Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. В. Я. Терещенко

# АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

**Предложенный [1–3] вариационный метод граничных элементов (ВМГЭ), использующий формулировки задач для граничных функционалов и обобщенных функционалов Трефтца и аппроксимацию решений при помощи дискретных граничных потенциалов (ДГП), применяется для решения некоторых задач теории упругости; при этом анализируются вопросы порядка гранично-элементных (ГЭ)-аппроксимаций, структура матриц систем дискретных граничных уравнений (ДГУ), построение функций «влияния» при помощи фундаментальных решений. Оценки погрешности используют функционалы двойственных задач.**

1. Алгоритм ВМГЭ рассмотрим для формулировки, использующей задачи минимизации граничных функционалов (ГФ) плоской и пространственной задач линейной изотропной теории упругости, в предположении, что для этих задач выполняется неравенство Корна [4], или существует решение с конечной энергией (для задач в бесконечной области [4]). Для примера рассмотрим вторую задачу теории упругости (с заданными на границе напряжениями) в области упругой среды $G\subset E^{(m)}$, $m=2, 3$ с достаточно гладкой границей $S$ (удовлетворяющей условиям теоремы о следах); соответствующая вариационная задача заключается в минимизации квадратичного функционала [4] (массовые силы не учитываются)

$$F_G(\mathbf{u}) = 2\int\limits_G W(\mathbf{u})\,dG - 2\int\limits_S \mathbf{g}^{(\nu)}\mathbf{u}\,ds$$

на допустимых вектор-функциях перемещений $\mathbf{u}(x)$, $x\in\bar{G}$, где $2W(\mathbf{u})$ – квадратичная форма линейной изотропной теории упругости, а $\mathbf{g}^{(\nu)}(y)$, $y\in S$ – вектор заданных напряжений по направлению внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$. Известно [4], что решение задачи минимизации $F_G(\mathbf{u})$ существует с точностью до произвольного жесткого перемещения. Редукция указанной вариационной задачи на границу производится следующим образом. Пусть вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению равновесия $\mathbf{A}\mathbf{u}(x)=0$, $x\in G$, тогда в силу формулы Бетти [4] получим равенство

$$2\int\limits_G W(\mathbf{u})\,dG = \int\limits_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,ds$$

где $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$ – вектор поверхностных нормальных напряжений. Таким образом, задача $\min_{\mathbf{u}} F_G(\mathbf{u})$ может быть заменена эквивалентной задачей для ГФ

$$\min_{\mathbf{u}\in D} F_S(\mathbf{u}),\quad D=\{\mathbf{u}:\mathrm{A}\mathbf{u}(x)=0, x\in G\} \tag{1.1}$$

$$F_S(\mathbf{u})=\int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})\,\mathbf{u}\,ds-2\int_S \mathbf{g}^{(\nu)}\mathbf{u}\,ds$$

Если $\min_{\mathbf{u}\in D} F_S(\mathbf{u})=F_S(\mathbf{u}_0)$, то вектор $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет граничному вариационному уравнению

$$\int_S \mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}_0)\,\mathbf{u}\,ds-\int_S \mathbf{g}^{(\nu)}\mathbf{u}\,ds=0,\quad \forall\mathbf{u}\in D \tag{1.2}$$

Алгоритм ВМГЭ решения задачи (1.1) сводится по сути к ГЭ-аппроксимации уравнения (1.2).

2. Для ГЭ-аппроксимации регулярных вариационных задач (не имеющих каких-либо особенностей, влияющих на аппроксимацию: например, наличие угловых точек, вблизи которых может наблюдаться быстрый рост решения и т. д.) удобно применять изопараметрические ГЭ-аппроксимации [5] см. также [1]), которые характеризуются тем, что узлы аппроксимации границы и искомого решения совпадают и для аппроксимации используются базисные функции МГЭ одного порядка. Для решения последующих задач примем такие аппроксимации в виде:

$$y_n^{(i)}(\eta)=\sum_{k=1}^{K} y_{nk}^{(i)}\psi_k(\eta),\quad i=1,\ldots,m \tag{2.1}$$

$$u_n^{(i)}(\eta)=\sum_{k=1}^{K} U_{nk}^{(i)}\psi_k(\eta),\quad \forall n \tag{2.2}$$

где $y_{nk}^{(i)}$ — декартовы (глобальные) координаты узлов разбиения границы $S$, $k$ — номер узлов граничных элементов (ГЭ) $\Delta s_n$, $U_{nk}^{(i)}$ — узловые значения компонент вектора перемещений $\mathbf{u}$, $\psi_k$ — базисные функции МГЭ, $\eta$ — локальная координата точек ГЭ.

