Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Л. Д. Акуленко, Г. В. Костин

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Разработан регулярный метод возмущений (метод малого параметра) для исследования динамики слабо неоднородных тонких стержней с произвольными распределенными нагрузками и граничными условиями различных типов, приводящих к самосопряженным краевым задачам. Подход основан на введении возмущенного аргумента – переменной Эйлера и соответствующего представления собственных функций. Он позволяет проводить равномерные построения базиса и собственных значений, а также частот с произвольной требуемой точностью по малому параметру при помощи квадратур от известных функций. Для иллюстрации эффективности исследован и рассчитан пример шарнирно закрепленного на левом и свободного на правом концах неоднородных стержней коробчатого и кольцевого сечений, поперечные размеры которых линейно изменяются с координатой.

1. Постановка задачи. Рассматриваются управляемые плоские движения упругого стержня, испытывающего деформации поперечного изгиба; продольным растяжением пренебрегается. Считается, что нейтральная линия недеформированного стержня прямолинейна, а упругие отклонения малы, т. е. его движения могут быть описаны в рамках линейной теории тонких упругих стержней [1, 2]. Инерционные и жесткостные характеристики предполагаются постоянными во времени, а условия движения таковыми, что уравнение динамики для поперечных смещений (уравнение состояния) имеет вид

$$\rho(x)\ddot{u}=-(\sigma(x)u'')''+W(t,x),\quad u=u(t,x),$$
$$0<x<l,\quad t\in[0,T] \tag{1.1}$$

Здесь $u(t, x)$ – поперечное смещение нейтральной линии с эйлеровой координатой x в момент времени t; $W(t, x)$ – внешнее воздействие, известная достаточно гладкая функция для всех $x\in[0, l]$; l – длина стержня считается постоянной. Линейная плотность ρ и жесткость на изгиб σ предполагаются стационарными, т. е. независящими от t, достаточно гладкими функциями x, удовлетворяющими условиям

$$0<\rho_{\min}\leqslant\rho(x)\leqslant\rho_{\max}<\infty,\ 0<\sigma_{\min}\leqslant\sigma(x)\leqslant\sigma_{\max}<\infty,\ 0\leqslant x\leqslant l \tag{1.2}$$

где пределы изменения достаточно близки (см. ниже).

Краевые условия, т. е. значения функции $u(t, x)$ при $x=0$, $x=l$, принимаются стандартного вида, приводящего к самосопряженной краевой задаче [3, 4]. Считается, что имеют место следующие простейшие неоднородные условия для рассматриваемых значений времени t, $t\in[0, T]$.

1). Защемление (жесткая заделка) левого ($x=0$) или (и) правого

$(x=l)$ концов стержня

$$u(t,\ x)|_{x=0,\ l}=S_{0,\ l}(t),\ u'(t,\ x)|_{x=0,\ l}=K_{0,\ l}(t) \tag{1.3}$$

2). Свободный левый $(x=0)$ или (и) правый $(x=l)$ конец стержня

$$-[\sigma(x)u''(t,\ x)]|_{x=0,\ l}=M_{0,\ l}(t),$$
$$-[\sigma(x)u''(t,\ x)]'|_{x=0,\ l}=P_{0,\ l}(t) \tag{1.4}$$

3). Шарнирное закрепление левого $(x=0)$ или (и) правого $(x=l)$ конца стержня

$$u(t,\ x)|_{x=0,\ l}=S_{0,\ l}(t),\ -[\sigma(x)u''(t,\ x)]|_{x=0,\ l}=M_{0,\ l}(t) \tag{1.5}$$

4). Свободный с фиксацией касательной левый $(x=0)$ или (и) правый $(x=l)$ конец стержня

$$u'(t,\ x)|_{x=0,\ l}=K_{0,\ l}(t),\ -[\sigma(x)u''(t,\ x)]'|_{x=0,\ l}=P_{0,\ l}(t) \tag{1.6}$$

Механический смысл введенных в (1.3)–(1.6) достаточно гладких функций времени t $(t\in[0,\ T])$ ясен. Они характеризуют кинематические воздействия: $S_{0,\ l}(t)$ – заданное перемещение, $K_{0,\ l}(t)$ – заданное направление касательной, а также динамические воздействия: $M_{0,\ l}(t)$ – прилагаемый внешний момент сил, ортогональный нейтральной линии; $P_{0,\ l}(t)$ – внешняя перерезывающая сила, ортогональная этой линии. Указанные функции, так же как и распределенное внешнее воздействие $W(t,\ x)$ в (1.1), могут включать возмущающие и управляющие воздействия кинематического или силового характера [1, 2, 5]. Они считаются для простоты заданными, т. е. не зависящими от искомой неизвестной функции $u(t,\ x)$ и ее производных в точках $x=0,\ l$. Отметим, что на основе n видов краевых условий (1.3)–(1.6) на одном или обоих концах стержня можно составить $N=n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$ (в рассматриваемом случае $n=4$, $N=10$) видов краевых условий для всего стержня, т. е. 10 видов различных краевых задач. Поскольку стержень не однородный, то возможно n^2 различных решений. Каждая из соответствующих краевых задач является самосопряженной, что устанавливается непосредственно на основе определения [3, 4, 6, 7]. При внешних воздействиях определенного класса решения задач будут принадлежать соответствующему классу, если задать начальные условия. Последние берутся в стандартном виде при $t=0$:

$$u(0,\ x)=f^0(x),\ u^{\cdot}(0,\ x)=g^0(x) \tag{1.7}$$

Если ставится задача управления, то могут быть заданы также соответствующие терминальные условия при $t=T$:

$$u(T,\ x)=f^T(x),\ u^{\cdot}(T,\ x)=g^T(x) \tag{1.8}$$

Функции $f^{0,\ T}(x)$, $g^{0,\ T}(x)$ должны быть достаточно гладкими, точнее принадлежать определенному классу гладкости, чтобы существовало искомое решение $u(t,\ x)$ требуемого класса [3, 4].

