Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Л. В. Петухов

ДВОЙСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

Рассматриваются задачи минимизации объема двумерных и трехмерных конструкций с ограничениями на напряжения, которые называются условиями теории прочности и применяются на практике для многих материалов. Управление осуществляется формой границы области. Внутри области допускаются полости, форма которых также оптимизируется. Для таких задач оптимального проектирования построены двойственные задачи, которые могут быть использованы для оценок оптимальных или близких к ним проектов. Приводятся примеры двойственных оценок для трех задач оптимального проектирования.

1. Постановка задачи. Ранее [1] были введены понятия области проектирования, допустимой области и доказаны теоремы существования первой и второй вариаций перемещений упругой области. Будем обозначать множество допустимых областей $\Omega\subset\Omega^\circ$, где Ω° — область проектирования, через $O(s,\lambda)$ (здесь $0<\lambda<1$, а s — целое число, характеризующее гладкость границы Γ области Ω [1]).

Сформулируем задачу оптимального проектирования. Пусть заданы модуль сдвига материала μ, его коэффициент Пуассона ν и предел текучести σ_0, вектор внешних нагрузок $\mathbf{F}$, действующих на участке границы $\Gamma_F{}^\circ$ и участок границы $\Gamma_u{}^\circ$, на котором перемещения упругой области равны нулю. Требуется найти

$$\inf J(\mathbf{u}),\quad J=\int_\Omega dx,\quad \forall\Omega\in O(s,\lambda) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}=u_i\mathbf{e}_i$ — решение интегрального тождества

$$\int_\Omega A(\mathbf{u},\mathbf{v})\,dx-\int_{\Gamma_F}F_iv_i\,d\Gamma=0,\quad \forall\mathbf{v}\in V(\Omega) \tag{1.2}$$

$$V(\Omega)=\{\mathbf{v}=v_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i\,|\,v_i\in W_2^{(1)}(\Omega),\quad v_i(\mathbf{y})=0,\quad \mathbf{y}\in\Gamma_u\}$$

$$\mathbf{x}=x_i\mathbf{e}_i,\quad A(\mathbf{u},\mathbf{v})=a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})$$

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{v})=(\partial v_k/\partial x_l+\partial v_l/\partial x_k)/2$$

Здесь ε_{kl} — элементы тензора деформации, $\mathbf{e}_i$ — орты декартовой системы координат, $A(\mathbf{u},\mathbf{u})$ — удвоенная удельная энергия упругой деформации, a_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных материала, $W_2{}^{(1)}(\Omega)$ — пространство функции Соболева [2]. Здесь и везде далее по повторяющимся индексам i, j, k, l в произведениях предполагается суммирование от 1 до N ($N=2$ или 3). В области Ω перемещения $\mathbf{u}$, определяемые интегральным тождеством (1.2), должны удовлетворять ограничениям

$$f(\sigma)\leqslant f_0 \quad (\sigma=\sigma(\mathbf{u})=\sigma_{ij}(\mathbf{u})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \qquad (1.3)$$
$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$

где σ тензор напряжений. Функция f является или квадратичной функцией относительно компонент тензора σ или кусочно-линейной относительно σ_i — главных напряжений тензора $\sigma(\mathbf{u})$ [3], а f_0 — постоянная, зависящая от упругих постоянных материала и σ_0.

Ограничение (1.3) позволяет ввести множество функций

$$V_0(\Omega)=\{\mathbf{u}\in V(\Omega)\,|\,f(\sigma(\mathbf{u}))\leqslant f_0\} \qquad (1.4)$$

2. Двойственная оценка. Для построения двойственной задачи составим функционал Лагранжа [4]

$$M(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega[1+A(\mathbf{u},\mathbf{v})]\,dx-\int_{\Gamma_F}F_iv_id\Gamma \qquad (2.1)$$
$$\forall\Omega\in O(s,\ \lambda),\ \ \forall\mathbf{u}\in V_0(\Omega),\ \ \forall\mathbf{v}\in V(\Omega)$$

Очевидно, что функционал

$$M_0(\mathbf{u})=\sup M(\mathbf{u},\ \mathbf{v}),\ \ \forall\mathbf{v}\in V(\Omega)$$

принимает конечные значения, равные $\operatorname{mes}\Omega$, только для $\mathbf{u}$, удовлетворяющих интегральному тождеству (1.2).

