уравнения. Подсчитаны пять первых собственных частот моделируемой кинематической цепи: 1,98; 6,86; 11,91; 19,37; 44,32 Гц. Соответствующие им формы колебаний системы приведены на фиг. 1 (они занумерованы в порядке возрастания частоты). Изгибная жесткость сегментов тела на несколько порядков превышает изгибную жесткость суставов, поэтому собственные формы колебаний близки к ломаной линии. Вынужденные колебания кинематической цепи – колебания под действием активных сил спортсмена.

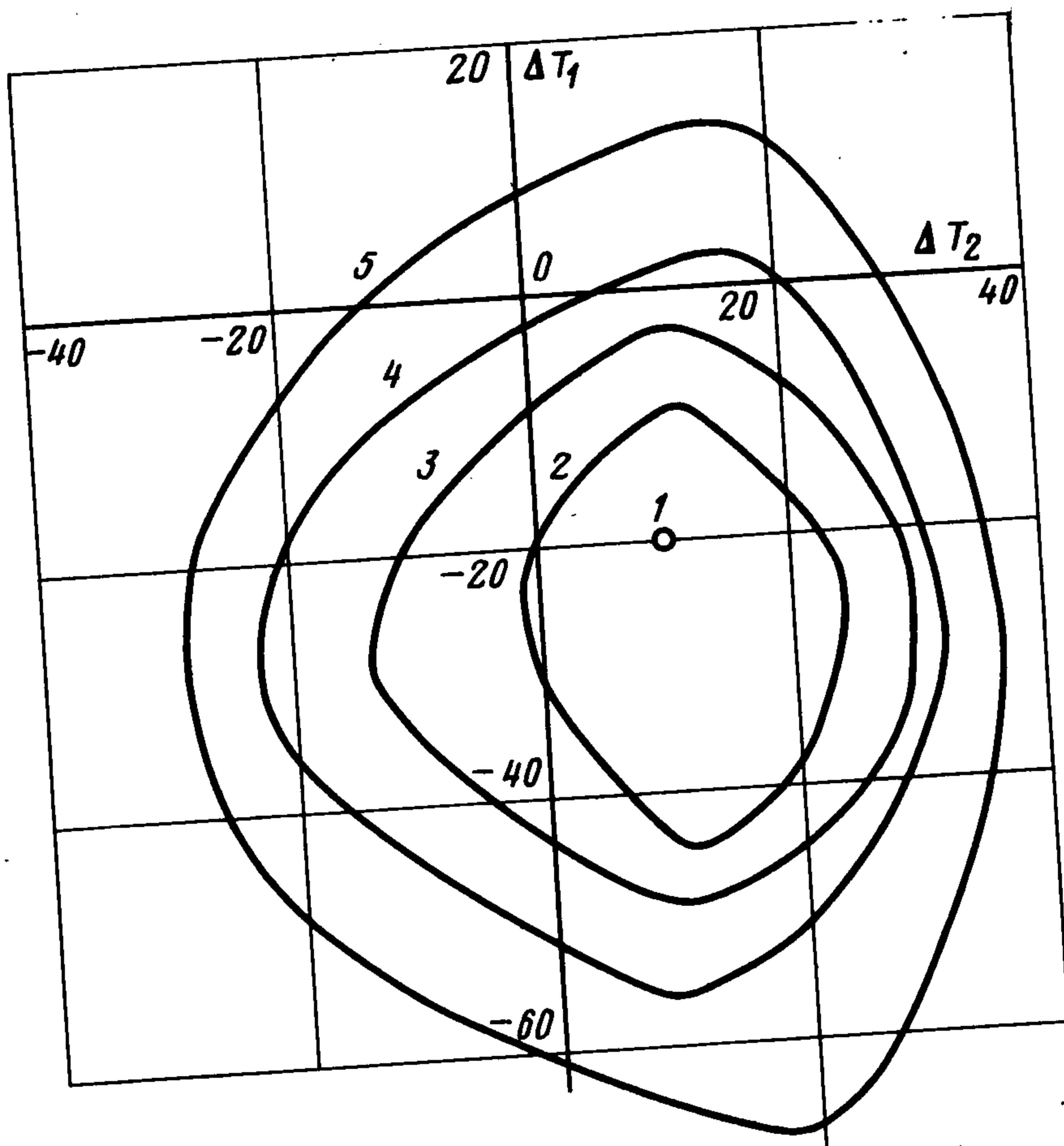
Практическое моделирование осуществляется в рамках прямой и обратной задач механики. Решение обратной задачи механики получаем, решив второе уравнение системы (1.3) относительно неизвестной $a_k(t)$, т. е. раскладывая движение по собственным формам. Численные значения коэффициентов динамического увеличения собственных форм колебаний $T_k(t)$ находим, используя ортогональность фундаментальных функций $X_k(x)$. Моделирование показало, что анализируемое движение строится на первых трех формах колебаний.

Представляет интерес возможность получения решения в рамках прямой задачи механики. В качестве примера рассматривалось управление структурой движения многозвенной системы. Критерием эффективности исследуемого колебательного движения является распределение времен достижения экстремумов управляющих моментов на сегментах тела человека [12]. Исследовалась оптимальность механизмов построения движения в конкретном исполнении. Проводилось совместное изменение во времени положения экстремумов управляющих (мышечных) сил на плече (ΔT_1) и туловище (ΔT_2).

На фиг. 2 (изотахические линии уровня занумерованы в порядке убывания скорости: 30,62; 30,5; 30,4; 30,2; 30,0 м/с) приведены результаты моделирования изме-



Фиг. 1



Фиг. 2

нения моментов приложения максимумов мышечных сил на плече и туловище (ходное движение соответствует нулевому положению на временной оси) и нахождения на этой основе глобального максимума скорости вылета копья. Таким образом, выясняется, что исходное колебательное движение метателя не является оптимальным (по критерию скорости).

Автор благодарит А. М. Формальского и Э. К. Лавровского за замечания при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агашин Ф. К. Биомеханика ударных движений. М.: Физкультура и спорт, 1977. 207 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
3. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. Киев: Наук. думка, 1974. 191 с.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
5. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
6. Кукин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 415 с.
7. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
8. Акуленко Л. Д. Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 596–607.
9. Ершова В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. Минск: Выш. шк., 1976. 255 с.
10. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
11. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 551 с.
12. Yermolayev B. V., Popov G. I. Mathematical modelling and experimental determination of wave processes in javelin throwing techniques // Proc. 12th Intern. Congr. of Biomech. Los Angeles, 1989. California: Univ. California, 1989. P. 429.

Москва

Поступила в редакцию
22.I.1994