Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 534.26:517.955.8

© 1992 г. Р. Р. Гадыльшин

МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассматривается резонатор Гельмгольца достаточно произвольной формы. Для рассеянного поля строится асимптотика по малому параметру (линейному размеру отверстия).

1. Постановка задачи. Пусть ограниченная область $\Omega\subset R^3$ имеет достаточно гладкую границу Γ_0, а Γ_ε получено из Γ_0 вырезанием отверстия ω_ε с линейными размерами порядка $0<\varepsilon\ll 1$ (акустический резонатор Гельмгольца). Предполагается, что пространство заполнено однородной и изотропной жидкой или газообразной средой.

Если на поверхности Γ_ε задано значение нормальной составляющей потенциальной скорости $\mathbf{v}_\varepsilon=\operatorname{grad} u_\varepsilon$:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}=f \text{ на } \Gamma_\varepsilon \tag{1.1}$$

то потенциал u_ε является решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условию излучения Зомерфельда

$$(\Delta+k^2)u_\varepsilon=0,\ x\in R^3\backslash\Gamma_\varepsilon \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}-iku_\varepsilon=o(r^{-1})\quad (r\to\infty) \tag{1.3}$$

и условию Мейкснера на кромке поверхности Γ_ε. Здесь и всюду далее $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Ω, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $r=|x|$.

К решению краевой задачи (1.1)—(1.3) сводится и задача нахождения рассеянного поля u_ε, возникающего при отражении плоской волны $u^{\text{in}}=A_0e^{i(\mathbf{k}x)}$ от идеально жесткой поверхности Γ_ε, $k=|\mathbf{k}|$. В этом случае в (1.1) надо положить $f=-\partial u^{\text{in}}/\partial\mathbf{n}$.

Резонансные явления в (1.1)—(1.3) возникают при k, близких к k_0, где k_0^2 — собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в области Ω. В частности, при падении плоской волны поле, отраженное от Γ_ε, отличается от поля, отраженного от Γ_0, на величину порядка $O(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Исследование этих явлений для сферы с малым отверстием восходит к работам Гельмгольца и Релея [1] и продолжается до настоящего времени (см., например, [2] и содержащийся в этой работе обзор литературы). В настоящей работе рассмотрен резонатор достаточно произвольной формы.

2. Основные результаты. Резонансные явления объясняются следующим [3–5]: функция Грина $G_\varepsilon(x, y, k)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) допускает аналитическое продолжение по k в комплексную плоскость и имеет в полуплоскости $\operatorname{Im} k<0$ полюсы τ_ε. Часть из этих полюсов в пределе при $\varepsilon\to0$ принимает вещественные значения k_0, причем k_0^2 – собственные значения задачи Неймана в Ω. И если $k_0^2\neq0$ – простое собственное значение (именно этот случай будет рассмотрен), то существует единственный полюс первого порядка $\tau_\varepsilon\to k_0$ при $\varepsilon\to0$. Наличие такого полюса и объясняет резонансные явления при вещественных k, близких к k_0. Выражение решения (1.1)–(1.3) через функцию Грина дает для него следующее представление:

$$u_\varepsilon(x,k)=\frac{\psi_\varepsilon(x)}{\tau_\varepsilon^2-k^2}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\{\psi_\varepsilon(y)\}f(y)\,dy+U_\varepsilon(x,k) \tag{2.1}$$

где $2\pi i\psi_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(y)$ – вычет функции $G_\varepsilon(x, y, k)$ в полюсе $k=\tau_\varepsilon$, квазисобственная функция $\psi_\varepsilon(x)$ является решением краевой задачи (1.1), (1.2) при $k=\tau_\varepsilon$, $f=0$,

$$\{\psi_\varepsilon(x)\}\triangleq\lim_{y\to x}\psi_\varepsilon(y)-\lim_{z\to x}\psi_\varepsilon(z)\quad(x\in\Gamma_0,\ y\in\Omega,\ z\notin\overline{\Omega})$$