Конструктивное решение поставленных задач строится методом разделения переменных (методом Фурье) в виде бесконечной суммы членов $u_n(t, x)=\Theta_n(t)X_n(x)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, т. е. ряда по ортогональной с весом $\rho(x)$ системе $\{X_n(x)\}$ собственных функций, обладающей свойством базиса. Краевые задачи на собственные значения и собственные функции, отвечающие соответствующим краевым условиям (1.1), (1.3)–(1.6) при $x=0$ или (и) $x=l$, имеют вид

$$(\sigma X'')''-\lambda^4\rho X=0,\ 0<x<l,\ \lambda=\text{const} \tag{1.9}$$

$$1)\ X=X'=0,\ 2)\ \sigma X''=(\sigma X'')'=0$$

$$3)\ X=\sigma X''=0,\ 4)\ X'=(\sigma X'')'=0\ (x=0,\ x=l)$$

При постоянных ρ, σ решения задачи (1.9) известны [1–3, 5]; собственные функции $X_n(x)$ находятся в виде комбинаций тригонометрических и гиперболических синусов и косинусов, а вещественные собственные значения λ_n как корни трансцендентных характеристических уравнений. При этом в силу свойств симметрии достаточно ограничиться значениями $X_n(x)$, λ_n для $n=0, 1, 2, \ldots$, т. е. не рассматривать $n=-1, -2, \ldots$.

В более общем случае неоднородного стержня, когда характеристики ρ и σ переменны по x, собственные значения и функции могут быть приближенно определены при помощи конструктивных алгоритмов метода возмущений, если $\rho(x)\approx\rho_0$, $\sigma(x)\approx\sigma_0$, где ρ_0, σ_0 — положительные постоянные. Для удобства применения разрабатываемого далее метода возмущений вводится малый числовой параметр ε, $0\leqslant\varepsilon\ll 1$, характеризующий эту близость. Учитывая (1.2), запишем тождественные соотношения

$$\rho(x)=\rho_0[1+\varepsilon\delta(x,\varepsilon)],\ \sigma(x)=\sigma_0[1+\varepsilon c(x,\varepsilon)] \tag{1.10}$$

$$\varepsilon\delta\equiv(\Delta\rho/\rho_0)(\rho-\rho_0)/\Delta\rho,\ \ \varepsilon c\equiv(\Delta\sigma/\sigma_0)(\sigma-\sigma_0)/\Delta\sigma$$

$$\Delta\rho=(\rho_{\max}-\rho_{\min})/2,\ \ \Delta\sigma=(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})/2$$

$$\rho_0=(\rho_{\max}+\rho_{\min})/2,\ \ \sigma_0=(\sigma_{\max}+\sigma_{\min})/2$$

Полагая, например, $\Delta\rho/\rho_0\sim\varepsilon$, $\Delta\sigma/\sigma_0\sim\varepsilon$, где ε — малый числовой параметр, $\varepsilon\in[0, \varepsilon_0]$, $0<\varepsilon_0\ll 1$, согласно (1.10) будем иметь ограничения $|\delta|\leqslant 1$, $|c|\leqslant 1$ для $x\in[0, l]$. В пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем самосопряженные краевые задачи с постоянными характеристиками стержня $\rho=\rho_0$, $\sigma=\sigma_0$, решения которых могут быть построены в виде квадратур на основе известных систем собственных значений $\{\lambda_n^{(0)}\}$ и функций $\{X_n^{(0)}\}$. В выражениях (1.10) можно положить $l=\rho_0=\sigma_0=1$. Это достигается заменами $x_*=x/l$, $\lambda_*=\lambda(\rho_0/\sigma_0)^{1/4}$ с последующим опусканием индекса $*$; функции X, δ, c преобразовываются к новому аргументу x_* и параметру λ_*. В результате получаем совокупность десяти самосопряженных краевых задач, содержащих один заданный параметр ε, $0<\varepsilon\ll 1$ (параметр $\lambda(\varepsilon)$ и функция $X(x, \varepsilon, \lambda)$ подлежат определению)

$$((1+\varepsilon c(x))X'')''-\lambda^4(1+\varepsilon\delta(x))X=0,\ 0<x<l \tag{1.11}$$

$$1)\ X=X'=0,\ 2)\ X''=((1+\varepsilon c(x))X'')'=0$$

$$3)\ X=X''=0,\ 4)\ X'=((1+\varepsilon c(x))X'')'=0\ (x=0,\ x=l)$$

При $\varepsilon=0$ (случай однородного стержня) решения краевых задач известны и изучены [1, 2, 4, 5]. На их основе строятся искомые решения $u^{(0)}(t, x)$ исходных задач Коши по t (1.1), (1.3)–(1.7). Для $\varepsilon>0$ возникает проблема существования решений требуемых классов гладкости и конструктивного их построения методами теории возмущений [7–9].

Итак, ставится задача построения системы собственных значений $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$ и полной ортогональной с весом $(1+\varepsilon\delta(x))$ системы функций $\{X_n(x, \varepsilon)\}$ с требуемой степенью точности по ε, равномерной относительно номера n, $|n|\to\infty$. Заметим (см. [10]), что непосредственная подстановка в (1.11) рядов для $\lambda_n(\varepsilon)$, $X_n(x, \varepsilon)$ по степеням ε:

$$\lambda_n(\varepsilon)=\lambda_n^{(0)}+\varepsilon\lambda_n^{(1)}+\ldots+\varepsilon^k\lambda_n^{(k)}+\ldots \tag{1.12}$$

$$X_n(x, \varepsilon)=X_n^{(0)}(x)+\varepsilon X_n^{(1)}(x)+\ldots+\varepsilon^k X_n^{(k)}(x)+\ldots$$

приводит к «вековым членам» вида $\varepsilon^p n^q$ (p, q — натуральные числа), что обусловлено выражением $\varepsilon\lambda^4\delta(x)X$, малость которого сомнительна при $\lambda\to\infty$. Данное обстоятельство неудовлетворительно в теоретическом и прикладном аспектах при использовании таких приближенных выражений в качестве базиса: с ростом номера n $(n\to\infty)$ абсолютная и относительная погрешности неограниченно возрастают. Рассматриваемый класс краевых задач существенно труднее для исследования, чем в случае дифференциального уравнения второго порядка по x, рассмотренном в [10]. Однако основные подходы [10], приводящие к регуляризации процесса построения функций $\{X_n(x, \varepsilon)\}$, могут быть применены в рассматриваемом случае. Предлагается конструктивный способ регуляризации возмущенных краевых задач. Ниже излагаются и обсуждаются алгоритмические аспекты проблемы и некоторые вопросы обоснования. С точки зрения функционального анализа требуется дополнительное обстоятельное изучение свойств приближенного базиса.