Пусть $S_\Delta=\cup\Delta s_n$, $n=1,\ldots,N$ — дискретная граница, аппроксимирующая $S$ (или $S_\Delta\equiv S$), $G_\Delta$ — область ограниченная $S_\Delta$; предполагаем, что для аппроксимации (2.2) выполняется условие согласованности ГЭ, что в данном случае означает непрерывность глобальной интерполяционной функции при переходе через границу между элементами и достигается равенством узловых значений искомого решения в общих узлах смежных элементов [1]; тогда

$$y_\Delta=\sum_{n=1}^{N} y_n(\eta),\quad \mathbf{u}_N(y_\Delta)=\sum_{n=1}^{N}\mathbf{u}_n(\eta) \tag{2.3}$$

— соответственно параметрическое уравнение $S_\Delta$ и аппроксимирующая решение непрерывная функция в точках $y_\Delta\in S_\Delta$ с нормалью $\boldsymbol{\nu}_\Delta$.

Далее используется известное из теории потенциала [6] интегральное представление функции достаточно гладкой в области $G_\Delta$ по ее граничным значениям $\mathbf{u}_N(y_\Delta)$, $\partial_{\nu_\Delta}\mathbf{u}_N(y_\Delta)$, $y_\Delta \in S_\Delta$, которое применительно к задачам теории упругости записывается в виде [7]

$$\alpha_N(x_\Delta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{S_\Delta} \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}\Bigl(\sum_{j=1}^{m} v^{1j}\Bigr)\mathbf{u}_N(y_\Delta)\,ds(y_\Delta) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{S_\Delta}\sum_{j=1}^{m} v^{1j}\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N(y_\Delta))\,ds(y_\Delta), \quad x_\Delta \in G_\Delta \tag{2.4}$$

Здесь $\{v^{ij}\}$ – тензор фундаментальных решений уравнения теории упругости (тензор Сомильяны), (2.4) обосновано [6, 7] для кусочно-гладкой границы $S_\Delta$. Известно, что $A\alpha_N(x_\Delta)=0$ для всех точек $x_\Delta$, лежащих внутри и вне $S_\Delta$. Возможны альтернативные формулировки ГЭ-аппроксимаций на основе интегрального представления (2.4): если в качестве фундаментального решения взят тензор Грина первой задачи статики (или тензор Грина второй задачи статики), то в (2.4) обращается в нуль соответствующий интеграл (такие ГЭ-аппроксимации подробно рассматривались в [1, 2]).

Использование представления (2.4) предполагает достаточную гладкость аппроксимаций (2.2) для существования второго интеграла в (2.4) как минимум требуется $\mathbf{u}_N \in W_2^2(S_\Delta)$ (соболевскому классу $W_2^2(S_\Delta)$ принадлежат непрерывно дифференцируемые в точках $S_\Delta$ функции, при этом требуется и достаточная гладкость аппроксимаций (2.1)). В каждом из описанных вариантов вектор-функции $\alpha_N(x_\Delta)$, $x_\Delta \in G_\Delta$, $\forall N$ являются допустимыми функциями конечномерной вариационной задачи $\min F_{S_\Delta}(\alpha_N)$, $\alpha_N \in D_\Delta$, аппроксимирующей задачу (1.1), так как удовлетворяют уравнению равновесия в области $G_\Delta$. Далее применяется процесс Ритца [1], который приводит к дискретному вариационному уравнению, аппроксимирующему уравнение (1.2)

$$\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{U\Delta s_n} \mathbf{t}^{(\nu_n)}\Bigl(\sum_{i=1}^{m} u_n^{(i)}\Bigr)\psi_l\,ds(y_n) -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{U\Delta s_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} g_{nk}^{(i)}\psi_k\psi_l\,ds(y_n) = 0, \quad l = 1,\dots,K \tag{2.5}$$