Введем теперь функционал

$$M_0(\mathbf{v})=\inf M(\mathbf{u},\ \mathbf{v}),\ \forall\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\in L_2(\Omega),\ \forall\Omega\in\Omega^\circ \qquad (2.2)$$

Здесь не предполагается, что $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ порождено некоторым полем перемещений $\mathbf{u}$. В качестве $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ могут быть взяты любые функции из $L_2(\Omega)$. Множество Ω предполагается только измеримым и может не быть областью. Приведем следующую цепочку неравенств:

$$M_0(\mathbf{v})\leqslant\sup M_0(\mathbf{v})=\sup\inf M(\mathbf{u},\ \mathbf{v})\leqslant$$
$$\leqslant\sup{}^\circ\inf{}^\circ M(\mathbf{u},\ \mathbf{v})\leqslant\inf{}^\circ\ \sup M(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\inf{}^\circ M^\circ(\mathbf{u}) \qquad (2.3)$$

Здесь sup берется по всем $\mathbf{v}\in V(\Omega^\circ)$, inf по всем $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\in L_2(\Omega)$, $\Omega\subset\Omega^\circ$, $\sup^\circ$ означает sup по всем $\mathbf{v}\in V_0(\Omega)$, а $\inf^\circ$ означает inf по всем $\mathbf{u}\in V_0(\Omega)$, $\Omega\in O(s,\ \lambda)$.

Первое неравенство (2.3) очевидно, третье следует из правила переставимости sup и inf. Поясним второе неравенство. Любая функция $\mathbf{v}\in V(\Omega)$ для $\Omega\in O(s,\ \lambda)$ может быть продолжена в область Ω^0 и, наоборот, $\forall\mathbf{v}\in V(\Omega^0)$ может быть сужена на измеримое множество $\Omega\subset\Omega^0$. Во втором неравенстве $\inf^0$ берется по более узкому классу функций $\mathbf{u}$, чем inf в левой части, поэтому неравенство справедливо.

Из неравенств (2.3) следует, что для $\forall\mathbf{v}\in V(\Omega^\circ)$, для которого $M_0(\mathbf{v})>0$, а также решение задачи

$$\sup M_0(\mathbf{v}),\ \ \forall\mathbf{v}\in V(\Omega^\circ)$$

являются двойственными оценками для функционала задачи

$$\inf M^\circ(\mathbf{u}),\ \ \forall\mathbf{u}\in V_0(\Omega),\ \ \forall\Omega\in O(s,\ \lambda)$$

эквивалентной задаче (1.1).

Для построения функционала $M_0(\mathbf{v})$ необходимо рассмотреть задачу минимизации подынтегральной функции первого интеграла (2.1)

$$\inf \chi(\boldsymbol{\sigma}),\ f(\boldsymbol{\sigma}) \leqslant f_0,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega^\circ$$
$$(\chi(\boldsymbol{\sigma}) = 1 + \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\sigma_{ij}) \tag{2.4}$$

3. Двойственная задача в случае ограничений на энергию. Запишем удвоенную удельную энергию упругой деформации $A(u, u)$ относительно тензора напряжений. Тогда

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$$
$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl},\ f_0 = \sigma_0^2/[2\mu(1+\nu)] \tag{3.1}$$

Функция χ — линейная относительно σ_{ij}, поэтому инфинум достигается на границе допустимой области задания напряжений, т. е. $f(\boldsymbol{\sigma}) = f_0$. Обозначим через ζ множитель Лагранжа и составим функцию Лагранжа

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 1 + \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\sigma_{ij} + \zeta A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$$

Из необходимых и достаточных условий минимума $\Phi(\boldsymbol{\sigma})$

$$\partial\Phi/\partial\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) + 2\zeta A_{ijkl}\sigma_{kl} = 0$$

следует, что

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})/(2\zeta) \tag{3.2}$$

Подставляя ε_{ij} из (3.2) в (3.1) и приравнивая полученное выражение f_0, найдем

$$\zeta = g(\mathbf{v})/(2f_0),\ \inf \chi(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - g(\mathbf{v})$$
$$g(\mathbf{v}) = [f_0 f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}))]^{1/2}$$

Используя эту формулу, получим

$$M_0(\mathbf{v}) = \int\limits_{\Omega_v} [1 - g(\mathbf{v})]\,dx - \int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i d\Gamma \tag{3.3}$$

$$\forall \mathbf{v} \in V(\Omega^\circ),\ \Omega_v = \{\mathbf{x} \in \Omega^\circ \mid g(\mathbf{v}) > 1\}$$

Теорема 1. Пусть существует функция $\mathbf{v}^* \in V(\Omega^\circ)$, для которой $g(\mathbf{v}^*) = 1$ для любого $\mathbf{x} \in \Omega^\circ$, и пусть существует область $\Omega^* \in O(s, \lambda)$, такая, что сужение $\mathbf{u}^* = -f_0\mathbf{v}^*$ на Ω^* является решением интегрального тождества (1.2) для Ω^*. Тогда Ω^*, $\mathbf{u}$ — оптимальное решение задачи (1.1).