2. Преобразование независимой переменной. Предлагается способ, связанный с введением возмущенного аргумента y и параметра ν по формулам преобразований, близких к тождественным [10]. Для $y=y(x, \varepsilon)$ рассмотрим следующее выражение:

$$y=y(x, \varepsilon)=[x+\varepsilon\varphi(x, \varepsilon)]\,[1+\varepsilon\varphi(1, \varepsilon)]^{-1}=x+\varepsilon\xi(x, \varepsilon),$$

$$x=y+\varepsilon\eta(x, \varepsilon) \tag{2.1}$$

$$\varphi(0, \varepsilon)=\xi(0, \varepsilon)=\xi(1, \varepsilon)=\eta(0, \varepsilon)=\eta(1, \varepsilon)=0;$$

$$x\in[0, 1],\quad y\in[0, 1]$$

$$\varphi(x, \varepsilon)=\int_0^x\theta(z, \varepsilon)\,dz,\quad \theta=\theta(x, \varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{1+\varepsilon\delta(x)}{1+\varepsilon c(x)}\right)^{1/4}-1\right]=$$

$$=(\delta(x)-c(x))/4+O(\varepsilon)$$

Формулы (2.1) при $\varepsilon>0$, достаточно малом, определяют взаимнооднозначную связь между x и y, причем $y=x$ при $\varepsilon=0$. Вместо неизвестного пока параметра λ возьмем следующий:

$$\nu=\lambda(1+\varepsilon\varphi_1(\varepsilon)),\quad \varphi_1(\varepsilon)=\varphi(1, \varepsilon) \tag{2.2}$$

Искомая неизвестная функция X преобразуется к виду

$$X=X(x,\ \lambda,\ \varepsilon)\equiv Y(y,\ \nu,\ \varepsilon)=Y \tag{2.3}$$

Дифференциальное уравнение (1.11) для неизвестной функции Y записывается следующим образом:

$$Y^{IV}-\nu^4 Y=\varepsilon(AY'''+BY''+CY'),\ 0<y<1 \tag{2.4}$$

$$A=A(y,\varepsilon)\equiv-2\frac{1+\varepsilon\varphi_1}{1+\varepsilon\theta}\left[\frac{3\theta'}{1+\varepsilon\theta}+\frac{c'}{1+\varepsilon c}\right]\Bigg|_{x=y+\varepsilon\eta}$$

$$B=B(y,\varepsilon)\equiv-\left(\frac{1+\varepsilon\varphi_1}{1+\varepsilon\theta}\right)^2\left[\frac{4\theta'+3\varepsilon\theta'^2}{1+\varepsilon\theta}+\right.$$
$$\left.+\frac{6\varepsilon c'\theta'}{(1+\varepsilon\theta)(1+\varepsilon c)}+\frac{c''}{1+\varepsilon c}\right]\Bigg|_{x=y+\varepsilon\eta}$$

$$C=C(y,\varepsilon)\equiv-\frac{(1+\varepsilon\varphi_1)^3}{(1+\varepsilon\theta)^4}\left[\theta'''+\varepsilon\frac{2c'\theta''+c'\theta'}{1+\varepsilon\theta}\right]\Bigg|_{x=y+\varepsilon\eta}$$

$$\theta=\theta(x,\ \varepsilon),\ \ x=y+\varepsilon\eta,\ \ \eta=\eta(y,\ \varepsilon)$$

Уравнение (2.4) определено, если коэффициенты $\delta(x)$, $c(x)$ трижды непрерывно дифференцируемы для всех $x\in[0,\ 1]$. Заметим, что $A=B=C=0$, если δ и c постоянны для всех $x\in[0,\ 1]$. Краевые условия 1)–4) в (1.11) преобразуются с учетом связи между x и y на основе выражений для X, Y и их производных

$$\begin{gathered}
X(x,\ \lambda,\ \varepsilon)=Y(y,\ \nu,\ \varepsilon),\ \ x=y+\varepsilon\eta(y,\ \varepsilon)\\
y=x+\varepsilon\xi(x,\ \varepsilon)=(x+\varepsilon\varphi(x,\ \varepsilon))(1+\varepsilon\varphi(1,\ \varepsilon))^{-1}\\
\lambda=\nu(1+\varepsilon\varphi(1,\ \varepsilon))^{-1}\\
X'=Y'(1+\varepsilon\theta)(1+\varepsilon\varphi_1)^{-1}\\
X''=Y''(1+\varepsilon\theta)^2(1+\varepsilon\varphi_1)^{-2}+\varepsilon Y'\theta'(1+\varepsilon\varphi_1)^{-1}\\
X'''=Y'''(1+\varepsilon\theta)^3(1+\varepsilon\varphi_1)^{-3}+3\varepsilon Y''\theta'(1+\varepsilon\theta)(1+\varepsilon\varphi_1)^{-2}+\\
+\varepsilon Y'\theta''(1+\varepsilon\varphi_1)^{-1}
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь штрихи означают производные по собственному аргументу: $X'=dX/dx$, $\theta'=d\theta/dx$, $Y'=dY/dy$ и т.д. Поскольку $y=0$ при $x=0$ и $y=1$ при $x=1$, то при помощи (2.5) краевые условия (1.11) для X приводятся к соответствующим условиям для Y

$$\begin{gathered}
Y=0,\ Y'=0,\ Y''(1+\varepsilon\theta)^2(1+\varepsilon\varphi_1)^{-2}+\varepsilon Y'\theta'(1+\varepsilon\varphi_1)^{-1}=0\\
(1+\varepsilon c)\,[Y'''(1+\varepsilon\theta)^3(1+\varepsilon\varphi_1)^{-3}+3\varepsilon Y''\theta'(1+\varepsilon\theta)(1+\varepsilon\varphi_1)^{-2}+\\
+\varepsilon Y'\theta''(1+\varepsilon\varphi_1)^{-1}]+\varepsilon c'[Y''(1+\varepsilon\theta)^2(1+\varepsilon\varphi_1)^{-2}+\\
+\varepsilon Y'\theta'(1+\varepsilon\varphi_1)^{-1}]=0
\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$x=y=0\vee x=y=1$$