Обозначим через $\psi_0(x)$ собственную функцию задачи Неймана для оператора Лапласа в Ω, соответствующую собственному значению k_0^2, нормированную в $L_2(\Omega)$ и продолженную нулем вне Ω. А через $U_0(x; k)$ обозначим решение краевой задачи

$$(\Delta+k^2)U_0=0\quad x\notin\overline{\Omega},\ \frac{\partial U_0}{\partial\mathbf{n}}=f\quad x\in\Gamma_0 \tag{2.2}$$

удовлетворяющее условию излучения (1.3).

Показано[1], что $\psi_\varepsilon\to\psi_0$ при $\varepsilon\to0$ в $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(K\setminus\Omega)$,

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\{\psi_\varepsilon\}f\,dx\to\int\limits_{\Gamma_0}\psi_0 f\,dx \tag{2.3}$$

при $\varepsilon\to0$, а функция $U_\varepsilon\to U_0$ в $W_2^1(K\setminus\Omega)$ равномерна по k, близким к k_0, и ограничена в $W_2^1(\Omega)$ равномерно по ε и k, близким к нулю и k_0 соответственно; K – произвольный компакт в R^3.

Очевидно, что при k, близких к k_0, первое слагаемое в (2.1) дает существенный вклад в решение u_ε. Для более точной оценки этого вклада необходимо знать поведение τ_ε и $\psi_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to0$. Асимптотика этих величин строится методом согласования асимптотических разложений [6, 7] и аналогична по технике построению асимптотик собственных значений эллиптических краевых задач в сингулярно возмущенных областях [8, 9]. Построение будет проведено ниже.

В предположении, что Ω в окрестности начала координат совпадает с полупространством $x_3>0$, ω – двумерная область с гладкой границей на

[1] *Гадыльшин Р. Р.* Поверхностные потенциалы в задаче о резонаторе Гельмгольца. Уфа. 1990. 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 3.08.90, № 4476-В90.

плоскости $x_3=0$, а $\omega_\varepsilon=\{x;\ x\varepsilon^{-1}\in\omega\}$, асимптотика полюса τ_ε имеет вид

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \tau_j \tag{2.4}$$

$$\tau_1=\pi\psi_0^2(0)c_\omega/(2k_0),\ \operatorname{Im}\tau_2=-\sigma(\pi\psi_0(0)c_\omega)^2/2$$

где c_ω — емкость «пластины» ω [10], σ — поперечное сечение [11] функции Грина $G(x,\ y,\ k_0)$ задачи Неймана для оператора Гельмгольца вне Ω при $y=0$.

Для $\psi_\varepsilon(x)$ справедливо разложение

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(x),\ x \in \Omega \setminus S(\varepsilon^{1/2}) \tag{2.5}$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(x/\varepsilon),\ x \in S(2\varepsilon^{1/2}) \tag{2.6}$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j P_j(D_y) G(x, 0, \tau_\varepsilon), \quad x \notin \Omega \cup S(\varepsilon^{1/2}), \quad P_1 = \pi\psi_0(0)\, c_\omega \tag{2.7}$$

равномерное в $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(K\setminus\bar\Omega)$ для любого компакта $K\subset R^3$. Здесь $S(t)$ — шар радиуса t с центром в начале координат, $P_j(D_y)$ — дифференциальные многочлены j-го порядка по переменной y с постоянными коэффициентами.