Доказательство. Так как функция $\mathbf{v}^*$ удовлетворяет условиям теоремы, то $\Omega_v = \varnothing$ и

$$M_0(\mathbf{v}^*) = -\int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i^* d\Gamma \tag{3.4}$$

Подставляя $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ в интегральное тождество (1.2), получим

$$f_0^2 \int\limits_{\Omega^*} A(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^*)\,dx = -f_0 \int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i^* d\Gamma \tag{3.5}$$

Но $g(\mathbf{v}^*)=[f_0 A(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}^*)]^{1/2}=1$, следовательно, из (3.4) вытекает, что

$$\operatorname{mes}\Omega^* = -\int_{\Gamma_F} F_i v_i^* \, d\Gamma$$

откуда и из (3.3) следует, что Ω^*, $\mathbf{u}^*$ — оптимальное решение задачи (1.1).

Двойственные задачи в случае ограничений на октаэдрическое напряжение. В рассматриваемом случае

$$f(\sigma)=[\sigma_{ij}\sigma_{ij}-\xi I_1^2(\sigma)/3]/(2\mu)$$

$$\xi = \begin{cases} 1, & N=3 \text{ и ПНС} \\ 1+2\nu-2\nu^2, & \text{ПДС} \end{cases} \tag{4.1}$$

где ПНС — плоское напряженное состояние, а ПДС — плоское деформированное состояние, $I_1(\sigma)$ — первый инвариант тензора напряжений, а $f_0=\sigma_0^2/(3\mu)$. Введем функцию Лагранжа

$$\chi(\sigma)=1+\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\sigma_{ij}+\zeta[\sigma_{ij}\sigma_{ij}-\xi I_1^2(\sigma)/3]$$

Из необходимых и достаточных условий минимума $\chi(\sigma)$ получим

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})+2\zeta[\sigma_{ij}-\xi I_1(\sigma)\delta_{ij}/3]=0 \tag{4.2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Анализ показывает, что для $N=3$ система (4.2) вырожденная. Складывая уравнения (4.2) для $i=j$, найдем

$$I_1(\varepsilon(\mathbf{v}))=0 \tag{4.3}$$

Если равенство (4.3) не выполняется, то функция $\chi(\sigma)$ не ограничена снизу. Если равенство (4.3) для $N=3$ выполнено, то система уравнений (4.2) совместна и имеет решение

$$\sigma_{ii}=-[\varepsilon_{ii}(\mathbf{v})+\alpha]/(2\zeta), \quad \sigma_{ij}=-\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})/(2\zeta) \tag{4.4}$$

$$\alpha = \begin{cases} \text{произвольная постоянная, для } N=3 \\ I_1(\varepsilon(\mathbf{v})), \quad \text{для ПНС} \\ (1+2\nu-2\nu^2)\, I_1(\varepsilon(\mathbf{v}))/(1-2\nu)^2, \text{ для ПДС} \end{cases}$$

Подставляя σ_{ij} из (4.4) в (4.1) и приравнивая правую часть f_0, найдем

$$\zeta=g(\mathbf{v})/(2f_0), \quad \inf\chi(\sigma)=1-g(\mathbf{v}) \tag{4.5}$$

$$g(\mathbf{v}) = \begin{cases} [f_0 f(\sigma(\mathbf{v}))]^{1/2}, & N=3 \\ [f_0(\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})+I_1^2(\varepsilon(\mathbf{v}))\,2\mu]^{1/2}, & \text{ПНС} \\ [f_0(\sigma_{ij}(\mathbf{v})\sigma_{ij}(\mathbf{v})+I_1^2(\sigma(\mathbf{v}))\,(2\mu)^{-1}]^{-1}, & \text{ПДС} \end{cases}$$

В этом случае $M_0(\mathbf{v})$ определяется соотношениями (3.4), причем для $N=3$ функция $\mathbf{v}$ должна удовлетворять еще условию (4.3).