Таким образом, построена эквивалентная (1.11) возмущенная краевая задача (2.4)–(2.6) с переменными коэффициентами. Вначале требуется построить общее решение уравнения (2.4). Применение регулярных методов теории возмущений (разложений или последовательных приближений по степеням малого параметра) не приводит к вековым членам. Возмущенное дифференциальное уравнение (2.4) заменяется соответствующим дифференциально-интегральным. Для его решения предлагается следующая рекуррентная схема метода последовательных приближений, пригодная для всех вещественных значений параметра ν, $|\nu|<\infty$, вида:

$$Y=Y^{(0)}+\varepsilon L[Y],\ L=I*D,\ Y^{(p+1)}(y,\nu,\varepsilon)= \\ =Y^{(0)}(y,\ \nu)+\varepsilon L[Y^{(p)}] \tag{2.7}$$

$$Y^{(0)}(y,\nu)=\sum_{i=0}^{3}c_i\Phi_i(y,\nu),\quad \Phi_{0,2}(y,\nu)=(\operatorname{ch}\nu y\pm\cos\nu y)/(\operatorname{ch}\nu\pm\cos\nu)$$

$$\Phi_{1,3}(y,\ \nu)=(\operatorname{sh}\nu y\pm\sin\nu y)/(\operatorname{sh}\nu\pm\sin\nu),$$

$$y\in[0,\ 1],\ p=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Здесь $Y^{(0)}(y,\ \nu)$ – известное общее решение невозмущенного (порождающее решение) уравнения для (2.4) (при $\varepsilon=0$); c_i, $i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ – произвольные постоянные. Его представление в форме (2.7) взято для удобства предельного перехода при $\nu\to0$ и ограниченности при $\nu\to\infty$. При $\nu\to0$ функция $Y^{(0)}$ переходит в полином третьего порядка по y, поскольку $\Phi_i(y,\ 0)=y^i$; итак $Y^{(0)}(y,\ 0)=c_0+c_1y+c_2y^2+c_3y^3$. Для всех вещественных ν функции Φ_i равномерно ограниченны, поскольку $0\leqslant y\leqslant1$; более того, $\Phi_i\to0$ при $|\nu|\to\infty$ для $0\leqslant y<1$. Оператор L в (2.7) дифференциально-интегральный и представляет собой последовательную композицию дифференциального по y оператора D третьего порядка и интегрального (по y) оператора I типа Вольтерры с разностным ядром. Оператор D определен на множестве трижды непрерывно дифференцируемых функций Y:

$$F=F(y,\ \varepsilon)=D[Y]=D(y,\ \varepsilon)[Y],\ y\in[0,\ 1] \tag{2.8}$$

$$D(y,\varepsilon)=A(y,\varepsilon)\frac{d^3}{dy^3}+B(y,\varepsilon)\frac{d^2}{dy^2}+C(y,\varepsilon)\frac{d}{dy}$$

При этом элементы F образуют множество непрерывных функций, к которым затем применяется интегральный оператор I:

$$Z=I[F]=I(y,\nu)[F]=\int_0^y G(y-z,\nu)F(z,\varepsilon)\,dz \tag{2.9}$$

$$G(y,\ \nu)=(\operatorname{sh}\nu y-\sin\nu y)/2\nu^3,\ y\in[0,\ 1],\ |\nu|<\infty,\ G\approx y^3/3!,\ (y\nu)\to0$$

$$G(0,\ \nu)=G'(0,\ \nu)=G''(0,\ \nu)=0,\ G'''(0,\ \nu)=1$$

Элементы Z образуют множество четырежды непрерывно дифференцируемых функций. Разностное ядро G обладает свойством сглаживания четвертого порядка. Поскольку Φ_i – аналитические функции y для всех вещественных ν, $|\nu|<\infty$, то рекуррентная схема (2.7) определена. Заметим, что применение оператора D к функциям $Y^{(0)}(y,\ \nu)$, $Y^{(1)}(y,\ \nu,\ \varepsilon),\ldots$

$\ldots, Y^{(p)}(y, \nu, \varepsilon), \ldots$ приводит к множителям порядка ν^3 при $|\nu| \to \infty$, которые при применении оператора I ($\|I\| \sim |\operatorname{sh} \nu y| \nu^{-3}$) сокращаются. Важно отметить, что применение оператора I (2.9) согласно процедуре (2.7) не приводит к экспоненциальному росту приближений $Y^{(p)}(y, \nu, \varepsilon)$ при $|\nu| \to \infty$, т. е. функции $Y^{(p)}$ оказываются равномерно относительно ν, $|\nu| < \infty$, ограниченными по y, $y \in [0, 1]$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало. Действительно, на p-м шаге главный член экспоненциальной асимптотики по ν под интегралом имеет вид

$$|\operatorname{sh} \nu(y-z_0) \operatorname{sh} \nu(z_0-z_1) \ldots \operatorname{sh} \nu(z_{q-1}-z_q) \operatorname{ch} \nu z_q / \operatorname{ch} \nu| \tag{2.10}$$

$$1 \geqslant y \geqslant z_0 \geqslant z_1 \geqslant \ldots \geqslant z_{q-1} \geqslant z_q \geqslant 0, \quad q=0, 1, \ldots, p$$

или аналогичен этому выражению. Множители при этом члене — равномерно ограниченные функции от $z_0, z_1, \ldots, z_p$ и параметров ν, ε. Анализ показателей выражений типа (2.10) приводит к следующим величинам:

$$|\pm\nu(y-z_0) \pm \nu(z_0-z_1) \pm \ldots \pm \nu(z_{q-1}-z_q) \pm \nu z_q| - |\nu|$$

Здесь знаки $\pm$ перед каждым слагаемым независимы. В результате получается 2^{q+1} выражений для первого члена под знаком модуля. Максимальное значение первого модуля $|\nu| y$ достигается при $z_k = z_{k-1}$; отсюда находим, что $|\nu| y - |\nu| \leqslant 0$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$, т. е. $Y^{(p)} \to 0$ по $|\nu|$ экспоненциально при $y < 1$: $|Y^{(p)}| \sim \exp(-|\nu|(1-y))$ и лишь при $y=1$ функции $Y = O(1)$ при $\nu \to \infty$.

Итак, рассмотрим рекуррентную процедуру (2.7). В силу линейности оператора L имеем

$$Y^{(p+1)} = Y^{(0)} + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon^i L^i [Y^{(0)}], \quad L^{i+1}[Y] \equiv L[L^i[Y]], \quad L^0 = E, L^0[Y] \equiv Y \tag{2.11}$$

При $\varepsilon < 0$ достаточно малом оператор εL является сжимающим. На основе теоремы Банаха [6] устанавливается, что уравнение (2.7) имеет единственное решение, которое получается как предел последовательности (2.11)

$$\lim_{p \to \infty} Y^{(p+1)} = Y^* = Y^{(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i L^i [Y^{(0)}] = (E - \varepsilon L)^{-1} [Y^{(0)}] \tag{2.12}$$

При $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \|L\|^{-1}$, где норма $\|L\|$ ограниченного оператора L конструктивно выражается в терминах коэффициентов A, B, C и ядра G, оператор εL является сжимающим, и последовательные приближения (2.11) равномерно сходятся к искомому решению (2.12) уравнений (2.7) и (2.4).