($\nu_n(\eta)$ – внешняя нормаль в точках $\Delta s_n$); в (2.5) для заданной вектор-функции $\mathbf{g}^{(\nu)}$ использована ГЭ-аппроксимация вида (2.2), где $g_{nk}^{(i)}$ – узловые значения компонент дискретной функции $\mathbf{g}^{(\nu_n)}$ и интегрирование производится по объединению ГЭ $\cup\Delta s_n$, для которых узел $k$ является общим. Уравнение (2.5) по сути есть система Ритца ДГУ (в свернутом виде) относительно узловых значений $U_{nk}^{(i)}$ ; при последовательной записи уравнений для каждого узла $k$ в сумме $\sum_n$ отличны от нуля интегральные коэффициенты составляющие вклады ГЭ, для которых узел $k$ является общим. Таким образом, матрица системы Ритца оказывается ленточной структуры (при этом ширина ленты зависит от порядка ГЭ, см. ниже) и симметричной, так как

$$\int\limits_{\Delta s_n} \partial_n^{(i)}\psi_k\psi_l\,|J_n|\,ds_n = \int\limits_{\Delta s_n} \partial_n^{(i)}\psi_l\psi_k\,|J_n|\,ds_n,\ \partial_n^{(i)} \equiv \frac{\partial}{\partial y_n^{(i)}} \qquad (2.6)$$

Переход от (2.5) к системе ДГУ связан [1, 2] с ГЭ-аппроксимацией вектора граничных напряжений [7]

$$\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}) = 2\mu\partial_\nu\mathbf{u} + \lambda(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu(\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\mathbf{u})$$

на аппроксимациях (2.2) вектора перемещений; указанная ГЭ-аппроксимация в точках $\Delta s_n$ может быть записана в виде [1, 2]

$$\mathbf{t}^{(\nu_n)}\Big(\sum_{i=1}^{m} u_n^{(i)}\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} U_{nk}^{(i)} T_n\psi_k, \quad \forall n \qquad (2.7)$$

где $T_n$ — скалярный оператор, вид которого устанавливается из покомпонентной записи вектора $\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u})$:

$$T_n\psi_k = 2\mu\sum_{i=1}^{m}\partial_n^{(i)}\psi_k l_n^{(i)} + \lambda\sum_{i=1}^{m}\partial_n^{(i)}\psi_k\sum_{i=1}^{m} l_n^{(i)} + \qquad (2.7a)$$
$$+\mu\sum_{\substack{i,j\\(i\neq j)}}^{m}(\partial_n^{(j)}-\partial_n^{(i)})\psi_k\,(l_n^{(i)}+l_n^{(j)}), \quad \partial_n^{(i)} \equiv \frac{\partial}{\partial y_n^{(i)}}$$

где $y_n^{(i)}$ $(\eta)$ — ГЭ-аппроксимация (2.1); так как $\psi_k=\psi_k(\eta)$, то вычисление в (2.7а) производных $\partial_n^{(i)}\psi_k$ производится по правилам дифференцирования сложной функции; вычисление направляющих косинусов $l_n^{(i)}$ нормали $\boldsymbol{\nu}_n$ связано с преобразованием дифференциалов площади (длины) ГЭ $\Delta s_n$ из локальной системы координат $(\eta)$ в глобальную $(y_n)$ [5, 8], которое определяется так

$$ds(y_n) = |J_n|\,d\eta \Rightarrow s_n = \int |J_n|\,d\eta = \operatorname{diam}\Delta s_n$$

здесь $|J_n|$ — детерминант матрицы Якоби $[J_n]$ преобразования (2.1). Согласно [5, 8] в общем случае ($m$=2, 3) имеем:

$$|J_n| = \Big\{\sum_{i=1}^{m} d_{in}^2\Big\}^{1/2}, \quad l_n^{(i)} = d_{in}\,|J_n|^{-1}$$

где $d_{in}$ — миноры матрицы $[J_n]$, которые определяются через производные $\partial_{\eta_j} y_n^{(i)}$, $i, j=1, 2, 3$.

После определения из (2.5) узловых значений $U_{nk}^{(i)}$ , $i=1,\dots,m$ ГЭ-приближения «по Ритцу» решения задачи (1.1), и эквивалентной ей (см. п. 1) граничной задачи с заданными на $S$ напряжениями, могут быть представлены в виде

$$\overline{\mathbf{u}}_N \equiv \alpha_N(x_\Delta) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} U_{nk}\alpha_{nk}(x_\Delta), \quad x_\Delta \in G_\Delta \qquad (2.8)$$