5. Двойственные задачи в случае ограничений на максимальное касательное напряжение. В рассматриваемом случае [5]

$$f(\sigma) = \begin{cases} \max|\sigma_i-\sigma_j|, & N=3 \\ \max\{|\sigma_1-\sigma_2|, \ |\sigma_i|\}, & \text{ПНС} \\ 2\mu\max\{|\varepsilon_1-\varepsilon_2|, |\varepsilon_i|\}, & \text{ПДС} \end{cases} \tag{5.1}$$

где $\sigma_i(\varepsilon_i)$ — главные напряжения (деформации) тензора $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$, а $f_0=\sigma_0$.

Представим функцию χ в виде

$$\chi(\boldsymbol{\sigma})=1+\sigma_k\varepsilon_{kk}(\mathbf{v}) \tag{5.2}$$

Для $N=3$ множество главных напряжений, определяемое неравенством $f(\boldsymbol{\sigma})\leqslant f_0$, представляет собой бесконечную шестигранную призму, равнонаклоненную к осям σ_k [5]. Это множество неограниченное, поэтому задача (2.4) имеет ограниченное снизу решение, если для $\mathbf{v}$ выполняется условие (4.3). Функция $\chi(\boldsymbol{\sigma})$ линейна относительно σ_k, поэтому минимум достигается на одном из шести ребер

$$\sigma_1=\sigma_3\pm f_0,\ \sigma_2=\sigma_3\pm f_0,\ \chi=1\mp f_0\varepsilon_{33}(\mathbf{v})$$
$$\sigma_1=\sigma_3,\ \sigma_2=\sigma_3\pm f_0,\ \chi=1\pm f_0\varepsilon_{22}(\mathbf{v})$$
$$\sigma_1=\sigma_3\pm f_0,\ \sigma_2=\sigma_3,\ \chi=1\mp f_0\varepsilon_{11}(\mathbf{v})$$

откуда следует, что

$$\inf\chi(\boldsymbol{\sigma})=1-f_0\max|\varepsilon_k(\mathbf{v})| \tag{5.3}$$

так как экстремальное значение $\varepsilon_{kk}(\mathbf{v})$ равно одной из главных деформаций.

Для ПНС множество главных напряжений, определяемое неравенством $f(\boldsymbol{\sigma})\leqslant f_0$, представляет собой шестиугольник. Функция $\chi(\boldsymbol{\sigma})$ линейна, поэтому ее минимум достигается в одной из шести крайних точек:

$$\sigma_1=\pm f_0,\ \sigma_2=0,\ \chi=1\mp f_0\varepsilon_{11}(\mathbf{v})$$
$$\sigma_1=\pm f_0,\ \sigma_2=\pm f_0,\ \chi=1\pm f_0 I_1(\varepsilon(\mathbf{v}))$$
$$\sigma_1=0,\ \sigma_2=\pm f_0,\ \chi=1\pm f_0\varepsilon_{22}(\mathbf{v})$$

откуда следует, что

$$\inf\chi(\boldsymbol{\sigma})=1-f_0\max\{|\varepsilon_k(\mathbf{v})|,\ |I_1(\varepsilon(\mathbf{v}))|\} \tag{5.4}$$

Для ПДС множество главных деформаций, определяемое неравенством $f(\sigma)\leqslant f_0$, представляет собой также шестиугольник в плоскости главных деформаций. Функция χ, представленная теперь в виде

$$\chi=1+\varepsilon_k\sigma_{kk}(\mathbf{v}) \tag{5.5}$$

линейна относительно ε_k и поэтому ее минимум достигается в одной из шести крайних точек

$$\varepsilon_1=\pm f_0(2\mu)^{-1},\ \varepsilon_2=0,\ \chi=1\pm f_0\sigma_{11}(\mathbf{v})(2\mu)^{-1}$$
$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\pm f_0(2\mu)^{-1},\ \chi=1\pm f_0 I_1(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}))(2\mu)^{-1}$$
$$\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=\pm f_0(2\mu)^{-1},\ \chi=1\pm f_0\sigma_{22}(\mathbf{v})(2\mu)^{-1}$$

откуда следует, что

$$\inf\chi(\boldsymbol{\sigma})=1-f_0\max\{|\sigma_k(\mathbf{v})|,\ |I_1(\sigma(\mathbf{v}))|\}(2\mu)^{-1} \tag{5.6}$$