Заметим, что при условии четырехкратной дифференцируемости коэффициентов θ и c (см. выражения (2.4) для A, B, C) путем интегрирования по частям с учетом свойств функции ядра G (2.9) уравнение (2.7) приводится к интегральному виду, члены которого, однако, не будут удовлетворять условию равномерной ограниченности по ν. При построении искомого решения Y в первом приближении по ε (с погрешностью $O(\varepsilon^2)$) достаточно ограничиться выражением для оператора D (2.8) при $\varepsilon=0$, т. е. взять

$$D(y, 0)[Y^{(0)}] = [-2(3\theta'+c')Y^{(0)'''} - \\ -(4\theta''+c'')Y^{(0)''} - \theta'''Y^{(0)'}]|_{x=y} \qquad (2.13)$$

где $Y^{(0)}$ — известная функция с точностью до выбора коэффициентов c_i. Таким образом, для искомых функций $Y^{(p)}(y, \nu, \varepsilon)$ на каждом p-м шаге и предельной функции $Y^*(y, \nu, \varepsilon)$ получаются явные выражения

$$Y^{(p)}(y, \nu, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{3} c_i\Phi_i^{(p)}(y, \nu), \quad Y^*(y, \nu, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{3} c_i\Phi_i^*(y, \nu) \qquad (2.14)$$

$$\Phi_i^*(y, \nu, \varepsilon) = \lim_{p\to\infty} \Phi_i^{(p)}(y, \nu, \varepsilon), \quad \Phi_i^{(p)}(y, \nu, 0) = \Phi_i^*(y, \nu, 0) = \Phi_i(y, \nu)$$

$$Y^{(p)}(y, \nu, 0) = Y^*(y, \nu, 0) = Y^{(0)}(y, \nu)$$

Заметим, что функции $Y^{(p)}$, Y^* являются дифференцируемыми по ν и ε; дифференцирование по y приводит к множителю $O(\nu^k)$, где k — порядок производной, поскольку зависимость от y осуществляется в виде произведения νy.

Вследствие аналитичности операторов D и L относительно параметра ε при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ искомое решение $Y^{(p)}$ (приближенное с погрешностью $O(\varepsilon^{p+1})$) или Y^* (предельное при $p\to\infty$) могут быть представлены в виде конечной суммы или равномерно сходящегося ряда соответственно по степеням ε:

$$Y^{(p)} = Y^{(0)} + \sum_{l=1}^{p} \varepsilon^l Y_l, \quad (p\geqslant 1), \quad Y^* = Y^{(0)} + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l Y_l \qquad (2.15)$$

$$Y_1 = L_1Y^{(0)}, \; Y_2 = L_2Y^{(0)} + L_1Y_1, \ldots, \; Y_p = L_pY^{(0)} + L_{p-1}Y_1 + \ldots + L_1Y_{p-1}$$

$$\varepsilon L(y, \nu, \varepsilon) = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l L_l(y, \nu)$$

$$\varepsilon D(y, \varepsilon) = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l D_l(y) = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \left[A_l(y)\frac{d^3}{dy^3} + B_l(y)\frac{d^2}{dy^2} + C_l(y)\frac{d}{dy}\right]$$

Здесь $A_l(y)$, $B_l(y)$, $C_l(y)$ — коэффициенты разложений функций $A(y, \varepsilon)$, $B(y, \varepsilon)$, $C(y, \varepsilon)$ в ряды Тейлора по степеням ε. Аналитические вычисления по формулам (2.15) могут оказаться существенно проще, чем с помощью рекуррентной схемы (2.7) или (2.11), которая в конкретных случаях обычно предпочтительнее при численных расчетах. Подстановка функций $Y^{(p)}$, Y^* в краевые условия (2.6) с учетом (1.11) приводит к трансцендентному вековому (характеристическому) уравнению относительно неизвестного параметра ν

$$\Delta^{(p)}(\nu, \varepsilon) \equiv \Delta^{(0)}(\nu) + \varepsilon\Gamma^{(p-1)}(\nu, \varepsilon) = 0, \quad \Gamma^{(-1)} \equiv 0 \qquad (2.16)$$

$$\Delta^*(\nu, \varepsilon) \equiv \Delta^{(0)}(\nu) + \varepsilon\Gamma^*(\nu, \varepsilon) = 0, \quad \Delta^* = \lim_{p\to\infty} \Delta^{(p)}$$

Искомое решение, приближенное и предельное («точное»), уравнений (2.16) строится на основе рекуррентной процедуры вида

$$\Delta^{(0)}(\nu_n^{(l)})=-\varepsilon\Gamma^{(p-l)}(\nu_n^{(l-1)},\ \varepsilon),\ l=0,\ 1,\dots,p \tag{2.17}$$

$$\Delta^{(0)}(\nu_n^{(l)})=-\varepsilon\Gamma^*(\nu_n^{(l-1)},\ \varepsilon),\ l=0,\ 1,\ 2,\dots$$

$$\nu_n^{(0)}=\arg\Delta^{(0)}(\nu),\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots,\ |\nu_n^{(p)}(\varepsilon)-\nu_n^{(0)}|\leqslant c\varepsilon$$

$$|\nu_n^*(\varepsilon)-\nu_n^{(0)}|\leqslant c\varepsilon,\ \ |\nu_n^*(\varepsilon)-\nu_n^{(p)}|\leqslant c\varepsilon^p$$

Здесь $\{\nu_n^{(0)}\}$ — счетное множество собственных значений невозмущенной краевой задачи (при $\varepsilon=0$), которое считается известным.