где, согласно (2.4), «функции влияния» $k$-го узла, $n$-го ГЭ определяются в виде суперпозиции скалярных потенциалов с плотностью, сосредоточенной на ГЭ (см. также [1, 2])

$$\alpha_{nk} = -\frac{1}{2}\int_{\Delta s_n} \mathbf{t}^{(\nu_n)}\Big(\sum_{j=1}^{m} v^{1j}\Big)\psi_k\,|J_n|\,ds_n(\eta) + \\ +\frac{1}{2}\int_{\Delta s_n}\sum_{j=1}^{m} v^{1j}T_n\psi_k\,|J_n|\,ds_n(\eta), \quad \forall n \tag{2.9}$$

Например, в задаче Сен-Венана о кручении изотропного однородного стержня, которая в терминах скалярной функции депланации сечения приводится к вариационной задаче вида (1.1) на множестве гармонических функций, функции (2.9) определяются в виде гармонических ДГП (двойного и простого слоя); при линейной ГЭ-аппроксимации эллиптического контура сечения стержня получено их аналитическое выражение

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{2\pi}\ln|x_\Delta - y_{nk}|, \quad x_\Delta = \sum_{i=1}^{2} x_\Delta^{(i)}, \quad y_{nk} = \sum_{i=1}^{2} y_{nk}^{(i)}$$

где $y_{nk}^{(i)}$ – декартовы координаты узлов разбиения; функции $\alpha_{nk}$ определяют линии уровня депланации сечения при кручении стержня и соответствуют классической функции, описывающей поверхность источника или стока [9] (в зависимости от знака узловых значений). Линейная комбинация произведений узловых значений, которые были получены в результате реализации ГЭ-аппроксимации вариационной задачи, вида (1.1), и функций $\alpha_{nk}$, $k=1, 2$, $n=1, \ldots, N$ дает полуаналитическое (численно-аналитическое) решение задачи Сен-Венана [2].

Для векторных задач теории упругости при вычислении (2.9) используется вектор-строка тензора Сомильяны $\mathbf{v}^{1j}=(v^{11}, v^{12}, v^{13})$; известно, что такой вектор является решением (при $x\neq y$) однородного уравнения Ламе: например, для плоской задачи компоненты вектора равны [7]:

$$\begin{aligned} v_n^{11} &= c_0[c_1 r_n^{-1} + (x^{(1)} - y_n^{(1)})^2 r_n^{-3}], \quad (x^{(1)}, x^{(2)}) \in G_\Delta \\ v_n^{12} &= c_0(x^{(1)} - y_n^{(1)})(x^{(2)} - y_n^{(2)}) r_n^{-3}, \quad (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \in S_\Delta \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$r_n = \Big\{\sum_{i=1}^{2}(x^{(i)} - y_n^{(i)})^2\Big\}^{1/2}, \quad c_0 = [16\pi\mu(1-\sigma)]^{-1}, \quad c_1 = 3 - 4\sigma$$

где $y_n^{(i)}(\eta)$, $\eta\in\Delta s_n$ – ГЭ-аппроксимации (2.1). Простой анализ показывает, что вычисление $\alpha_{nk}$ при линейной ГЭ-аппроксимации (2.1) с использованием (2.10) приводит к вычислению интегралов вида

$$\int \eta^q B^{-p} d\eta, \quad B = a\eta^2 + b\eta + c, \quad q = 0, 1, 2, \quad p = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2,$$

где коэффициенты $a$, $b$, $c$ зависят от координат $x_\Delta^{(i)} \in G_\Delta$, $y_{nk}^{(i)} \in S_\Delta$. Указанные интегралы вычисляются аналитически [10] (с. 67–68) и содержат логарифмическую функцию расстояния $r_n$, а также степенные функции $r_n^{-p}$. Таким образом, «функции влияния» $\alpha_{nk}$, входящие в ГЭ-приближения (2.8), определены $\forall x_\Delta \in G_\Delta$; область $G_\Delta$ может быть неограниченной, при этом потенциал простого слоя убывает на бесконечности как $O(r_n^{-1})$, а потенциал двойного слоя — как $O(r_n^{-2})$. Окончательные формулы для вычисления $\alpha_{nk}$ достаточно громоздкие в силу сложности ГЭ-аппроксимации вектора $\mathbf{t}^{(\nu_n)}(\sum u_n^{(i)})$, (см. (2.7), (2.7а)).

