

УДК 532.5:534.1

© 1992 г. А. В. Марченко

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАЗРЫВОВ В ДРЕЙФУЮЩЕМ ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ

Рассматривается дрейфующий по поверхности моря ледяной покров, состоящий из льдин, имеющих различные размеры, форму и прочностные свойства. Предполагается, что при достаточных быстрых и небольших нагрузках сжатия – растяжения каждая из льдин ведет себя упруго, и для описания ее деформирования пригодна модель линейно упругого тела Гука. При повышении нагрузок происходит разрушение льдин [1].

Если льдины расположены равномерно на поверхности жидкости и относительные скорости близко расположенных льдин малы, то возможно описание движения и деформаций ледяного покрова как сплошной среды с вязко-упруго-пластической реологией [2–4]. Пластические свойства связаны с необратимыми изменениями в ледяном покрове, обусловленными сдвигами и разрушением отдельных льдин при их взаимодействии и торошении. Вязкие свойства проявляются, когда неупругие столкновения между льдинами служат основной формой взаимодействий льдин на рассматриваемом участке поверхности моря, и возникают в местах больших градиентов скоростей дрейфа достаточно разреженного ледяного покрова. Упругие напряжения могут возникать в сплоченном ледяном покрове.

Предложена модель ледяного покрова с упруго-пластической реологией. Исследуются одномерные разрывные решения уравнений модели. Решены задачи о столкновении двух ледовых полей различной сплоченности и об уплотнении дрейфующего ледяного покрова около твердой стенки.

1. Рассмотрим льдину, плавающую на поверхности жидкости. Предполагается, что волны на поверхности жидкости отсутствуют и перемещение льдины происходит в горизонтальной плоскости. Основными силами, возбуждающими движение льдины, являются воздействие со стороны атмосферы и океана и взаимодействие с окружающими ее телами.

Введем декартовую систему координат  $x_1, x_2, z$ , где ось  $z$  направлена вертикально вверх. После интегрирования в пределах толщины льдины уравнения неразрывности и импульса записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{S_f} \rho h ds + \int_{\partial S_f} \rho h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dl = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d'}{dt} \int_{S_f} \rho h \mathbf{u} ds + \int_{\partial S_f} \rho h \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dl = \int_{\partial S_f} \mathbf{F}_n dl + \int_{S_f} \mathbf{F} ds$$

$$d'/dt = d/dt + \boldsymbol{\Omega} \times, \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$$

Здесь  $\rho, h$  – осредненная по толщине льдины плотность и толщина льдин;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$  – вектор осредненной по толщине льдины скорости частиц льда;  $\Omega$  – параметр Кориолиса;  $S_f, \partial S_f$  – произвольный участок площади льдины и его граница на плоскости  $z=0$ ;  $\mathbf{F}_n$  – сила, приложен-

ная к участку границы с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ ;  $\mathbf{F}$  — внешние силы, действующие со стороны атмосферы и океана.

Система (1.1) незамкнута и должна быть дополнена реологическими соотношениями, дающими связь  $\mathbf{F}_n$  с деформационными параметрами льда, и граничными условиями на краю льдины.

Отметим, что природа сил, действующих на край льдины, может быть отличной от напряжений внутри каждой льдины.

2. Рассмотрим ледяной массив, плавающий на поверхности жидкости и состоящий из отдельных льдин, которые могут взаимодействовать между собой. Движение и деформации каждой льдины описываются уравнениями (1.1).

Определим на плоскости  $z=0$  функцию  $f(x_1, x_2, t)$  по следующему правилу:

$$f = \begin{cases} 1, & \text{если в точке } (x_1, x_2) \text{ есть лед} \\ 0, & \text{если в точке } (x_1, x_2) \text{ нет льда} \end{cases}$$

После умножения обеих частей уравнений (1.1) на  $f$  находим

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho h f ds + \int_{\partial S} \rho h (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f dl = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d'}{dt} \int_S \rho h u f ds + \int_{\partial S} \rho h u (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f dl = \int_{\partial S} \mathbf{F}_n f dl + \int_S \mathbf{F} f ds$$

Здесь  $S$  — произвольный участок площади на плоскости  $z=0$  и  $\partial S$  его граница. На  $S$  при  $f \neq 1$  присутствуют льдины и пространства чистой воды.

Отличие уравнений (2.1) от (1.1) заключается в том, что в (2.1) в выражение для  $\mathbf{F}_n$  входят силы взаимодействия льдин.

Разобьем площадь  $S$  на участки  $s_\alpha$  и соответственно границу  $\partial S$  на отрезки  $l_\beta$ . Применим теорему о среднем к (2.1):

$$\frac{d}{dt} \sum_\alpha (\rho h f)_\alpha s_\alpha + \sum_\beta (\rho h f (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}))_\beta l_\beta = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d'}{dt} \sum_\alpha (\rho h f u)_\alpha s_\alpha + \sum_\beta (\rho h u f (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}))_\beta l_\beta = \sum_\beta (\mathbf{F}_n f)_\beta l_\beta + \sum_\alpha (\mathbf{F} \cdot f)_\alpha s_\alpha$$

В (2.2) входят средние на  $s_\alpha$  и  $l_\beta$  значения разрывных функций  $\rho h f$ ,  $\rho h f u$ , ... Если характерные масштабы изменения средних значений  $\rho$ ,  $h$ ,  $f$ ,  $u$ ,  $\mathbf{F}_n$ ,  $\mathbf{F}$  значительно превосходят горизонтальные масштабы  $s_\alpha$ , то  $s_\alpha$  могут быть приняты за элементы  $dS$  непрерывного континуума, на котором определены достаточно гладкие функции  $\rho$ ,  $h$ ,  $A$ ,  $u$ ,  $\mathbf{F}_n$ ,  $\mathbf{F}$ , значения которых в  $dS$  равны их средним значениям в соответствующем элементе  $s_\alpha$ . Функция  $A(x_1, x_2, t)$  является средним значением  $f(x_1, x_2, t)$  и называется сплоченностью ледяного покрова. Отметим, что толщина льдин, входящих в элемент  $dS$ , может быть различной. Предполагается, что среднее значение толщины мало меняется при переходе от элемента  $dS$  к соседним элементам.

В отличие от классической статистической физики [5] здесь не требуется, чтобы в элементе  $dS$  находилось очень большое число льдин. Это

условие заменяется условием равномерности распределения льдин на площадях  $s_\alpha$  и малым разбросом их относительных скоростей. Это объясняется тем, что в системе ледяной покров — жидкость имеется сильная диссипация энергии ледяного покрова за счет взаимодействий льдин с водой и друг с другом, носящих неупругий характер при столкновениях [1, 2]. Если силы  $F$ , вызывающие движение льда, не изменяются в пределах  $dS$ , то с течением времени скорости всех льдин в  $dS$  станут близкими.

После сделанных предположений уравнения (2.2) могут быть переписаны в виде

$$\frac{d}{dt}(\rho h A) + \rho h A \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \rho h A \frac{d'}{dt} \mathbf{u} = A \mathbf{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3)$$

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + \boldsymbol{\Omega} \times, \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \|\sigma_{ij}\|, \quad \sigma_{ij} n_j = A F_{n, j}, \quad (i, j) = (1, 2)$$

Для построения модели сплошной среды — ледяного покрова необходимо определить зависимость между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и деформационными параметрами, отражающую физику процессов взаимодействия между льдинами и деформирования льдин в отдельности.

Далее при построении реологических соотношений модели остановимся на рассмотрении достаточно быстрых процессов, когда можно релаксацию напряжений не учитывать и каждую льдину считать линейно упругим телом Гука при малых нагрузках [1, 2]. При увеличении нагрузок льдина разрушается.

Из уравнения неразрывности и определения тензора деформаций  $\epsilon_{ij} = (\partial w_i / \partial x_j + \partial w_j / \partial x_i) / 2$  следует

$$2\epsilon = 1 - \rho_0 h_0 A_0 / (\rho h A), \quad \epsilon = -1/2 \epsilon_{ii} \quad (2.4)$$

Переменные с нулевым индексом соответствуют параметрам ледяного покрова в недеформированном состоянии.