Аналогично $Y^{(p)}$, Y^* в виде суммы и ряда по степеням ε могут быть представлены выражения для характеристических определителей $\Delta^{(p)}$, Δ^* и собственных значений $\nu_n^{(p)}$, ν_n^* краевой задачи. После определения $\{\Delta^{(p)}(\varepsilon)\}$, $\{\Delta^*(\varepsilon)\}$ и подстановки в выражения (2.9) или (2.12) получаются искомые системы приближенных $\{Y_n^{(p)}\}=\{X_n^{(p)}\}$ или предельных $\{Y_n^*\}=\{X_n^*\}$ $(y=x+\varepsilon\xi)$ собственных функций возмущенной краевой задачи. Они обладают свойствами ортогонального базиса с соответствующим весом

$$(Y_n^{(p)}, Y_m^{(p)})_\mu=(X_n^{(p)}, X_m^{(p)})_\chi=\|Y_n^{(p)}\|_\mu^2\delta_{nm}+O(\varepsilon^{p+1})=\|X_n^{(p)}\|_\chi^2\delta_{nm}+O(\varepsilon^{p+1}) \tag{2.18}$$

$$(Y_n^*, Y_m^*)_\mu=(X_n^*, X_m^*)_\chi=\|Y_n^*\|_\mu^2\delta_{nm}=\|X_n^2\|_\chi^2\delta_{nm}$$

$$\mu=\mu(y,\ \varepsilon)=1+\varepsilon\delta(y+\varepsilon\eta(y,\ \varepsilon)),\ \chi=\chi(x,\ \varepsilon)=1+\varepsilon\delta(x),\ \mu dy=\chi dx$$

где $(\cdot,\ \cdot)_{\mu,\chi}$ означает скалярное произведение (интеграл соответственно по x, $y\in[0,\ 1]$ с весом μ, χ), $\|\cdot\|_{\mu,\chi}$ — нормы с весом. Отметим, что в случае свободного стержня, т. е. краевых условий 2) в (1.11) на обоих концах, имеет место двукратное нулевое собственное значение $(\lambda=\nu=0)$, которому отвечают две (неортогональные) собственные функции; они могут быть ортогонализированы с весом χ, μ соответственно.

3. Решение задачи об управляемом движении упругого стержня. На основе построенных с заданной степенью точности по малому параметру ε систем собственных значений $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$, $\lambda_n=\nu_n/(1+\varepsilon\varphi_1)$ и ортонормированных собственных функций $\{X_n(x,\ \varepsilon)\}$, $X_n(x,\ \varepsilon)\equiv Y_n(y(x,\ \varepsilon),\ \varepsilon)$ при помощи метода Фурье и подхода Г. Ф. Гринберга [11] решения краевых задач (1.1), (1.3)—(1.6) с начальными условиями (1.7) сводятся к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n(t)X_n(x),\quad \theta_n^{\cdot\cdot}+\lambda_n^4\theta_n=W_n(t)+[-((1+\varepsilon c)u'')'X_n+$$
$$+(1+\varepsilon c)(u''X'-u'X'')+u((1+\varepsilon c)X'')']_{x=0}^{x=1}\equiv Q_n(t) \tag{3.1}$$

$$\theta_n=(u,\ X_n)_\chi,\ \ W_n=(W,\ X_n)_\chi$$

$$\theta_n(0)=f_n^0=(f^0,\ X_n)_\chi,\ \ \theta_n^{\cdot}(0)=g_n^0=(g^0,\ X_n)_\chi$$

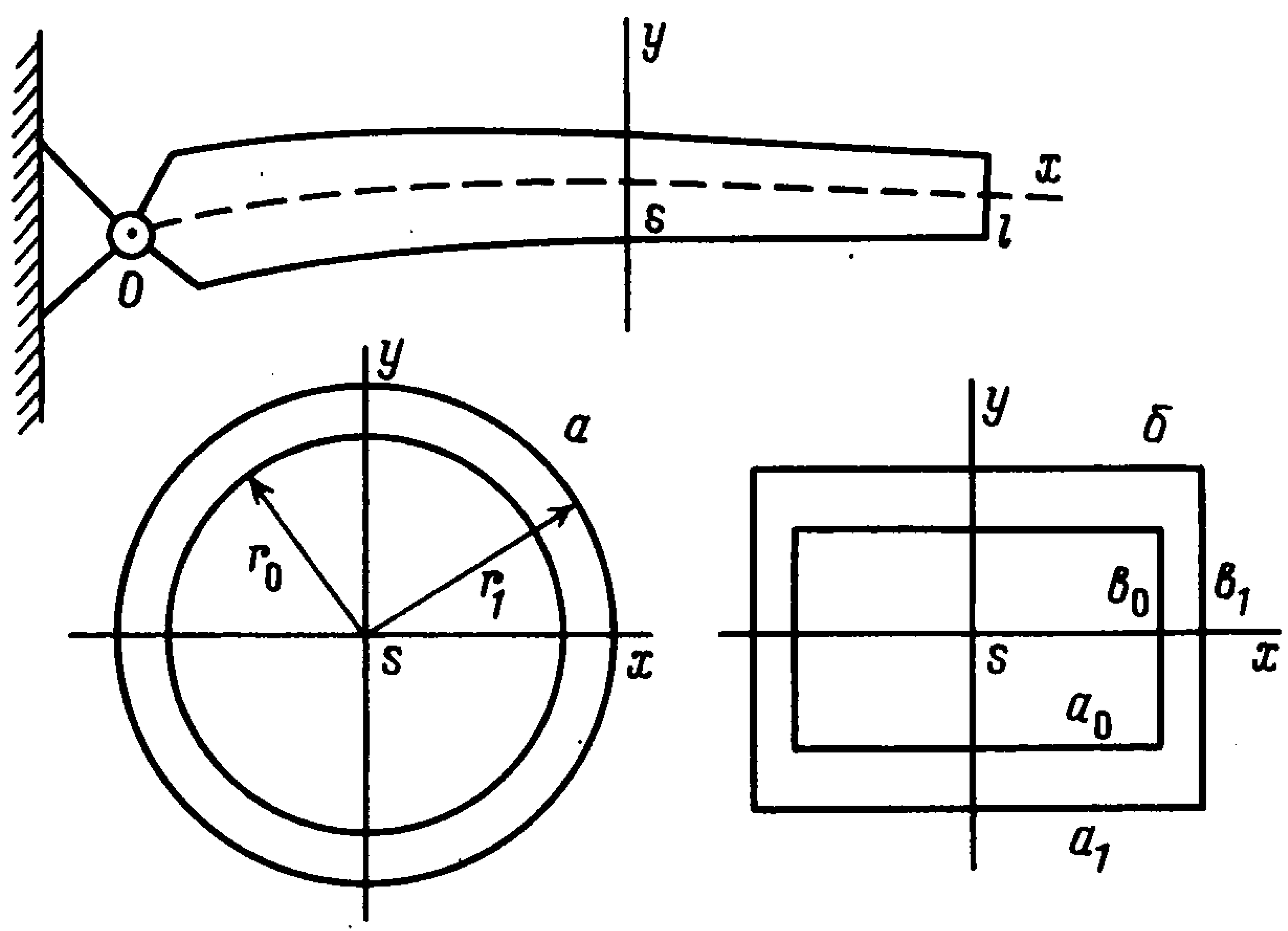
(зависимость функций u, X_n, θ_n и др. от параметра ε не указана для сокращения записи). При учете краевых условий (1.3)—(1.6) для $u(t,\ x)$