3. Оценка ГЭ-приближений $\{\bar{\mathbf{u}}_N\}$ (см. (2.8)) решения конечномерной вариационной задачи $\min F_{s_\Delta}(\bar{\mathbf{u}}_N)$, $\bar{\mathbf{u}}_N \in D_\Delta$ сводится к оценке погрешности ГЭ-аппроксимаций $\mathbf{u}_N(y_\Delta)$ в точках $y_\Delta \in S_\Delta$, так как в точках $x_\Delta \in G_\Delta$ допустимые функции задачи удовлетворяют в точности дифференциальному уравнению граничной задачи. Для такой оценки могут быть использованы апостериорные оценки погрешности приближенных решений двойственных вариационных задач для ГФ линейной теории упругости [11], которые применительно к оценке ГЭ-аппроксимаций имеют вид

$$\|\mathbf{u}_{0\Delta} - \mathbf{u}_N\|_{1/2,\, S_\Delta} \leqslant c_+ \Delta(\mathbf{u}_N), \quad c_+ > 0 \tag{3.1}$$

$$\|\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_{0\Delta}) - \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)\|_{-1/2,\, S_\Delta} \leqslant c_- \Delta(\mathbf{u}_N), \quad c_- > 0$$

$$\Delta(\mathbf{u}_N) = \{c_\Delta^{-1}[F_{S_\Delta} - \Phi_{S_\Delta}]\}^{1/2}, \quad c_\Delta > 0$$

(здесь постоянные $c_+$, $c_-$ не зависят от $N$); в (3.1): $\mathbf{u}_{0\Delta}$ — граничное значение решения $u_0$ задачи (1.1) в точках $y_\Delta \in S_\Delta$; $F_{S_\Delta}, \Phi_{S_\Delta}$ — ГФ двойственных задач [11], которые вычисляются соответственно на ГЭ-аппроксимациях $\mathbf{u}_N$, $\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N)$ (см. (2.3), (2.7)); постоянная $c_\Delta$ может быть определена из оценки [11]

$$2\int\limits_{G_\Delta} W(\mathbf{u})\, dG_\Delta \geqslant c_\Delta \|u\|^2_{1,\, G_\Delta}, \qquad \forall \mathbf{u} \in W_2^1(G_\Delta)$$

Нормы в классах $W_2^{\pm 1/2}(S_\Delta)$, используемых в (3.1), имеют смысл, так как по построению (см. (2.3)) $\mathbf{u}_N \in W_2^1(S_\Delta)$. Отметим, что при проведении численного эксперимента (см. ниже следующие задачи) достаточно установить, что при измельчении разбиения $S_\Delta$ на ГЭ разность $F_{S_\Delta} - \Phi_{S_\Delta}$ уменьшается; это возможно [11] на основании равенства

$$F_{S_\Delta} - \Phi_{S_\Delta} = 2\int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N [\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N) - \mathbf{g}_N^{(\nu_\Delta)}]\, ds_\Delta > 0 \tag{3.2}$$

где $\mathbf{g}_N^{(\nu_\Delta)}$ — ГЭ-аппроксимация заданной вектор-функции $\mathbf{g}^{(\nu)}$ (см. (2.5)), при этом интеграл справа вычисляется следующим образом:

$$I_{S_\Delta} = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\Delta s_n} \sum_{i=1}^{m} u_n^{(i)} \Big[ \mathbf{t}^{(\nu_n)} \Big( \sum_{i=1}^{m} u_n^{(i)} \Big) - g^{(\nu_n)} \Big] ds_n \tag{3.3}$$

(здесь используются аппроксимации (2.2), (2.7)); по сути (3.3) — аппроксимация (1.2) в точках $S_\Delta$ очевидно в силу сходимости ГЭ-аппроксимаций [3], имеет место $I_{S_\Delta} \to 0$ при $N \to \infty$ [11].

Приведенные апостериорные оценки не дают информацию о порядке погрешности аппроксимаций, т. е. о скорости сходимости приближений $\mathbf{u}_N \to \mathbf{u}_0$ при $N \to \infty$ ($\mathrm{diam}\, \Delta s_n \to 0$). Такую информацию дают априорные оценки погрешности. Здесь могут быть использованы априорные оценки конечно-элементных (КЭ)-аппроксимаций типа Бубнова-Галеркина [12]; такие оценки построены для приближенных решений эллиптических краевых задач второго порядка.