Из (2.4) следует, что при деформациях сжатия — растяжения ледяного покрова могут изменяться  $\rho$ ,  $h$ ,  $A$ . Эти деформации будем подразделять на обратимые и необратимые (пластические). При обратимых упругих деформациях изменяется  $\rho$ , а величины  $h$  и  $A$  — постоянны. Пластические деформации подразделяются на уплотнение (сплочение) и торшение. При уплотнении изменяются  $\rho$  и  $A$ , а изменение  $h$  незначительно. При торшении изменяются все параметры ледяного покрова  $\rho$ ,  $h$ ,  $A$ . При упругих деформациях и сплочении из (2.4) соответственно находим

$$2\epsilon = 1 - \rho_0 / \rho, \quad 2\epsilon = 1 - \rho_0 A_0 / (\rho A) \quad (2.5)$$

3. Выделим четыре фазовых состояния ледяного покрова: а) расплывшееся, б) сплоченное и α) всторошенное, β) невсторошенное. Лед, находящийся в состояниях а) или б), является всторошенным или невсторошенным. Основным типом взаимодействия льдин, составляющих расплывшийся ледяной покров, являются их столкновения. При этом льдины рас-

положены на поверхности жидкости так, что каждая из них может перемещаться в некоторой своей окрестности, не задевая окружающих льдин. Взаимодействие льдин, составляющих сплоченный ледяной покров, проявляется в их взаимном сжатии и трении в местах контактов. Отметим, что в реальной ситуации состояние ледяного покрова может быть в указанном выше смысле смешанным, поэтому можно говорить о преимущественном типе взаимодействия льдин для наблюдаемого участка ледяного покрова.

Полагается, что возможны следующие фазовые переходы: а)  $\alpha, \beta) \rightleftharpoons \rightleftharpoons \beta) \alpha, \beta), \beta, \beta) \rightarrow \beta, \alpha)$ . Переход  $\alpha \rightarrow \beta$  невозможен. Очевидно, что переход а)  $\rightarrow \beta)$  происходит при деформациях сжатия. Его можно сравнить с образованием твердого пористого скелета в грунтах [6]. Предполагается, что для любого участка расплывшегося ледяного покрова существует значение сплоченности  $A_*$ , зависящее от формы, размеров и взаимного расположения льдин, находящихся на рассматриваемом участке, при котором осуществляется переход в сплоченное состояние. Переход б)  $\rightarrow \alpha)$  происходит при деформациях растяжения при  $p = -\pi_b \leq 0$  ( $p = -1/2 \sigma_{ii}$ ). Давление  $\pi_b \neq 0$ , если между льдинами имеется сцепление.

Полагается, что условие торошения сплоченного ледяного покрова записывается в виде

$$|\tau_n| = f_t(\sigma_n, A, h) \quad (3.1)$$

где  $\tau_n$  и  $\sigma_n$  — касательная и нормальная составляющие напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ .

Для расплывшегося ледяного покрова полагается

$$\sigma_{ij} = dh/dt = d\rho/dt = 0 \quad (3.2)$$

Система (2.3), (3.2) является замкнутой и описывает поведение ледяного покрова при  $A < A(\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_{1,2}$  — лагранжевы координаты элемента ледяного покрова.

Сплоченный ледяной покров испытывает при нагружении упругие и пластические деформации. Условие пластичности принимается в виде:

$$|\tau_n| = (\sigma_n - \pi_b) \operatorname{tg} \gamma(A, h) \quad (3.3)$$

$$p = \pi_p(A, h) \quad (3.4)$$

где  $\gamma, \pi_p$  — угол внутреннего трения и давление, при котором  $dA/dt > 0$ ,  $dh/dt = 0$  при  $A < A_{**} \leq 1$  и  $dh/dt > 0$  при  $A = 1$ . Если (3.4) не выполнено, то  $dA/dt = dh/dt = 0$ .

Упругопластические деформации сдвига описываются уравнениями [4, 6]

$$\frac{ds}{dt} - \tau \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \lambda s = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + s \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \lambda \tau = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

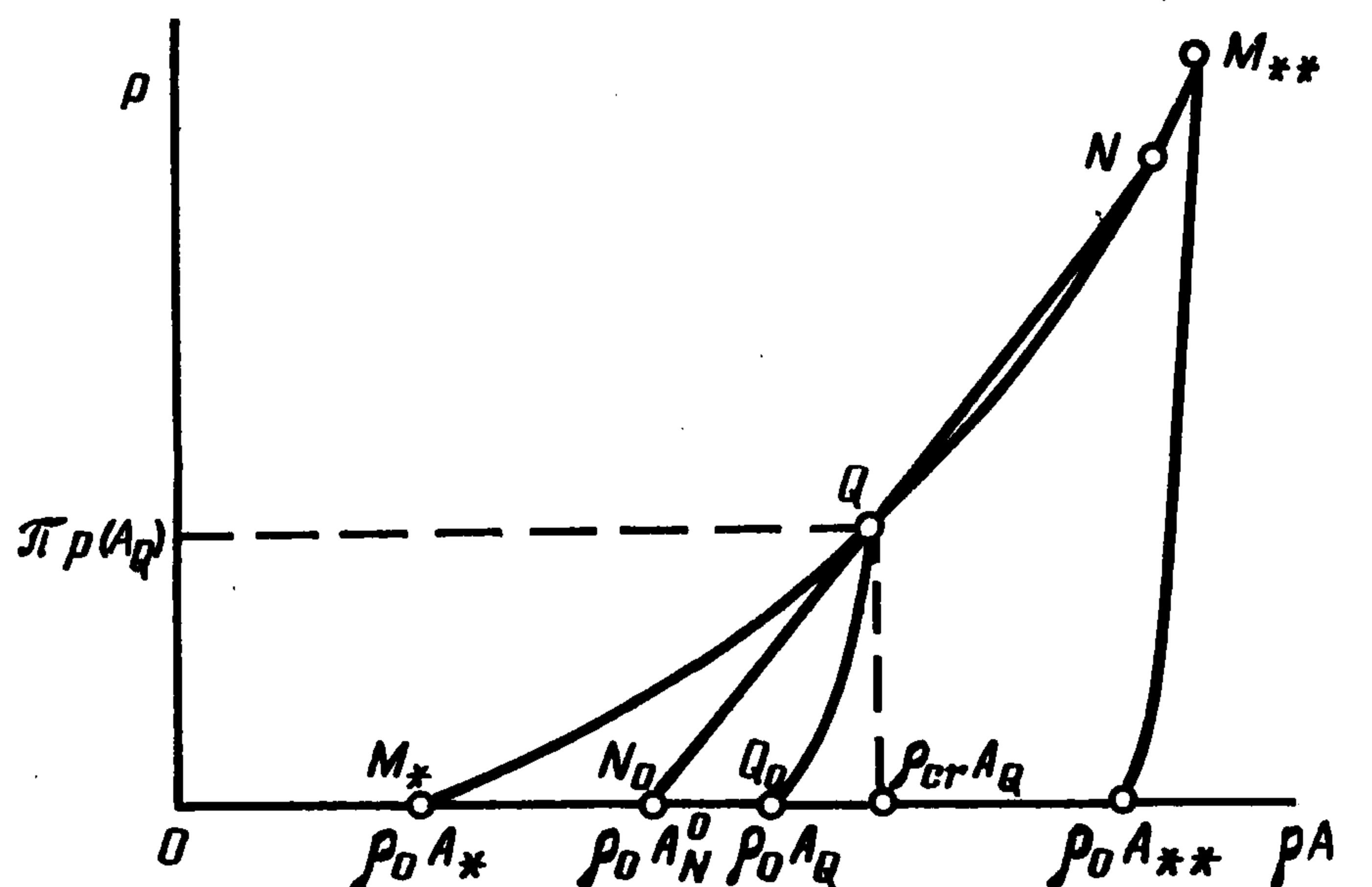
где  $s = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ ,  $\tau = \sigma_{12}$ , множитель  $\lambda = 0$ , если (3.3) не выполнено и выражается через  $s$  и  $\tau$  при выполнении (3.3),  $\mu = \mu(A, h)$  — модуль упругого сдвига.