Пусть $\psi_0(0)\neq 0$. Тогда из (2.1), (2.4) следует, что резонансные явления в наибольшей степени наблюдаются при вещественных

$$k=k_0+\varepsilon\tau_1+\varepsilon^2(k_2+o(1)) \tag{2.8}$$

Если к тому же

$$a_f = \int_{\Gamma_0} \psi_0 f\, dx \neq 0 \tag{2.9}$$

то, подставляя асимптотические разложения (2.4)–(2.7) в (2.1) и учитывая (2.3), для решения краевой задачи (1.1)–(1.3) получаем представление

$$\begin{gathered} u_\varepsilon(x;\ \mathbf{k})\sim A_f\varepsilon^{-2}\psi_0(x),\ x\in\Omega\setminus S(\varepsilon^{1/2});\ u_\varepsilon(x;\ \mathbf{k})\sim A_f\varepsilon^{-2}v_0(x/\varepsilon) \\ x\in S(2\varepsilon^{1/2});\ u_\varepsilon(x;\ \mathbf{k})\sim A_f\varepsilon^{-1}P_0G(x,\ 0,\ k),\ x\notin\Omega\cup S(\varepsilon^{1/2}) \\ A_f=a_f(2k_0(\tau_2-k_2))^{-1} \end{gathered} \tag{2.10}$$

справедливое для любого компакта $K\subset R^3$ в $W_2^1(\Omega)$, $W_2^1(K\setminus\bar\Omega)$.

При отыскании рассеянного поля u_ε, возникающего при отражении плоской волны u^{in} от идеально жесткой поверхности Γ_ε, ситуация несколько иная, так как условие (2.9) не выполняется.

Пусть $u_0(x;\ \mathbf{k})$ — рассеянное поле, возникающее вне Ω при отражении плоской волны $u^{\text{in}}(x;\ \mathbf{k})$ от Γ_0 (решение краевой задачи (2.2), (1.3) при $f=-\partial u^{\text{in}}/\partial\mathbf{n}$), а $u=u_0+u^{\text{in}}$ в $R^3\setminus\Omega$.

Интегрируя по частям левую часть равенства

$$\int\limits_{S(R)} u^{in}(x;\mathbf{k})(\Delta+\tau_\varepsilon^2)\psi_\varepsilon(x)\,dx=0$$

при достаточно большом фиксированном R и учитывая асимптотику (2.8) функции $\psi_\varepsilon(x)$, получаем следующее соотношение:

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\{\psi_\varepsilon(x)\}\frac{\partial u^{\text{in}}(x;\mathbf{k})}{\partial\mathbf{n}}ds=$$

$$=-\varepsilon P_0u(0;\mathbf{k}_0)+O(\varepsilon(|k-k_0|+|\tau_\varepsilon-k_0|)+(k-\tau_\varepsilon))\qquad(2.11)$$

Допустим, что $u(0,\mathbf{k}_0)\neq 0$, а k удовлетворяет соотношению (2.8). Тогда, подставляя (2.5)–(2.8), (2.11) в (2.1), получаем главные члены асимптотик для рассеянного поля

$$u_\varepsilon(x;\mathbf{k})\sim b\varepsilon^{-1}\psi_0(x),\ x\in\Omega\backslash S(\varepsilon^{1/2});\ u_\varepsilon(x;\mathbf{k})\sim b\varepsilon^{-1}v_0(x/\varepsilon)$$

$$x\in S(2\varepsilon^{1/2});\ u_\varepsilon(x;\mathbf{k})\sim bP_0G(x,0,k)+u_0(x,k_0),\ x\notin\Omega\cup S(\varepsilon^{1/2})$$

$$b=u(0,\mathbf{k}_0)P_0(2k_0(\tau_2-k_2))^{-1}\qquad(2.12)$$

Представление (2.12) справедливо в $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(K\backslash\bar{\Omega})$ для любого компакта $K\subset R^3$.

3. Построение асимптотики τ_ε. Покажем справедливость соотношений (2.4)–(2.7). Ряды (2.5)–(2.7) строятся асимптотически согласованными в нуле: т. е. двойной ряд, полученный из (2.5) заменой его коэффициентов на их асимптотики в нуле, совпадает с двойным рядом, полученным из (2.6) заменой коэффициентов на их асимптотики при $\rho=r\varepsilon^{-1}\to\infty$, $\xi_3\geqslant 0$. Аналогично ряд, полученный из (2.7) заменой коэффициентов на их асимптотики в нуле, совпадает с рядом, полученным из (2.6) заменой коэффициентов на их асимптотики при $\rho\to\infty$, $\xi_3\leqslant 0$. Ряды (2.4)–(2.7) невозможно построить независимо друг от друга. И только их сопоставление позволяет построить эти ряды полностью.