и (1.11) для $X_n(x)$ при заданных функциях $S_{0,1}(t)$, $K_{0,1}(t)$, $M_{0,1}(t)$, $P_{0,1}(t)$ получаем 10 видов известных правых частей $Q_n(t)=Q_n^{(j,i)}(t)=Q_n^{(i,j)}(t)$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$, для счетной системы (3.1). Каждая задача Коши элементарно разрешается

$$\theta_n^{(i,j)}=f_n^0\cos\lambda_n^2t+g_n^0\lambda_n^{-2}\sin\lambda_n^2t+\lambda_n^{-2}\int_0^t\sin\lambda_n^2(t-\tau)\,Q_n^{(i,j)}(\tau)\,d\tau \qquad (3.2)$$

Если имеет место задача управления, т. е. при $t=T$ заданы условия (1.8), то управляющие функции $Q_n^{(i,j)}$ из некоторого допустимого класса должны быть выбраны таким образом, чтобы $\theta_n(T)=f_n^T$, $\theta_n^{\cdot}(T)=g_n^T$. Вопросы существования решения задачи управления и его конструктивного построения весьма непросты и заслуживают отдельного изучения; им посвящена значительная литература (см. например [12–19] и др.).

4. Нахождение собственных функций и собственных значений в первом приближении для неоднородного стержня с шарнирным закреплением. Предположим, что стержень имеет кольцевое или прямоугольное сечение (фигура). Пусть r_0 – внутренний радиус, а r_1 – внешний или a_0,



b_0 – размеры внутреннего прямоугольника, а a_1, b_1 – внешнего. Если объемная плотность ρ_V и модуль Юнга E постоянны, то для линейной плотности и жесткости на изгиб получаем соответствующие выражения [1, 2, 5]

$$\rho(x)=\rho_VS(x),\quad \sigma(x)=EI(x) \qquad (4.1)$$

где S – площадь поперечного сечения в точке x, а I – момент инерции относительно одной из главных осей. В случае кольцевого сечения (фигура, а) для S и I получим

$$S(x)=\pi(r_1^2(x)-r_0^2(x)),\quad I(x)={}^1/_4\pi(r_1^4(x)-r_0^4(x)) \qquad (4.2)$$

Для прямоугольного сечения (фигура, б) имеем

$$S(x)=a_1(x)b_1(x)-a_0(x)b_0(x),$$
$$I_y(x)=(a_1(x)b_1^3(x)-a_0(x)b_0^3(x))/12 \qquad (4.3)$$

(I_y – момент относительно оси y).

Если ограничиться (в случае малого изменения параметров) только линейными членами в разложении по степеням ε, а также предположить, что размеры сечения стержня линейно зависят от x, то для кольцевого и прямоугольного сечения соответственно получим на основе (4.1)–(4.3) следующие приближенные выражения:

$$\rho(x)=\rho_0(1+\varepsilon\delta x)+O(\varepsilon^2),\ \sigma(x)=\sigma_0(1+\varepsilon cx)+O(\varepsilon^2) \tag{4.4}$$

$$r_{0,1}(x)=r^0_{0,1}+\varepsilon r^1_{0,1}x,\quad \rho_0=\pi\rho_V(r_1^{02}-r_0^{02}),\quad \sigma_0={}^1/_4\pi E(r_1^{04}-r_0^{04})$$

$$\delta=2\pi\rho_V(r_1^1r_1^0-r_0^1r_0^0)/\rho_0,\quad c=\pi E(r_1^1r_1^{03}-r_0^1r_0^{03})/\sigma_0$$

$$a_{0,1}(x)=a^0_{0,1}+\varepsilon a^1_{0,1}x,\quad b_{0,1}(x)=b^0_{0,1}+\varepsilon b^1_{0,1}x,\quad \rho_0=\rho_V(a_1^0b_1^0-a_0^0b_0^0)$$

$$\sigma_0=E(a_1^0b_1^{03}-a_0^0b_0^{03})/12,\ \delta=\rho_V(a_1^0b_1^1-a_0^0b_0^1+a_1^1b_1^0-a_0^1b_0^0)/\rho_0$$

$$c=E(3a_1^0b_1^{02}b_1^1-3a_0^0b_0^{02}b_0^1+a_1^1b_1^{03}-a_0^1b_0^{03})/(12\sigma_0)$$

Уравнение для собственных функций X (1.11) перейдет в следующее:

$$((1+\varepsilon cx+O(\varepsilon^2))X'')''-\lambda^4(1+\varepsilon\delta x+O(\varepsilon^2))X=0,\ 0<x<l \tag{4.5}$$

Связь между y и x, ν и λ примет более простой вид

$$y=x+\varepsilon(\delta-c)x(x-1)/8+O(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

$$x=y+\varepsilon(\delta-c)y(1-y)/8+O(\varepsilon^2),\ \nu=\lambda(1+\varepsilon\varphi_1),\ \varphi_1=(\delta-c)/8$$

Далее, в уравнении для Y не учитываются члены порядка ε^2.