Некоторые пластические эффекты, связанные с описанием конфигурации линий скольжения в ледяном покрове при воздействии на него квазистационарных нагрузок, исследованы в [4]. В данной работе основное внимание уделяется изучению процессов уплотнения ледяного покрова при сжатии. Процессы торошения не рассматриваются и полагается, что (3.1) не выполнено и  $dh/dt = 0$ . Необратимость деформаций при уплотнении связана с разрушением мелких льдин и краев более крупных льдин при сжатии. Образующиеся при этом обломки выжимаются в область чистой воды и на поверхность окружающих льдов, незначительно изменяя их толщину. Этот процесс можно сопоставить с разрушением скелета грунта при сжатии [6].

Примерная зависимость давления  $p$  от девиатора деформаций представлена на фиг. 1 в виде  $p = p(\rho, A)$  при  $\lambda_b = 0$ . Возможность такого представления вытекает из (2.6), (2.7). Кривая  $M^*QM^{**}$  описывается уравнением

$$p = \pi_p(A) \quad (3.6)$$

Величина  $\pi_p(A)$  является давлением, при котором происходит пластическое уплотнение сплоченного ледяного покрова сплоченности  $A$ .



Фиг. 1

Пусть какой-то элемент расплывшегося ледяного покрова переходит в сплоченное состояние при  $A = A^*$  в точке  $M^*$  (фиг. 1). При сжатии сплоченность растет, и для произвольной точки  $Q$  кривой  $M^*QM^{**}$  выполняется условие

$$p = p_{cr}(A_Q), \quad A_Q > A^*. \quad (3.7)$$

При уменьшении нагрузки ледяной покров ведет себя упруго и его сплоченность  $A_Q$  при этом не меняется. Разгрузке до  $p = 0$  соответствует на фиг. 1 кривая  $QQ_0$ :

$$p = \pi(A_Q, \rho) \quad (3.8)$$

Из (3.6)–(3.8) следует, что  $\rho_{cr}$  определяется из уравнения

$$\pi_p(A_Q) = \pi(A_Q, \rho_{cr}) \quad (3.9)$$

Дальнейшему растяжению ледяной покров не сопротивляется и сразу переходит в расплывшееся состояние.

Если растяжение сменится сжатием, то переход из расплывшегося состояния в сплоченное произойдет при  $A=A_Q$ . Таким образом, для состояния льда, полученного разгрузкой из точки  $Q$ , выполняется  $A^*=A_Q$ . Дальнейшее сжатие происходит в соответствии с законом (3.8) до момента (3.9), а затем ледяной покров пластически уплотняется в соответствии с (3.6). При чистом сжатии торшение начинается в точке  $M^{**}$  при  $p = \pi_p(A^{**})$ ,  $A=A^{**} \leq 1$ .

Предполагается, что функции  $\pi_p(A)$ ,  $\pi(A, \rho)$  удовлетворяют условиям

$$\frac{d^2\pi_p}{dA^2} \geq 0, \quad \frac{d\pi_p}{dA} \geq 0, \quad \frac{\partial^2\pi}{\partial\rho^2} \geq 0, \quad \frac{\partial\pi}{\partial\rho} \geq 0 \quad (3.10)$$

Выполнение первых двух условий (3.10) следует из определения тензора  $\sigma_{ij}$ , приведенное после уравнений (2.3), и интуитивных соображений о том, что при повышении сплоченности средняя площадь контактов между льдинами растет, происходит меньшая концентрация напряжений при сжатии, и льдины могут выдерживать более высокие нагрузки  $F_n$ .

В [3] было введено понятие давления  $\pi_p(A, h)$ , при котором в ледяном покрове возникают необратимые деформации, и предлагается эмпирическая формула [3]

$$\pi_p(A, h) = p^* h \exp[20(A-1)] \quad (3.11)$$

$$p^* = 5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$$

полученная из сопоставления численных расчетов с натурными наблюдениями. Очевидно, что кривая (3.11) удовлетворяет первым двум условиям (3.10).

Для обоснования последних двух условий (3.10) заметим, что в сплоченном ледяном покрове контакты между льдинами в плоскости  $z=0$  могут происходить по отрезкам конечной длины или иметь точечный характер. Если предположить, что при быстрых нагрузках льдины ведут себя упруго, то при точечном контакте двух льдин имеем [7]

$$F = kl^{3/2} \quad (3.12)$$

где  $F$  — сдавливающая сила,  $l$  — расстояние, на которое сближаются льдины под влиянием  $F$ ,  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии льдин в окрестности точки касания и их упругих постоянных.

Из (3.12) следует, что макроскопическое давление в ледяном покрове, состоящем из упругих льдин, имеющих точечные контакты, имеет порядок  $\epsilon^{3/2}$ , где  $\epsilon$  — девиатор макроскопического тензора деформаций.

Если льдины касаются по отрезкам, то можно предположить, что зависимость  $p(\epsilon)$  будет линейной при малых деформациях.

Таким образом, для малых упругих деформаций сжатия ледяного покрова в плоскости  $z=0$  можно предложить формулу

$$\pi(A, \rho) = k_1(A)(\rho - \rho_0)^{3/2} + k_2(A)(\rho - \rho_0) \quad (3.13)$$

Коэффициенты  $k_1(A)$ ,  $k_2(A)$  зависят также от размеров, формы, упругих постоянных льдин и от количества точечных и поверхностных контактов между льдинами. Очевидно, что функция (3.13) удовлетворяет последним двум условиям (3.10).

В предельном случае  $A=1$  можно принять закон Гука для обобщенного плоского напряженного состояния [8]

$$\pi(1, \rho) = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (3.14)$$

где  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда, они имеют порядки [9]

$$E \approx 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \nu \approx 0,3 \quad (3.15)$$

Из приведенной схемы видно, что напряженно-деформируемое состояние сплоченного льда и условия его перехода в расплывшееся состояние при нагрузках сжатия — растяжения определяются заданием функций (3.6), (3.8) и начального состояния на плоскости  $(p, \rho A)$ , т. е. величин  $A^*$  и  $A^{**}$ .

4. Выше было выделено два состояния ледяного покрова: расплывшееся и сплоченное. Представляет интерес исследование условий, при которых переход из одного состояния в другое, а также изменение параметров ледяного покрова в пределах одного состояния происходит скачком в рамках предложенной в разд. 3 реологической модели.

Рассматривая одномерные задачи динамики ледяного покрова однородной толщины  $h = \text{const}$  с характерными временами  $T \ll \Omega^{-1}$  в уравнениях (2.3), можно положить  $d'/dt = d/dt$  и записать их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A u) &= 0 \\ \rho h \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial \sigma}{\partial x} + F A \\ \sigma &= p(\rho, A) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Система уравнений (4.1) при учете соотношений (3.6) — (3.9) замкнута.

Соотношения на разрыве для (4.1) записываются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \rho_- A_- (u_- - D) &= \rho_+ A_+ (u_+ - D) \\ p_- + h \rho_- A_- u_- (u_- - D) &= p_+ + h \rho_+ A_+ u_+ (u_+ - D) \\ p_{\pm} &= p(\rho_{\pm}, A_{\pm}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

т. е. в виде законов сохранения массы и импульса,  $D$  — скорость распространения разрыва, индексы плюс и минус присвоены переменным с правого и левого берегов разрыва.

Из условий (4.2) находим

$$D = u_{\pm} \pm D^* \quad (4.3)$$

$$u_{\pm} = u_{\pm} \pm (1 - \rho_- A_- / (\rho_+ A_+)) D^*(A_{\pm}, \rho_{\pm}) \quad (4.4)$$

$$D^{*2} = \frac{A_+ \rho_+}{h A_- \rho_-} \frac{p_+ - p_-}{\rho_+ A_+ - \rho_- A_-}$$

Из (3.10) следует, что  $D^{*2} \geq 0$ .