Краевые задачи для коэффициентов ряда (2.5) получаются подстановкой рядов (2.4), (2.5) в (1.1), (1.2), выписыванием отдельно равенств при одинаковых степенях ε и переходом к формальному пределу при $\varepsilon\to 0$:

$$(\Delta+k_0^2)\psi_j=-2k_0\sum_{t=1}^{j-1}\tau_t\psi_{j-t},\quad x\in\Omega,\quad \partial\psi_j/\partial\mathbf{n}=0,\quad x\in\Gamma_0\diagdown 0\quad(3.1)$$

Аналогично в переменных $\xi=x\varepsilon^{-1}$ получаем краевые задачи для коэффициентов ряда (2.6). В частности,

$$\Delta_\xi v_0=0\ \ \xi\notin\bar{\gamma},\ \partial v_3/\partial\xi_3=0\ \ \xi\in\gamma\qquad(3.2)$$

где $\gamma=R^2\backslash\bar{\omega}$, R^2 – плоскость $\xi_3=0$.

Функция Грина $G(x,y,k)$ непрерывна при вещественных k и допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, причем в некоторой окрестности вещественной оси она не имеет полюсов [12, 13]. Следовательно, ряд (2.7) является формальным асимптотическим решением уравнения (1.2) вне Ω при $k=\tau_\varepsilon$.

Разложим собственную функцию $\psi_0(x)$ в ряд Тейлора в нуле

$$\psi_0(x)=\psi_0(0)+O(r) \tag{3.3}$$

Переписывая (3.3) в переменных $\xi=x\varepsilon^{-1}$, из условия согласования рядов (2.5), (2.6) получаем, что

$$v_0(\xi)\sim\psi_0(0),\ \rho\to\infty,\ \xi_3\geqslant0$$

Существует плотность $\mu(\xi)\in C^\infty(\omega)$, такая, что потенциал простого слоя $Y(\xi)$ с данной плотностью равен единице на ω и принадлежит $W_2^1(K\backslash\bar\gamma)$ для любого компакта $K\subset R^3$ [14]. Положим функцию $v_0(\xi)$ равной $\psi_0(0)(1-Y(\xi)/2)$ при $\xi_3\geqslant0$ и $Y(\xi)/2$ при $\xi_3\leqslant0$. В силу определения $v_0\in W_2^1(K\backslash\bar\gamma)$ является решением краевой задачи (3.3) и имеет на бесконечности асимптотики

$$v_0(\xi)=\begin{cases}\psi_0(0)-{}^1/_2c_\omega\psi_0(0)\rho^{-1}+O(\rho^{-2}), & \xi_3\geqslant0\\ {}^1/_2\psi_0(0)c_\omega\rho^{-1}+O(\rho^{-2}), & \xi_3\leqslant0\end{cases} \tag{3.4}$$

Таким образом, на первом шаге ряды (2.5), (2.6) согласованы.

Переписывая уже (3.4) в переменных $x=\xi\varepsilon$, получаем главные члены асимптотик в нуле для коэффициентов рядов (2.5), (2.7). В частности

$$\psi_1(x)\sim-{}^1/_2\psi_0(0)c_\omega r^{-1},\ P_0G(x,\ 0,\ \tau_t)\sim{}^1/_2\psi_0(0)c_\omega r^{-1} \tag{3.5}$$

Из аналитичности функции $G(x,\ 0,\ k)$ по переменной k в окрестности k_0 и ее асимптотики в нуле по переменной x следует справедливость равенства (2.7) для P_0.