В первом приближении после преобразований из (2.4) получаем

$$Y^{IV}-\nu^4Y=\varepsilon AY''',\ A=-(c+3\delta)/2 \tag{4.7}$$

Найдем решение для возмущенной задачи в линейном приближении для шарнирно закрепленного левого и свободного правого концов слабо неоднородного стержня. Граничные условия для невозмущенной задачи Коши (4.7) запишутся следующим образом:

$$Y|_{y=0}=Y''|_{y=0,1}=Y'''|_{y=1}=0 \tag{4.8}$$

Решение такой задачи известно и имеет вид

$$Y_j^0(y,\nu)=\sum_{i=0}^{3}k_i\Phi_i(y,\nu_j),\quad k_0=k_2=0,\quad k_3=-k_1\frac{\varkappa_+}{\varkappa_-} \tag{4.9}$$

$$\varkappa_\pm=(\operatorname{sh}\nu\pm\sin\nu)(\operatorname{ch}\nu\pm\cos\nu)$$

где Φ_i – функции, определенные в (2.7), а ν_j находится из известного трансцендентного уравнения

$$\operatorname{sh}\nu\cos\nu=\operatorname{ch}\nu\sin\nu\quad(\operatorname{th}\nu=\operatorname{tg}\nu) \tag{4.10}$$

$$\nu_0=0,\ \nu_{\pm1}=\pm3{,}927,\ \nu_{\pm2}=\pm7{,}069,\dots,\nu_{\pm n}=\pm\pi/4\pm\pi n+O(e^{-2|n|\pi})$$

Можно показать, что решение первого приближения возмущенной задачи (4.7) для произвольных граничных условий имеет вид

$$Y(y, \nu) = \sum_{i=0}^{3} k_i^* \Phi_i(y, \nu)\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} Ay\right) \tag{4.11}$$

Краевые условия (2.6) для возмущенной задачи (шарнирное закрепление) запишутся в форме

$$Y|_{y=0}=0, \ [Y''(1+2\varepsilon(\theta-\varphi_1))+\varepsilon\theta' Y']|_{y=0,1}=0 \tag{4.12}$$

$$[Y'''(1+3\varepsilon(\theta-\varphi_1))+3\varepsilon\theta' Y'']|_{y=1}=0$$

где из (2.1) следует, что $\theta=(\delta-c)/4$. После преобразований (4.12) с учетом (2.2) находим, что

$$Y|_{y=0}=0, \ [Y''+\varepsilon(\delta-c)(Y'-Y'')/4]|_{y=0}=0 \tag{4.13}$$

$$[Y''+\varepsilon(\delta-c)(Y'+Y'')/4]|_{y=1}=0,$$

$$[Y'''+3\varepsilon(\delta-c)(Y''+Y'''/2)/4]|_{y=1}=0$$

Из (4.11) выводятся следующие соотношения для производных Y по y:

$$Y' = \sum_{i=0}^{3} k_i^* \left(\Phi_i'\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} Ay\right) + \frac{\varepsilon}{4} A\Phi_i\right),$$

$$Y'' = \sum_{i=0}^{3} k_i^* \left(\Phi_i''\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} Ay\right) + \frac{\varepsilon}{2} A\Phi_i'\right)$$

$$Y''' = \sum_{i=0}^{3} k_i^* \left(\Phi_i'''\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} Ay\right) + \frac{3\varepsilon}{4} A\Phi_i''\right) \tag{4.14}$$

Из первого условия (4.13) следует, что $k_0^*=0$. Подставляя значения Y и его производных из (4.11), (4.14) в (4.13) и учитывая значения Φ_i при $y=0$, $y=1$, после алгебраических преобразований получаем соотношение, выражающее k_2^* и k_3^* через k_1^*

$$k_2^*=\varepsilon k_1^*(\delta+c)/(2\Phi_2'(1, \nu)) \tag{4.15}$$

$$k_3^*=-k_1^*(\Phi_1''/\Phi_3'')(1+\varepsilon(\delta+c)/(2\Phi_2'))|_{y=1}=0$$

а также трансцендентное характеристическое уравнение

$$[\Phi_1'''-\Phi_1''\Phi_3'''/\Phi_3''+\varepsilon(\delta+c)(\Phi_2'''-\Phi_1''')/(2\Phi_2')]|_{y=1}=0 \tag{4.16}$$

Подставим в (4.16) значения производных от Φ_i. После ряда тождественных тригонометрических преобразований получаем

$$F_0(\nu)+\varepsilon F_1(\nu)=0, \quad F_0(\nu)=\operatorname{ch}\nu\sin\nu-\operatorname{sh}\nu\cos\nu \tag{4.17}$$

$$F_1(\nu)=(\delta+c)(1-\operatorname{ch}\nu\cos\nu)/(2\nu)$$

Так как решение ищется в первом приближении, то для ν имеем

$$\nu=\nu_0+\varepsilon\nu_1 \tag{4.18}$$

где ν_0 собственные значения для невозмущенной задачи, полученные из (4.9), а ν_1 находится из соотношения (2.17)

$$\nu_1 = -F_1(\nu_0)/F'_{0,\nu}(\nu_0), \quad F'_{0,\nu}(\nu_0)=2\,\mathrm{sh}\,\nu_0 \sin \nu_0 \tag{4.19}$$

Подстановкой значения ν_l из (4.18), (4.19) и k_2^*, k_3^* из (4.15) и $k_0^*=0$ в (4.11) находятся собственные функции Y_l в первом приближении. Из (2.2), (2.3) определяются X_l и λ_l, при этом

$$\lambda_l=\nu_l(1-\varepsilon\varphi_1)=\nu_{0,l}+\varepsilon(\nu_{1,l}-\nu_{0,l}(\delta-c)/8) \tag{4.20}$$

Например, если в случае кольцевого сечения $r^0{}_0=r_0{}^1=0$ (сплошной стержень), то имеем $\delta=2r_1{}^1/r_1{}^0$, $c=4r_1{}^1/r_1{}^0$, $(\delta+c)=6r_1{}^1/r_1{}^0$, $(\delta-c)=-2r_1{}^1/r_1{}^0$. Это означает, что в рассматриваемом случае при $l\gg1$ собственные числа λ_l увеличиваются ($\nu_l\gg\nu_1\sim1$ при $l\gg1$). При небольших l зависимость следующая:

l	1	2	3	4	5
$\lambda_l{}^0$	3,927	7,069	10,21	13,35	16,49
$\lambda_l{}^1$	1,385	1,978	2,699	3,450	4,214

Здесь $\varepsilon=0,1$, $r_1{}^1/r_1{}^0 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
2. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
3. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
5. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
6. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.
7. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с; Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966. 1063 с.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
9. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 896 с.
10. *Акуленко Л. Д., Шамаев А. С.* Приближенное решение некоторых возмущенных краевых задач // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 200–209.
11. *Гринберг Г. А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2. С. 141–168.
12. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
13. *Полтавский Л. Н.* О финитной управляемости бесконечных систем маятников // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 318–321.
14. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
15. *Акуленко Л. Д.* Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 596–607.
16. *Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 214 с.
17. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
18. *Акуленко Л. Д.* Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 183–192.
19. *Лавровский Э. К., Формальский А. М.* Стабилизация заданной позиции упругого стержня // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 752–760.

Москва

Поступила в редакцию
1.IV.1991