В системе координат, связанной с разрывом, находим

$$u_{\pm} = \pm D^*, \quad u_{\pm} = \pm \rho_- A_- D^* / (\rho_+ A_+) \quad (4.5)$$

Верхний знак в (4.5) соответствует при  $\rho_- A_- < \rho_+ A_+$  скачкам уплотнения, а нижний — скачкам разрежения. При  $\rho_- A_- > \rho_+ A_+$  осуществляется обратная ситуация.

Совершая в (4.3), (4.4) предельный переход  $\rho_+ A_+ \rightarrow \rho_- A_-$ , получаем

$$D = u \pm c, \quad c^2 = h^{-1} dp/d(\rho A) \quad (4.6)$$

( $c$  — скорость распространения малых возмущений в покоящемся ледяном покрове). Из (3.10), (4.6) следует, что  $c^2$  увеличивается при росте  $\rho A$  на ветвях пластических и чисто упругих деформаций, определяемых функциями  $\pi$ ,  $\pi_p$ . Поэтому упругие и пластические скачки уплотнения эволюционны, а скачки разрежения неустойчивы [10, 11].

Закон сохранения энергии на скачке записывается в виде

$$\rho_- u_- + \frac{1}{2} h \rho_- u_-^2 A_- (u_- - D) + e = \rho_+ u_+ + \frac{1}{2} h \rho_+ u_+^2 A_+ (u_+ - D) \quad (4.7)$$

где  $e$  — энергия, выделяющаяся или поглощающаяся на скачке. Из (4.5), (4.7) находим

$$e = \pm \frac{1}{2} D^* (p_+ + p_-) (\rho_- A_- - \rho_+ A_+) / (\rho_+ A_+) \quad (4.8)$$

Отсюда видно, что скачки уплотнения распространяются с выделением энергии, а скачки разрежения — с поглощением энергии. Выделяющаяся на скачке уплотнения энергия расходуется на разрушение, хаотическое движение льдин и тепло. Из проведенного анализа можно сделать вывод о том, что в натуральных условиях могут реализовываться только скачки уплотнения.

Формулы (4.4) для чисто упругих скачков в сплоченном ледяном покрове с точностью до  $O((\rho_+ - \rho_-)/\rho_0)$  записываются в виде

$$R_1: u_{\pm} = u_{\pm} + \rho_0^{-1} (\rho_+ - \rho_-) D^*(A, \rho_{\pm}) \quad (4.9)$$

$$D^{*2} = h^{-1} (\pi_+ - \pi_-) / (\rho_+ - \rho_-), \quad \pi_{\pm} = \pi(A, \rho_{\pm})$$

Для пластических скачков уплотнения можно предположить, что деформации, связанные с изменением плотности, малы по сравнению с деформациями, обусловленными изменением сплоченности. Поэтому из (4.4) следует

$$R_2: u_{\pm} = u_{\pm} \pm (1 - A_- / A_+) D_p^*(A_{\pm}) \quad (4.10)$$

$$D_p^{*2} = \frac{A_+}{\rho_0 h A_-} \frac{\pi_{p,+} - \pi_{p,-}}{A_+ - A_-}, \quad \pi_{p,\pm} = \pi_p(A_{\pm})$$

Из (4.9), (4.10) для скоростей упругих и пластических волн слабой интенсивности предельным переходом  $\rho_+ \rightarrow \rho_-$ ,  $A_+ \rightarrow A_-$  получаем

$$c^2 = \frac{1}{hA} \frac{\partial \pi(\rho, A)}{\partial \rho}, \quad c_p^2 = \frac{1}{\rho_0 h} \frac{d\pi_p(A)}{dA} \quad (4.11)$$

Оценим скорости  $c$ ,  $c_p$  исходя из формул (3.7), (3.10), (3.11)

$$c(\rho, A=1) \approx 10^2 \sqrt{10} \text{ м/с}, \quad c_p(A) \approx \sqrt{60} \exp[20(A-1)] \text{ м/с}$$

Видно, что при отсутствии точечных контактов между льдинами  $c_p \ll c$ .

Рассмотрим скачки между расплывшимся и сплоченным ледяным покровом. Пусть расплывшийся ледяной покров находится слева от скачка. Отсюда следует, что в формулах (4.4) надо положить

$$p_- = 0, \quad \rho_- = \rho_0$$

Если при переходе через скачок сплоченность расплывшегося льда увеличивается до  $A_*$ , то, делая такие же как для скачков  $R_2$  предположения, из (4.4) получаем

$$R_3: u_+ = u_- \pm (1 - A_-/A_*) D_r^*(\rho_+, A_*, A_-)$$

$$D_r^{*2} = \frac{A_*}{\rho_0 h A_-} \frac{\pi(A_*, \rho_+)}{A_* - A_-}$$

При  $\rho_+ = \rho_{cr}$  получаем скачок типа  $R_3$  максимальной интенсивности

$$D_4: u_+ = u_- \pm (1 - A_-/A_*) D_{cr}^*(A_*, A_-)$$

$$D_{cr}^{*2} = \frac{A_*}{\rho_0 h A_-} \frac{\pi_p(A_*)}{A_* - A_-}$$

Возможно существование сильных скачков уплотнения для расплывшегося ледяного покрова. Пусть ледяной покров имеет сплоченность  $A_- < A_0$  и  $A_* = A_0$  (фиг. 1). Рассмотрим возможные варианты скачков, соединяющих расплывшееся состояние с параметрами  $\rho_0$ ,  $A$  со сплоченным состоянием с параметрами  $\rho_{cr}(A_N)$ ,  $A_N$  (точка  $N$  на фиг. 1). Проведем прямую  $NQ$  до пересечения с осью  $\rho A$  в точке  $\rho_0 A_N^0$ . При  $A_- \leq A_N^0$  переход из начального состояния в точку  $N$  может осуществляться скачком

$$R_5: u_+ = u_- \pm (1 - A_-/A_+) D_p^*(A_{\pm})$$

$$D_p^{*2} = \frac{A_+}{\rho_0 h A_-} \frac{\pi_p(A_+)}{A_+ - A_-}$$

Если  $A_- \in (A_N^0, A_0)$ , то переход из начального состояния в точку  $N$  при помощи одного скачка невозможен.

Из формул (4.4) следует, что скорость скачка  $D$  пропорциональна квадратному корню из тангенса угла наклона отрезка, соединяющего состояния за и перед скачком на кривой  $p = p(\rho, A)$  на фиг. 1. Поэтому наименьшую скорость распространения имеют скачки типа  $R_3$  между расплывшимся и сплоченным ледяным покровом. Разность скоростей дрейфа

ледяного покрова за и перед скачком близка к нулю, и выполняется условие  $|D^*| \ll |u_{\pm}|$ .

5. Рассмотрим задачу о столкновении двух сплоченных ледяных полей в момент времени  $t=0$ . Предполагается, что линия контакта полей совпадает с прямой  $x=z=0$ . Параметры ледяного покрова:  $A_1, u_1 > 0, \rho_0, p_1=0$  при  $x < 0, t=0$  и  $A_2, u_2 < u_1, \rho_0, p_2=0$  при  $x > 0, t=0$ . Движение каждого из ледяных полей описывается системой (4.1). Реология среды задается функциями  $\pi_1(A, \rho), \pi_{p,1}(A), A_{**1}$  при  $x < 0$  и  $\pi_2(A, \rho), \pi_{p,2}(A), A_{**2}$  при  $x > 0$ .

Всем условиям задачи легко удовлетворить, если на начальных этапах движения пренебречь внешними силами  $F$  в (4.1) и принять, что при  $t=0$  из точки  $x=0$  выходит система скачков типа  $R_1, R_2$ , параметры которых связаны соотношениями (4.3), (4.9), (4.10). Возможны следующие конфигурации скачков:

1°. Если уравнение

$$\begin{aligned} \rho_0(u_1 - u_2) &= (\rho_2^1 - \rho_0)D_2^1(\rho_2^1) + (\rho_1^1 - \rho_0)D_1^1(\rho_1^1) \\ (D_1^1(\rho_1^1) &= D^*(A_1, \rho_1^1, \rho_0), \quad D_2^1(\rho_2^1) = D^*(A_2, \rho_2^1, \rho_0)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\pi = \pi_1(A_1, \rho_1^1) = \pi_2(A_2, \rho_2^1) \leq \min_i(\pi_{p,i}(A_i)), \quad i=1, 2 \quad (5.2)$$

то при  $t=0$  из точки  $x=0$  выходит два скачка типа  $R_1$ .