Определим теперь $\psi_1(x)$ и τ_1. Существует функция $X(x)\in C^\infty(\bar\Omega\backslash0)$, являющаяся решением краевой задачи

$$(\Delta+k_0^2)X(x)=2\pi\psi_0(0)\psi_0(x)\quad x\in\Omega,\ \partial X/\partial n=0\quad x\in\Gamma_0\backslash0 \tag{3.6}$$

и имеющая в нуле асимптотику вида $X(x)=r^{-1}+O(1)$. Это утверждение легко доказать, представив

$$X(x)=r^{-1}\cos k_0r+X_0(x)$$

где $X_0(x)\in C^\infty(\bar\Omega)$ [9]. Отсюда следует, что функция $\psi_1(x)=-{}^1/_2c_\omega\psi_0(0)X(x)$ является решением краевой задачи (3.1) при τ_1 из (2.4) и имеет в нуле заданную асимптотику (3.5).

Продолжая согласование, легко построить остальные асимптотически согласованные коэффициенты $\psi_j(x)=O(r^{-j})$ при $r\to0$, $v_j(\xi)=O(\rho^j)$ при $\rho\to\infty$, $P_j(D_y)G(x,\ 0,\ k)$, являющиеся решениями рекуррентных краевых задач в соответствующих областях, причем коэффициенты τ_j определяются из условия разрешимости краевых задач (3.1) для ψ_j.

Покажем справедливость (2.5) для $\operatorname{Im}\tau_2$. Пусть $B(R,\ t)=S(R)\backslash(\Omega\cup S(t))$. Интегрируя по частям при больших R и вещественных k, получаем

$$0=\operatorname{Im}\int\limits_{B(R,\,R^{-1})}\overline{G(x,0,k)}\,\Delta G(x,0,k)\,dx=k\sigma-\operatorname{Im}G(0,0,k)+O(R^{-1})$$

Следовательно, при $r \to 0$

$$\operatorname{Im} G(x,\ 0,\ k) = k\sigma + O(r)$$
$$\operatorname{Im} \varepsilon P_0 G(x,\ 0,\ k) = \varepsilon (P_0 k\sigma + O(r)) \tag{3.7}$$

Переписывая (3.7) в переменных ξ, получаем, что $\operatorname{Im} v_1(\xi) \sim P_0 k_0 \sigma$ при $\rho \to \infty$, $\xi_3 \leqslant 0$. Краевая задача для $\operatorname{Im} v_1$ имеет вид

$$\Delta \operatorname{Im} v_1 = 0\ \ \xi \notin \bar{\gamma},\ \ \partial \operatorname{Im} v_1 / \partial \xi_3 = 0\ \ \xi \in \gamma \tag{3.8}$$

Функция

$$\operatorname{Im} v_1(\xi) = \psi_0^{-1}(0) P_0 k_0 \sigma v_0(\xi_1,\ \xi_2,\ -\xi_3)$$

является решением краевой задачи (3.8) и имеет при $\rho \to \infty$ асимптотики

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} v_1(\xi) = {}^1/_2 \pi \psi_0(0) k_0 \sigma c_\omega{}^2 \rho^{-1} + O(\rho^{-2}),\ \ \xi_3 \geqslant 0 \\ &\operatorname{Im} v_1(\xi) = \pi \psi_0(0) k_0 \sigma c_\omega + O(\rho^{-1}),\ \ \xi_3 \leqslant 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Переписывая (3.9) в переменных x, получаем, что

$$\operatorname{Im} u_2 \sim {}^1/_2 \pi \psi_0(0) k_0 \sigma c_\omega{}^2 r^{-1},\ \ r \to 0 \tag{3.10}$$