Была установлена [3] сходимость ГЭ-аппроксимаций, построенных на основе интегрального представления (2.4), при условии, что $S_\Delta$ — конечное объединение поверхностей Ляпунова, это соответствует согласованному объединению ГЭ $\Delta s_n$, принятому в конформном МКЭ [12]. Для таких аппроксимаций построение априорной оценки «глобальной» интерполяции по МКЭ (МГЭ) приводится к построению оценки погрешности «локальной» интерполяции на отдельном конечном элементе [12], которая использует оценку погрешности аппроксимации достаточно гладкой функции интерполянтами МКЭ в той или иной норме. Таким образом, для оценки погрешности ГЭ-аппроксимаций $\{\mathbf{u}_N\}$ (см. (2.3)) может быть использована следующая оценка [12]:

$$\|\mathbf{u}_{0\Delta}-\mathbf{u}_N\|_{1,\,S_\Delta}\leqslant cd^r\,\|\mathbf{u}_{0\Delta}\|_{r+1,\,S_\Delta},\quad c>0$$

где $d=\operatorname{diam}\Delta s_n$, $r\geqslant 1$ — локальный порядок точности аппроксимации, $\|\cdot\|_{1,\,S_\Delta}$ — норма в соболевском классе вектор-функций $W_2{}^1(S_\Delta)$; постоянная $c$ от $d$ не зависит. В норме $L_2(S_\Delta)$ максимальный порядок точности интерполяции выше [12].

4. Рассматривалось обобщение задачи Фламана [13] при нагружении нормальным давлением упругой полуплоскости по кривой второго порядка $y^{(2)}={}^1/_2(y^{(1)})^2R^{-1}\equiv S$ в точках $y=(y^{(1)},\ y^{(2)})\in S$ функция давления была принята [14] в виде решения задачи о внедрении (без трения) в полуплоскость штампа, поверхность которого описывается кривой $S$. Указанная задача в терминах перемещений была поставлена как вариационная задача (1.1) при отсутствии массовых сил и при дополнительных условиях

$$\mathbf{t}^{(\nu)}(\mathbf{u}(y))=0,\quad y\in[-\infty,\ \infty]\backslash s,\quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}(y))=0,\quad y\in[-\infty,\ \infty]$$

где $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ — вектор касательных напряжений. Для ГЭ-аппроксимации задачи использовались линейные аппроксимации вида (2.1), (2.2) и ГЭ-приближения (2.8), при этом для вычисления функций (2.9) использовалась сумма $v_n{}^{11}+v_n{}^{12}$, $\forall n$ (см. (2.10)). Система Ритца (см. (2.5)) формируется из ДГУ, которые составляются по «шаблону» $\forall n=1,\ldots,N$, $i,j=1,2$:

$$-\left(\mu+\frac{1}{2}\lambda\right)U_{n1}^{(i)}\left(f_n^{(i)}+f_{n-1}^{(i)}\right)-\frac{1}{2}\mu U_{n1}^{(i)}\left(f_n^{(j)}+f_{n-1}^{(j)}\right)-\frac{1}{4}(\mu+\lambda)U_{n1}^{(j)}-$$

$$-\left(\mu+\frac{1}{2}\lambda\right)U_{(n+1)1}^{(i)}\left(f_n^{(i)}+f_{n+1}^{(i)}\right)-\frac{1}{2}\mu U_{(n+1)1}^{(i)}\left(f_n^{(j)}+f_{n+1}^{(j)}\right)-\frac{1}{4}(\mu+\lambda)U_{(n+1)1}^{(j)}=$$

$$=\frac{1}{3}p_{n1}^{(i)}\left(Y_n^{(j)}-Y_{n-1}^{(j)}\right)+\frac{1}{3}p_{(n+1)1}^{(i)}\left(Y_{n+1}^{(j)}-Y_n^{(j)}\right)$$

Здесь реализована аппроксимация (2.7) и приняты обозначения:

$$f_n^{(i)}=\frac{1}{2}Y_n^{(j)}\left(Y_n^{(i)}\right)^{-1},\quad |J_n|=\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(Y_n^{(i)}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$\partial_\eta y_n^{(i)}=Y_n^{(i)}=\frac{1}{2}\left(y_{n2}^{(i)}-y_{n1}^{(i)}\right),\quad i=1,2,\quad \forall n$$