Этот случай представлен на фиг. 2. Прямые  $r_1^1, r_2^1$  соответствуют скачкам и описываются уравнениями

$$x = D_{1,2}t, \quad D_i = u_i + (-1)^i D_i^1(\rho_i^1) \quad (5.3)$$

Прямая  $r$  соответствует границе между льдом, приходящим с разных полуосей  $x$ , и описывается уравнением

$$x = ut \quad (5.4)$$

где  $u$  — скорость дрейфа льда внутри углов  $\alpha_2, \beta_2$ . Сплоченность льда равна  $A_1$  внутри углов  $\alpha_{1,2}$  и  $A_2$  внутри углов  $\beta_{1,2}$ . Давление  $\pi$  и скорость дрейфа  $u$  в области  $\alpha_2, \beta_2$  определяются из соотношений (4.9), (5.1), (5.2). Траектории движения элементов ледяного покрова обозначены на фиг. 2 штриховыми линиями.

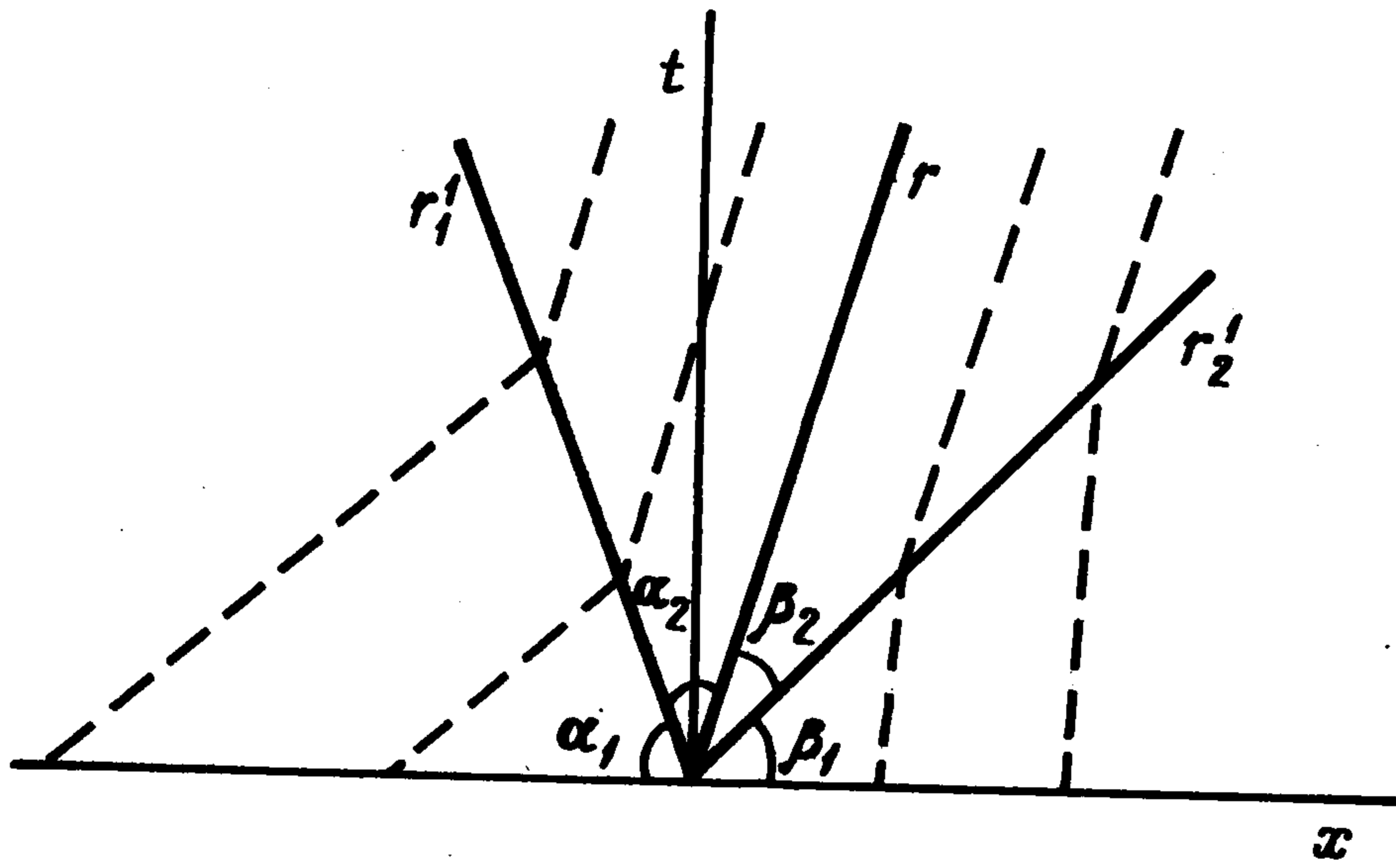
2°. Пусть уравнение (5.1) имеет решение, но условия (5.2) не выполняются и  $\min_i(\pi_{p,i}(A_i)) = \pi_{p,1}(A_1)$ . В этом случае ледяной покров, приходящий из области  $x < 0$ , уплотняется при столкновении.

Если уравнение

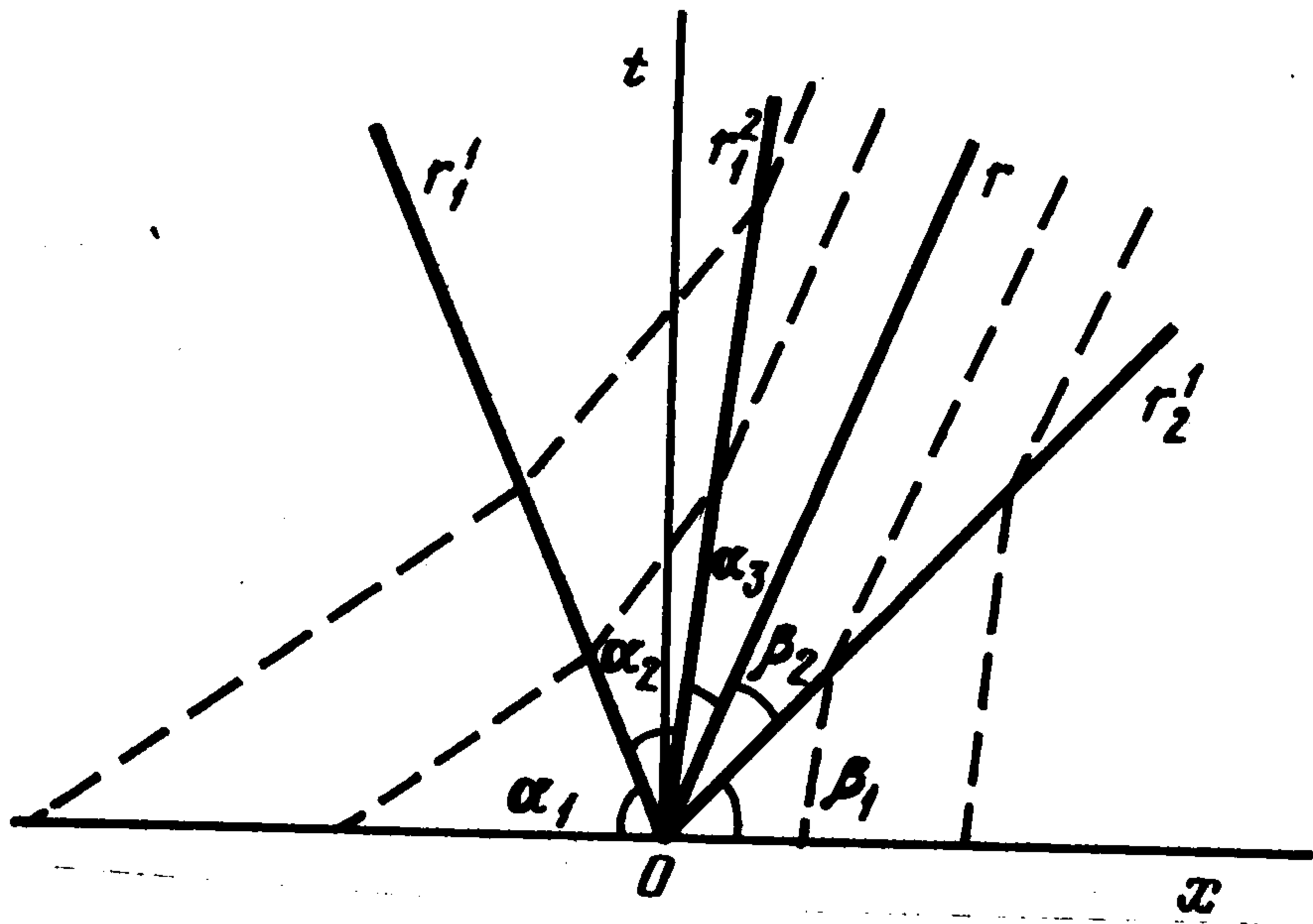
$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= ((\rho_2^1 - \rho_0)D_2^1(\rho_2^1) + (\rho_{cr,1} - \rho_0) \times \\ &\times D_1^1(\rho_{cr,1})) / \rho_0 + (A_1^2 - A_1)D_1^2(A_1^2) / A_1^2 \\ (D_1^2(A_1^2) &= D_p^*(A_1, A_1^2)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