Краевая задача для $\operatorname{Im} u_2$ в силу (3.1) имеет вид

$$(\Delta + k_0{}^2) \operatorname{Im} u_2(x) = -2k_0 \operatorname{Im} \tau_2 \psi_0(x)\ \ x \in \Omega,\ \ \partial \operatorname{Im} u_2 / \partial \mathbf{n} = 0$$
$$x \in \Gamma_0 \setminus 0 \tag{3.11}$$

Положим

$$\operatorname{Im} u_2 = {}^1/_2 \pi \psi_0(0) k_0 \sigma c_\omega{}^2 X(x)$$

а $\operatorname{Im} \tau_2$ в соответствии с (2.4). Тогда функция $\operatorname{Im} u_2(x)$ будет являться решением краевой задачи (3.11) и иметь в нуле асимптотику (3.10).

Таким образом построены асимптотически согласованные ряды (2.4) — (2.7). Из оценок, приведенных в [2], следует, что ряды (2.4) — (2.7) являются асимптотическими разложениями полюса τ_ε и соответствующей квазисобственной функции $\psi_\varepsilon(x)$ в указанных нормах.

Условие уплощения границы в окрестности отверстия влияет на асимптотику τ_ε. Пусть граница Γ_0 в окрестности начала координат задается уравнением

$$x_3 = F(x_1,\ x_2) = a_1 x_1{}^2 + a_2 x_2{}^2 + O(r^3)$$
$$\omega_\varepsilon' = \{x;\ x_3 = F(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_2) \in \omega_\varepsilon\},\ \ \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0 \setminus \overline{\omega}_\varepsilon'$$

В этом случае асимптотическое разложение полюса τ_ε, вообще говоря, содержит степени $\ln \varepsilon$, но в главном

$$\tau_\varepsilon = k_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 + O(\varepsilon^3 \ln \varepsilon) \tag{3.12}$$

где значения τ_1 и $\operatorname{Im} \tau_2$ удовлетворяют (2.4).

Отсутствие логарифмов в младших членах (3.12) объясняется тем, что сингулярное решение краевой задачи (3.6) и функция Грина $G(x,\ 0,\ k)$ имеет в нуле асимптотики [5, 15]

$$X(x) \sim r^{-1} + {}^1/_4 (a_1 - a_2)(x_1{}^2 - x_2{}^2)(r + x_3)^{-2} - {}^1/_2 (a_1 + a_2) \ln (r + x_3)$$
$$2\pi G(x,\ 0,\ k) \sim r^{-1} - {}^1/_4 (a_1 - a_2)(x_1{}^2 - x_2{}^2)(r - x_3)^{-2} + {}^1/_2 (a_1 + a_2) \ln (r - x_3)$$

---

[2] См. сноску на стр. 413.

В соответствии с (3.12) представления (2.10), (2.12) будут справедливы для вещественных $k=k(\varepsilon)$, имеющих при $\varepsilon\to 0$ асимптотику (2.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayleigh O. M.* The theory of Helmholtz' resonator // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1916. V. 92. № 638. P. 265–275.
2. *Шестопалов В. П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983. 251 с.
3. *Арсеньев А. А.* Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12. № 1. С. 112–138.
4. *Гадыльшин Р. Р.* Об амплитуде колебаний для резонатора Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 5. С. 1094–1097.
5. *Попов И. Ю.* Теория расширений и локализация резонансов для областей ловушечного типа // Мат. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1366–1390.
6. *Ван Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М: Мир, 1967. 310 с.
7. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48. № 2. С. 347–371.
9. *Гадыльшин Р. Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной самосопряженной эллиптической задачи с малым параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
10. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 380 с.
11. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
12. *Бабич В. М.* Об аналитическом продолжении резольвенты внешних задач для оператора Лапласа на второй лист // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1966. Вып. 3. С. 151–157.
13. *Рамм А. Г.* О внешних задачах дифракции // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 7. С. 1362–1365.
14. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
15. *Ильин А. М., Сулейманов Б. И.* Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка вблизи границы области // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 6. С. 1322–1339.

Уфа

Поступила в редакцию
11.I.1991