Воспользуемся формулами (5.3), (5.4), (5.6) и введем функцию

$$g(\mathbf{v})=\begin{cases} f_0\max|\varepsilon_k(\mathbf{v})|, & N=3\\ f_0\max\{|\varepsilon_k(\mathbf{v})|, & |I_1(\varepsilon(\mathbf{v}))|\},\ \text{ПНС}\\ f_0\max\{|\sigma_k(\mathbf{v})|, & |I_1(\sigma(\mathbf{v}))|\},\ \text{ПДС}\end{cases} \tag{5.7}$$

Тогда $M_0(\mathbf{v})$ будет определяться соотношениями (3.4), причем для $N=3$ функции $\mathbf{v}$ должны удовлетворять еще и условию (4.3).

6. Двойственные задачи в случае ограничений на максимальные напряжения. В этом случае

$$f(\sigma)=\max|\sigma_i| \tag{6.1}$$

для $N=3$, ПНС и ПДС при $0\leqslant\nu<{}^1/_2$, а $f_0=\sigma_0$. Решая задачу (2.4) для χ, представленной в виде (5.2), получим, что минимум достигается в одной из 2^N крайних точках множества $f(\sigma)\leqslant f_0$ и равняется:

$$\chi(\sigma)=1+f_0\sum_{k=1}^{N}[\pm\varepsilon_{kk}(\mathbf{v})] \tag{6.2}$$

Выражение (6.2) неинвариантно относительно выбора координат. Воспользуемся формулой [3]

$$\varepsilon_{kk}=\gamma_{ki}^2\varepsilon_i$$

где γ_{ki} — косинус угла между $\mathbf{e}_k$ и i-м главным направлением $\boldsymbol{\varepsilon}$. Используя оценку

$$\sum_{k=1}^{N}|\varepsilon_{kk}(\mathbf{v})|=\sum_{k=1}^{N}|\gamma_{ki}^2\varepsilon_i(\mathbf{v})|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\gamma_{ki}^2|\varepsilon_i(\mathbf{v})|=\sum_{i=1}^{N}|\varepsilon_i(\mathbf{v})|$$

получим

$$\inf\chi(\sigma)=1-g(\mathbf{v}),\quad g(\mathbf{v})=f_0\sum_{i=1}^{N}|\varepsilon_i(\mathbf{v})| \tag{6.3}$$

Двойственный функционал $M_0(\mathbf{v})$ определяется соотношениями (3.4).

7. Двойственные задачи в случае ограничений на максимальные деформации. В этом случае

$$f(\mathbf{a}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon})=\max|\varepsilon_i| \tag{7.1}$$

для $N=3$, ПДС и ПНС при $0\leqslant\nu<{}^1/_2$, а $f_0=\sigma_0/[2(1+\nu)\mu]$. Используя соотношения (7.1), (5.5), а также рассуждения и выводы п. 6, в которых σ_i и $\varepsilon_i(\mathbf{v})$ заменяются соответственно на ε_i и $\sigma_i(\mathbf{v})$, получим

$$g(\mathbf{v})=f_0\sum_{i=1}^{N}|\sigma_i(\mathbf{v})| \tag{7.2}$$

Двойственный функционал $M_0(\mathbf{v})$ определяется соотношениями (3.4).

Теорема 2. Пусть существует функция $\mathbf{v}^*\in V(\Omega^\circ)$, для которой $g(\mathbf{v}^*)\leqslant\leqslant 1$, $A(\mathbf{v}^*,\mathbf{v}^*)=\beta$ для любого $x\in\Omega^\circ$. Функция $g(\mathbf{v})$ определена в зависимости от ограничений прочности соотношениями (4.5), (5.7), (6.3) или (7.2). Пусть существует область $\Omega^*\in O(s,\lambda)$, такая, что сужение $\mathbf{u}^*=-\mathbf{v}^*/\beta$ является решением интегрального тождества (1.2) для Ω^*. Тогда Ω^*, $\mathbf{u}^*$ — оптимальное решение задачи (1.1).

Доказательство. Так как в каждой точке $x \in \Omega^*$ для v^* выполняется равенство $g(v^*)=1$, то $\Omega_v=\varnothing$ и

$$M_0(v^*) = -\int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i^* \, d\Gamma \tag{7.3}$$

Подставляя $u=v=u^*$ в интегральное тождество (1.2) для $\Omega=\Omega^*$, получим

$$\beta^{-2}\int\limits_{\Omega^*} A(v^*, v^*)\, dx = -\beta^{-1}\int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i^* d\Gamma \tag{7.4}$$

Так как в каждой точке $x \in \Omega^\circ$ для v^* выполняется равенство $A(v^*, v^*)=\beta$, то из (7.4) следует

$$\operatorname{mes}\Omega^* = -\int\limits_{\Gamma_F} F_i v_i^* d\Gamma \tag{7.5}$$

Сравнивая равенства (7.3) и (7.5), получим, что Ω^*, u^* — оптимальное решение задачи (1.1).