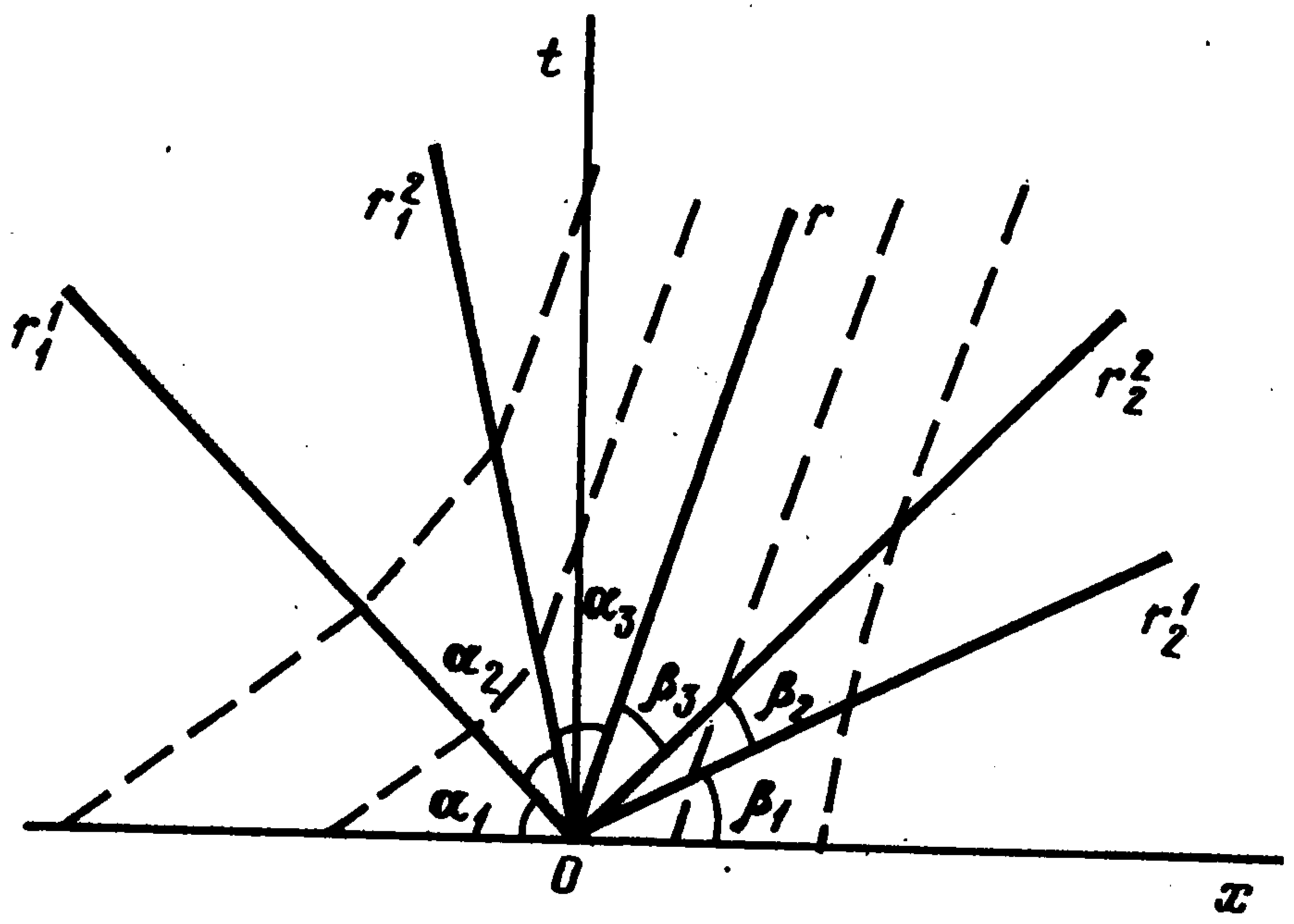
$$\pi = \pi_{p,1}(A_1^2) = \pi_2(A_2, \rho_2^1) \leq \pi_{p,2}(A_2) \quad (5.6)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

то при  $t=0$  из точки  $x=0$  выходят два скачка типа  $R_1$  и один скачок типа  $R_2$ .

Этот случай представлен на фиг. 3. Прямые  $r_1^1, r_2^1$  соответствуют скачкам типа  $R_1$  и описываются уравнениями (5.3), где

$$D_1 = u_1 - D_1^1(\rho_{cr,1}), \quad D_2 = u_2 + D_2^1(\rho_2^1)$$

Прямая  $r_1^2$  соответствует скачку типа  $R_2$  и описывается уравнением  $x = (u_1^1 - D_1^2(A_1^2))t$ , где  $u_1^1$  — скорость дрейфа в области  $\alpha_2$ . Прямая  $r$  описывается уравнением (5.4), где  $u$  — скорость дрейфа в областях  $\alpha_3, \beta_2$ . Сплоченности ледяного покрова в областях  $\alpha_{1,2}$  и  $\beta_{1,2}$  равны  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, сплоченность в  $\alpha_3$  равна  $A_1^2$ . Плотности в  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  равны  $\rho_{cr,1}$  и  $\rho_2^1$  соответственно. Давление в  $\alpha_2$  равно  $\pi_{p,1}(A_1)$ , в  $\alpha_3$  —  $\pi_{p,1}(A_1^2)$ , в  $\beta_2$  —  $\pi_2(\rho_2^1)$ . Величины  $u, A_1^2, \rho_2^1$  определяются из (4.9), (4.10), (5.5), (5.6).

3°. Если условия (5.2) не выполнены и  $\min_i(\pi_{p,i}(A_i)) = \pi_{p,2}(A_2)$ , то при столкновении уплотняется ледяной покров, приходящий с положительной полуоси  $x$ . Этот случай рассматривается аналогично случаю 2°.

4°. Пусть уравнение (5.5) имеет решение, но условия (5.2), (5.6) не выполняются. В этом случае ледяной покров, приходящий с обеих полуосей  $x$ , уплотняется при столкновении

Если уравнение

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 = & ((\rho_{cr,2} - \rho_0)D_2^1(\rho_{cr,2}) + (\rho_{cr,1} - \rho_0) \times \\ & \times D_1^1(\rho_{cr,1})) / \rho_0 + (A_2^2 - A_2)D_2^2(A_2^2) / A_2^2 + \\ & + (A_1^2 - A_1)D_1^2(A_1^2) / A_1^2 \\ & (D_2^2(A_2^2) = D_p^*(A_2, A_2^2)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$\pi = \pi_{p,1}(A_1^2) = \pi_{p,2}(A_2^2) \leq \min_i(\pi_{p,i}(A_{**i})) \quad (5.8)$$

то при  $t=0$  из точки  $x=0$  выходит два скачка типа  $R_1$  и два скачка типа  $R_2$ .