где $y^{(i)}_{nk}$ – координаты узлов $k=1$, 2, $p^{(i)}_{nk}$ – узловые значения заданной функции $p^{(\nu)}_i(y^{(1)})$ (см. [14], с. 65). Численная реализация рассматривалась для частного случая характеристик материала: модуль упругости $E=1\cdot 10^5$, коэффициент Пуассона $\sigma=0{,}3$, постоянные Ламе $\lambda=0{,}5769\,E$, $\mu=0{,}3846\,E$; радиус кривой $S$ $R=1$. Координаты узлов разбиения $S$ до оси симметрии, совпадающей с осью $y^{(2)}$ (при $N=6$) и узловые значения перемещений, полученные в результате решения системы ДГУ (при $E=1$) таковы:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^4\times y^{(1)}_{n1}$: | 0; | 335; | 671; | 1005; | 1338; | 1670; | 2000 |
| $10^4\times y^{(2)}_{n1}$: | 0; | 5,6; | 22,5; | 50,5; | 89,5; | 139; | 200 |
| $10^4\times U^{(1)}_{n1}$: | 0; | –45; | 116; | –179; | 253; | –320; | 763 |
| $10^4\times U^{(2)}_{n1}$: | – 1453; | | 6,45; | –14,5; | 20,5; | –24; | 26,5; 0 |

Анализ результатов показывает: на оси симметрии (ось $y^{(2)}$) отсутствуют горизонтальные перемещения, а вертикальные перемещения наибольшие; по мере удаления от оси $y^{(2)}$ компоненты $U^{(2)}_{nk}$ уменьшаются и наоборот – компоненты $U^{(1)}_{nk}$ увеличиваются за счет нарастания деформаций сдвига. «Деформированные» координаты узлов разбиения определяются так: $\bar{y}^{(i)}_{nk}=y^{(i)}_{nk}+U^{(i)}_{nk}\cdot 10^{-5}$, $i=1,2$.

Проводился численный эксперимент, при $N=6$, 12, 24 вычислялась сумма (3.3): $\Sigma_6\cong 0{,}22$, $\Sigma_{12}\cong 0{,}205$, $\Sigma_{24}\cong 0{,}175$, таким образом, при измельчении разбиения на ГЭ разность (3.2) убывает сравнительно медленно, так как по сути речь идет о приближении кусочно-линейной функции $\mathbf{g}^{(\nu_n)}$ (см. (2.5)) функцией кусочно-постоянной $\mathbf{t}^{(\nu_n)}\left(\sum u^{(i)}_n\right)$ (см. (2.7)). В алгоритме двойственности [15] для решения модельной контактной задачи на основе поставленной здесь вариационной задачи (1.1), использовались ГЭ-аппроксимации второго порядка, которые дают более точные приближения напряжений. Следует также отметить, что при ГЭ-аппроксимациях первого порядка квадратная матрица системы ДГУ, размерности $K_N\times K_N$ ($K_N$ – число узлов $S_\Delta$), имеет ленточную структуру с шириной ленты – 4; при ГЭ-аппроксимациях второго порядка ширина ленты – 6.

Рассматривалась задача о перемещениях точек шаровой поверхности при нулевых граничных условиях для вектора перемещений, заданных на меридиональных (или кольцевых) линиях, при действии нормальной поверхностной нагрузки. Следует отметить, что задание указанных условий на множестве трехмерной (или двумерной) меры нуль создает сингулярность граничной задачи и учет таких условий при использовании традиционных математических методов теории упругости – задача достаточно сложная. МГЭ позволяет реализовать указанные условия заданием нулевых значений компонент вектора перемещений в соответствующих узлах дискретной поверхности, аппроксимирующей заданную. В силу круговой симметрии производилась триангуляция восьмой части шаровой поверхности с нумерацией узлов, обеспечивающей в дальнейшем достаточно простое ансамблирование матрицы системы ДГУ с минимальной шириной ленты. Изопараметрическая ГЭ-аппроксимация для плоских треугольных ГЭ $\Delta s_n$ характерна тем [5, 8], что интерполяционные функции $\psi_k$ тождественны локальным координатам $\eta_k$, $k=1$, 2, 3; таким образом, аппроксимации (2.1), (2.2) имеют вид

$$y^{(i)}_n=\sum_{k=1}^{3} y^{(i)}_{nk}\eta_k,\quad u^{(i)}_n=\sum_{k=1}^{3} U^{(i)}_{nk}\eta_k,\quad i=1,2,3,\quad \forall n$$