Замечания 1°. Области $\Omega^* \in O(s, \lambda)$ может не существовать, но может существовать некоторая бесконечномерная область, для которой выполняются условия теоремы. В этом случае можно говорить лишь о достижимой оценке функционала (1.1).

2°. В условиях теоремы подразумевается, что функция $v(x)$, фигурирующая в (4.5) и (5.7) для $N=3$ удовлетворяет равенству (4.3).

Примеры. 1°. Пусть Ω° — квадрат со сторонами $2d$, на двух ребрах которого действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивности F. Будем считать, что реализуется плоское деформированное состояние. Возьмем $v_1^*=\alpha x_1$, $v_2^*=-\alpha x_2$, где α определено через σ_0 и ν в зависимости от ограничений на напряжения из уравнения $g(v^*)=1$. Подставляя v^* в функционал (3.4), получим

$$M_0(v^*)=2\int\limits_{-d}^{d} F\alpha d\, d\Gamma=4\alpha F d^2$$

2°. Пусть Ω° — область, находящаяся между двумя цилиндрами радиусов a и b, длина которых l. На наружной поверхности цилиндра радиуса b действует нормальная к нему равномерно-распределенная нагрузка интенсивности F. На поверхности цилиндра радиуса a нормальные к нему перемещения равны нулю. Положим

$$v_R^*=\alpha\left(\frac{1}{R}-\frac{R}{a^2}\right) v_\varphi^*=0, \quad v_z^*=\frac{2\alpha}{a^2}z$$

где R, φ, z — цилиндрические координаты. Для такого вектора v^* имеем

$$\varepsilon_R=-\alpha\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{a^2}\right), \quad \varepsilon_\varphi=\alpha\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{a^2}\right), \quad \varepsilon_z=\frac{2\alpha}{a^2}$$

и, следовательно, $I_1(\varepsilon(v^*))=0$. Постоянная α находится из неравенства $g(v^*)\leq 1$ в зависимости от ν и σ_0. Подставляя v^* в функционал (3.4), получим

$$M_0(v^*)=-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l}\alpha F\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{a^2}\right) b\, dz\, d\varphi=\frac{2\pi\alpha F(b^2-a^2)l}{a^2}$$

3°. Пусть Ω° представляет собой параллелепипед $-c<x_1<c$, $-c<x_2<c$, $0<x_3<$ $<d_3$, поверхность Γ_u лежит в плоскости $x_3=0$ и определяется неравенствами $-c<x_1<$

$<c$, $-c<x_2<c$, а $\Gamma_F{}^\circ$ лежит в плоскости $x_3=d_3$ и определяется неравенствами $-d_1/2<x_1<d_1/2$, $-d_2/2<x_2<d_2/2$. На поверхности Γ_F задана нагрузка $F=F\cos\gamma e_2+$ $+F\sin\gamma e_3$, где F – положительная постоянная. Будем считать, что $c>d_1+d_2+d_3$.

Для получения двойственной оценки рассмотрим расширенную задачу, которая отличается от поставленной более широким классом функций – на $\Gamma_u{}^\circ\, u_1\neq 0$. Для этой задачи, а следовательно, и для поставленной двойственная оценка может быть получена для $v_i{}^*=\beta_i x_i$, где

$$\beta_1=-\beta_3,\quad \beta_2=\alpha\cos\gamma/\Delta,\quad \beta_3=\alpha\sin\gamma/(4\Delta)$$
$$\Delta=(\cos^2\gamma+1/4\sin^2\gamma)^{1/2}$$

а α определяется через ν, σ_0 в зависимости от ограничений на напряжения из уравнения $g(\mathbf{v}^*)=1$. Подставляя $\mathbf{v}^*$ в функционал (3.4), получим

$$M_0(\mathbf{v}^*)=Fd_1d_2d_3\alpha\Delta$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петухов Л. В.* Об оптимальных задачах теории упругости с неизвестными границами // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 231–236.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1973. 311 с.
5. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
28.I.1991