Этот случай представлен на фиг. 4. Прямые  $r_1^1, r_2^1$  соответствуют скачкам типа  $R_1$  и описываются уравнениями (5.3), где

$$D_i = u_i + (-1)^i D_i^1(\rho_{cr,i})$$

Прямые  $r_1^2, r_2^2$  соответствуют скачкам типа  $R_2$  и описываются уравнениями

$$x = (u_i^1 + (-1)^i D_i^2(A_i^2))t$$

где  $u_1^1$  и  $u_2^1$  скорости дрейфа в углах  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  соответственно. Прямая  $r$  описывается уравнением (5.4), где  $u$  — скорость дрейфа в углах  $\alpha_3, \beta_3$ . Сплоченность, плотность и давление в  $\alpha_{1,2}$  и  $\beta_{1,2}$  равны  $A_1, \rho_{cr,1}, \pi_{p,1}(A_1)$  и  $A_2, \rho_{cr,2}, \pi_{p,2}(A_2)$  соответственно. Сплоченность и давление в  $\alpha_3$  и  $\beta_3$  равны  $A_1^2, \pi_{p,1}(A_1^2)$  и  $A_2^2, \pi_{p,2}(A_2^2)$  соответственно. Величины  $u_1^1, u_2^1, u, A_1^2, A_2^2$  определяются из соотношений (4.9), (4.10), (5.7), (5.8).

Невыполнение условия (5.8) означает, что при столкновениях ледяных полей происходит их торошение.

Задачи о столкновении двух расплывшихся и расплывшегося со сплоченным ледяных полей исследуются аналогичным способом. В получаю-

щихся при этом в решении конфигурациях скачков участвуют волны типов  $R_1-R_5$ .

Отметим, что при столкновении двух расплывшихся ледяных полей малой сплоченности в области взаимодействия может реализовываться сложный дрейф льда, при котором скорости отдельных льдин сильно различаются и данная модель не применима. При достаточно большой сплоченности сталкивающихся полей можно предположить образование области сплоченного льда вблизи линии контакта.

6. Рассмотрим подробнее задачу о столкновении двух расплывшихся ледяных полей, для которых функции  $\pi_p(A)$ ,  $\pi(A, \rho)$  и значения  $A_*$ ,  $A_{**}$  одинаковы. Параметрам ледяного покрова, приходящим с отрицательной полуоси  $x$ , присваивается индекс 1, а с положительной полуоси  $x$  — индекс 2. Предполагается, что  $u_1 > 0$ ,  $u_1 > u_2$  и уравнение

$$(u_1 - u_2) A_* = (A_* - A_1) D_{r,1}^* + (A_* - A_2) D_{r,2}^*, \quad D_{r,i}^* = D_{r,i}^*(\rho, A_*, A_i) \quad (6.1)$$

имеет решение, удовлетворяющее условию

$$\pi(\rho, A_*) \leq \pi_p(A_*) \quad (6.2)$$

В этом случае после столкновения образуется узкая полоска льда сплоченности  $A_*$ , границами которой являются линии скачков типа  $R_3$ . Иллюстрацией этого случая может служить фиг. 2, где надо положить, что прямые  $r_1^1$ ,  $r_2^1$ ,  $r$  описываются уравнениями (5.3), (5.4), где  $D_i = u_i + (-1)^i D_{r,i}^*$  и  $u$  — скорость дрейфа в углах  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ . Сплоченность, плотность и давление в  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  равны  $A_*$ ,  $\rho$ ,  $\pi(\rho, A_*)$ . Скорость определяется из соотношений на скачке  $R_3$ :

$$u = u_1 - D_{r,1}^* (1 - A_1/A_*) \quad (6.3)$$

С течением времени картина движения будет меняться, так как станет существенным влияние на ледяной покров внешних сил, которые запишем в виде

$$F = \rho_a C_a(A) V^2 - \rho_w C_w u \quad (6.4)$$

Первое слагаемое — сила турбулентного трения ветра о поверхность жидкости с ледяным покровом [12],  $\rho_a$ ,  $C_a$ ,  $V$  — плотность воздуха, коэффициент трения, скорость ветра; второе слагаемое — ньютоновская сила трения, действующая со стороны покоящейся в глубине жидкости на ледяной покров [12],  $\rho_w$ ,  $C_w$  — плотность жидкости и коэффициент трения.

Функция  $C_a(A)$  согласно экспериментальным данным имеет вид [13], представленный на фиг. 5. Форма кривой  $C_a(A)$  объясняется тем, что шероховатость свободной ото льда и полностью покрытой льдом поверхности жидкости меньше, чем поверхности жидкости, частично покрытой льдом.

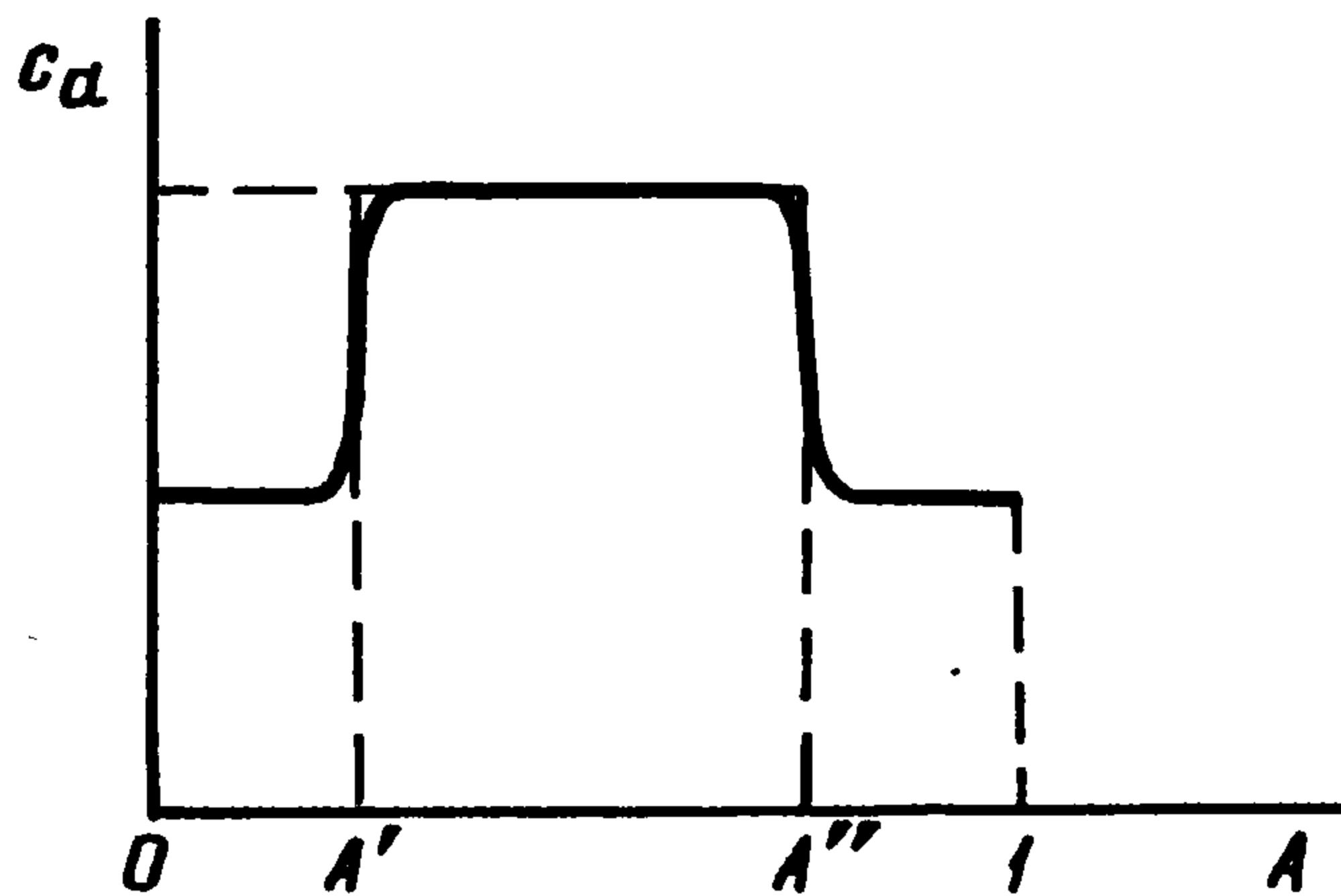
Из соотношений (4.1), (6.4), (6.5) следует, что скорость стационарного дрейфа ледяного покрова однородной сплоченности  $A = \text{const}$  равна