где $y^{(i)}_{nk}$ – декартовы координаты узлов сетки, образованной меридианами и параллелями. Формирование ДГУ производится по семиточечной схеме (при билинейной ГЭ-аппроксимации – по пятиточечной схеме); каждое узловое значение $U^{(i)}_{nk}$, $i=1$, 2, 3 умножается на сумму вкладов шести ГЭ, получаемая при этом матрица имеет блочно-ленточную структуру с шириной ленты – 7 и поблочно симметрична. При учете симметрично заданных (на меридиональных линиях) однородных граничных условий для вектора перемещений рекомендации из [16] позволяют сохранить симметричность подматриц (блоков). Вектор-столбец правой части системы ДГУ формируется на основании ГЭ-аппроксимации компонент на оси $y^{(i)}$ заданной нормальной нагрузки

$$p_i^{(\nu_n)} = l_n^{(i)} \sum_{k=1}^{3} p^{(\nu_n)} (y_{nk}^{(i)}) \eta_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall n$$

где $p^{(\nu_n)}(y_{nk}^{(i)})$ – узловые значения функции $\mathbf{p}^{(\nu_n)}(y^{(i)})$.

Для решения полученной системы ДГУ использованы рекомендации [16], в частности, при помощи процедуры обращения симметричных подматриц был использован метод исключения Гаусса для сведения квадратной матрицы, состоящей из подматриц, к верхней треугольной блочной матрице. Проводился численный эксперимент с вычислением суммы (3.3): при $N=15$, 30, 60 соответственно $\Sigma_N=0{,}835$; 0,627; 0,353.

Рассматривалась модельная задача о трещине нормального отрыва в упругой неограниченной пластине, нагруженной на бесконечности равномерно распределенной растягивающей нагрузкой $p$. Известно (см., например, [17]) аналитическое решение этой задачи в виде поля перемещений $(u^{(1)}, u^{(2)})$ и напряжений $(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(12)})$, компоненты которых определяются как функции полярных координат (с началом в вершине трещины) $(r, \theta)$; указанное решение является точным (для малых $r$) в области перед вершиной трещины малой по сравнению с длиной трещины $2l$, при этом коэффициент интенсивности напряжений [17] равен $K_I=p\sqrt{\pi l}\sin^2\beta$, где $\beta$ – угол плоскости трещины с осью нагрузки.

Для вариационной постановки задачи вида (1.1) (возможность такой постановки была указана в [18], см. дополнение Р. В. Гольдштейна) отнесем плоскость трещины к декартовой системе координат $(y^{(1)}, y^{(2)})$, $y^{(1)}$ – ось в плоскости трещины; предполагалось, что контур трещины $S=S_+\cup S_-$ очерчен по дугам окружности малой кривизны и является внутренней границей области пластины с особой точкой – вершиной трещины. Рассматривалась линейная ГЭ-аппроксимация вида (2.1), (2.2); при аппроксимации заданной функции $g^{(\nu)}$ узловые значения $g_{nk}^{(i)}$, $i=1$, 2 (см. (2.5)) определялись через значения компонент $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(12)}$ в этих узлах, в окрестности особой точки рост указанных напряжений учитывался сгущением узлов, при этом составлялись ДГУ для узлов $k\in S_{+\Delta}$ и $k'\in S_{-\Delta}$, достаточно близко расположенных к особой точке. Сравнивались найденные из системы ДГУ узловые значения компонент перемещений $U_{nk}^{(i)}$, $i=1$, 2 со значениями в узлах аналитического решения $u^{(i)}$; при разбиении четверти $S$ на ГЭ $N=6$, 12, 24 средняя по узловым точкам погрешность соответственно составила $\varepsilon\cong 19$, 16, 11%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Терещенко В. Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.
2. *Терещенко В. Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118–125.
3. *Терещенко В. Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
7. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1968. 627 с.
8. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.

9. *Громадка Т., Лей Ч.* Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. М.: Мир, 1990. 304 с.
10. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964. 228 с.
11. *Терещенко В. Я.* Двойственные вариационные задачи для граничных функционалов линейной теории упругости // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1053–1059.
12. *Сьярле Ф.* Методы конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
13. *Хан Х.* Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 344 с.
14. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 264 с.
15. *Терещенко В. Я.* Об алгоритме решения задачи Синьорини // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1020–1029.
16. *Норри Д., Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
17. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
18. Метод граничных интегральных уравнений // Под ред. Круз Т., Риццо Ф. М.: Мир, 1978. 210 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
14.VI.1991