$$u_s(A, V) = \frac{\rho_a C_a(A)}{\rho_w C_w} V^2, \quad V = \text{const}$$

Отсюда видно, что столкновение двух ледяных полей может быть вызвано различным влиянием ветра на лед разной сплоченности. В связи с этим в рассмотренной выше задаче будем полагать

$$u_i = u_s(A_i, V), \quad A_1 \in (A', A''), \quad A_2 \in (A'', 1)$$

Очевидно, что при столкновении образуется полоска сплоченного льда со сплоченностью  $A_* \in (A'', 1)$ . Начальная скорость ее движения  $u$  определяется соотноше-



Фиг. 5

ниями (6.3) и лежит в интервале  $(u_1, u_2)$ . Поэтому со стороны жидкости на полосу будет действовать ньютоновская сила трения, стремящаяся уменьшить ее скорость.

Запишем закон сохранения импульса для полосы в целом и законы сохранения массы на сторонах полосы  $r_1^1$  и  $r_2^1$ :

$$\begin{aligned} d(uA \cdot (L_2 - L_1))/dt &= A_1 u_1 (u_1 - D) + \\ &+ A_2 u_2 (D_2 - u_2) + (\rho_0 h)^{-1} (L_2 - L_1) (\rho_a C_a (A_*) V^2 - \rho_w C_w u) \\ A_i (D_i - u_i) &= A \cdot (D_i - u), \quad dL_i/dt = D_i, \quad i=1, 2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\rho_0 h A_*}{\rho_w C_w} \frac{du}{dt} = u_s(A_*, V) - u \quad (6.6)$$

В качестве начального значения  $u(t=0)$  следует взять (6.3).

Из уравнения (6.6) следует, что при больших временах скорость полосы стремится к  $u_s(A_*, V) = u_2$ . Это означает, что интенсивность разрыва  $r_2^1$  стремится к нулю, а  $r_1^1$  — к постоянной величине, определяемой соотношениями для  $R_3$  при  $u_- = u_1$ ,  $A_- = A_1$ .

7. Рассмотрим задачу об уплотнении ледяного покрова вблизи твердой стенки. Пусть дрейфующий с постоянной скоростью  $u > 0$  и имеющий сплоченность  $A$  ледяной покров встречается при  $t=0$  в точке  $x=0$  твердое препятствие, и мгновенно его скорость в точке  $x=0$  становится равной нулю. Потеря импульса в соответствии с законом сохранения импульса приводит к резкому повышению давления ледяного покрова на стенку, которое в каждом из рассматриваемых случаев определяется из приводимых ниже уравнений (7.1), (7.3), (7.5), (7.7), (7.9).

Предположим, что ледяной покров находится в сплоченном состоянии, т. е.  $A = A_*$ . Если уравнение

$$u = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{(\rho_1 - \rho_0) \pi(\rho_1, A)}{h} \right)^{1/2} \quad (7.1)$$

имеет решение, удовлетворяющее условию

$$\pi(\rho_1, A) \leq \pi_p(A) \quad (7.2)$$

то из точки  $x=0$  при  $t=0$  выходит скачок типа  $R1$ . Если уравнение

$$u = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{(\rho_{cr} - \rho_0) \pi_p(A)}{h} \right)^{1/2} + \left( \frac{(A_1 - A) (\pi_p(A_1) - \pi_p(A))}{\rho_0 h A A_1} \right)^{1/2} \quad (7.3)$$

имеет решение, удовлетворяющее условию

$$A_1 \leq A_{**} \quad (7.4)$$

то из точки  $x=0$  при  $t=0$  выходит скачок типа  $R_1$  и скачок типа  $R_2$ . В этом случае ледяной покров уплотняется вблизи стенки.

Если условие (7.4) не выполняется, то около стенки происходит торошение. Измеряя давления  $\pi, \pi_p$  и скорость  $u$  можно на основании соотношений (7.1), (7.3) определить зависимости  $\rho_{cr}(A), \pi_p(A), \pi(\rho, A)$ .

Пусть ледяной покров, дрейфующий на стенку, находится в расплывшемся состоянии и имеет сплоченность  $A < A_*$ . Если уравнение

$$u = \left( \frac{(A_* - A)\pi(\rho, A_*)}{\rho_0 h A A_*} \right)^{1/2} \quad (7.5)$$

имеет решение, удовлетворяющее условию

$$\pi(\rho, A_*) < \pi_p(A_*) \quad (7.6)$$

то из точки  $x=0$  при  $t=0$  выходит скачок типа  $R_3$ .

Если условие (7.6) не выполнено, то ледяной покров уплотняется вблизи стенки.

Если уравнение

$$u = \left( \frac{(A_1 - A)\pi_p(A_1)}{\rho_0 h A A_1} \right)^{1/2} \quad (7.7)$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$A_1 \leq A_{**}, \quad \frac{\pi_p(A_1)}{A_1 - A} \leq \frac{\pi_p(A_1) - \pi_p(A_*)}{A_1 - A_*} \quad (7.8)$$

то из точки  $x=0$  при  $t=0$  выходит скачок типа  $R_5$ .

Если второе условие (7.8) не выполняется, а первое выполнено, то давление на стенку  $\pi_p(A_1)$  находится из решения уравнения

$$u = \left( \frac{(A_* - A)\pi_p(A_*)}{\rho_0 h A A_*} \right)^{1/2} + \left( \frac{(A_1 - A_*)(\pi_p(A_1) - \pi_p(A_*))}{\rho_0 h A_1 A_*} \right)^{1/2} \quad (7.9)$$

В этом случае из точки  $x=0$  при  $t=0$  выходит скачок типа  $R_4$ , а за ним скачок типа  $R_2$ . За первым скачком происходит повышение сплоченности ледяного покрова до  $A_*$ , а за вторым — до  $A_1$ . Если первое условие (7.8) не выполняется, то ледяной покров при столкновении с препятствием тороится.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов Н. Н.* Льды Арктики. М.: Изд-во Главсевморпути, 1945. 350 с.
2. *Тимохов Л. А., Хейсин Д. Е.* Динамика морских льдов. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 272 с.
3. *Hibler W. D.*, III. A dynamic thermodynamic sea ice model // J. Phys. Oceanogr. 1979. V. 9. № 4. P. 815–845.
4. *Pritchard R. S.* Mathematical characteristics of sea ice dynamics models // J. Geoph. Res. 1988. V. 93. No. C12. P. 15,609–15,618.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. М.: Наука, 1964. 567 с.
6. *Григорян С. С.* Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057–1072.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.; Т. 2. 1984. 560 с.
9. *Богородский В. В., Гаврило В. П.* Лед. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. *Назаров В. Е., Островский Л. А.* Упругие волны в средах с сильной акустической нелинейностью // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 106–110.
12. *Roed L. P., O'Brien J. J.* A coupled ice-ocean model of upwelling in the marginal ice zone // J. Geoph. Res. Ser. C. 1983. V. 88. № 5. P. 2863–2872.
13. *Быкова Л. П., Преображенский Л. Ю.* Аэродинамические характеристики подстилающей поверхности арктических районов // Тр. Глав. геофиз. обсерватории. 1977. Вып. 399. С. 52–63.

Москва

Поступила в редакцию  
14.II.1991