

УДК 537.84

© 1992 г. Н. Ю. Колпаков, В. И. Колесниченко

ВЛИЯНИЕ МЕРИДИОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ НА АЗИМУТАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Получены новые точные решения уравнений Навье – Стокса для спиральных осесимметричных течений проводящей жидкости в ограниченной и неограниченной областях. Рассматривается влияние полоидальной компоненты поля скорости, создаваемой меридиональным электровихревым течением, на тороидальную компоненту, обусловленную вращением границ области. Исследуются двухпараметрические семейства автомодельных решений, полученных численным интегрированием системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для закрученного течения около цилиндра в неограниченной жидкости и дифференциального вращения между коаксиальными цилиндрами показано, что пограничные режимы меридионального течения приводят к пограничной структуре азимутального вращения жидкости.

Спиральные вихревые структуры в жидкости представляют интерес в связи с исследованием явлений возбуждения магнитного поля движением проводящей среды (МГД-динамо), образования крупномасштабных вихрей в атмосфере, явления обратного энергетического каскада в турбулентности и т. д. В магнитной гидродинамике трехмерные вихревые течения и магнитные поля удобно раскладывать (в зависимости от изучаемого явления) на взаимодействующие между собой тороидальные и полоидальные составляющие [1]. Особый класс в МГД составляют электровихревые течения (ЭВТ), которые возбуждаются за счет взаимодействия неоднородного электрического тока с собственным магнитным полем. Наличие осевой симметрии в задачах на ЭВТ позволяет находить решения МГД-уравнений в автомодельной форме. Однако в этом случае возможны только полоидальные ЭВТ. Тороидальные ЭВТ, которые в отсутствие внешних магнитных полей создаются только азимутальными токами, при этом не возбуждаются, так как в осесимметричной ситуации ϕ -составляющую электрического поля нельзя создать ни при помощи внешних источников, ни путем индуцирования ее движением жидкости [2]. Для организации спиральной структуры азимутальное вращение жидкости должно быть получено иными способами, например вращением границ жидкой области.

Цель работы – исследование влияния на закрученное течение проводящей несжимаемой жидкости установившегося меридионального ЭВТ в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

1. Постановка задачи. В осесимметричном случае соленоидальность поля скорости и магнитного поля позволяет ввести для их описания в цилиндрической системе координат три скалярные функции: $\psi_1 = \psi_1(r, z)$ – функция тока Стокса, $\psi_2 = \psi_2(r, z)$ – функция электрического тока и $\psi_3 = \psi_3(r, z)$ – функция азимутальной скорости:

$$\mathbf{v} = (v_z, v_r, v_\phi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \frac{\psi_3}{r} \right), \quad \mathbf{B} = \left(0, 0, \frac{\mu_0 \psi_2}{r} \right) \quad (1.1)$$

Используя представление (1.1), запишем уравнения магнитной гидродинамики в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^2 \psi_1}{\partial t} + 2\eta \left\{ \psi_1, \frac{E^2 \psi_1}{\eta} \right\} + \frac{\alpha}{\eta} \frac{\partial \psi_3^2}{\partial \zeta} &= E^2 \psi_1 + \frac{S}{\eta} \frac{\partial \psi_2^2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + 2\eta \left\{ \psi_1, \frac{\psi_2}{\eta} \right\} &= \frac{1}{\beta} E^2 \psi_2, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial t} + 2 \{ \psi_1, \psi_3 \} = E^2 \psi_3 \\ \eta &= \frac{r^2}{l^2}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad E^2 = 4\eta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \alpha = \frac{A_3^2 l}{\nu A_1} \\ \{F, G\} &= \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \eta}, \quad \beta = \mu_0 \sigma \nu, \quad S = \frac{\mu_0 A_2^2 l}{\rho \nu A_1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь масштабом длины служит l , времени — l^2/ν , функций ψ_i — A_i ($A_1 = \nu l$, $A_2 = I$, $A_3 = \nu$); ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, σ — проводимость жидкости, I — некий характерный электрический ток в жидкости.

Рассмотрим стационарное осесимметричное натекание электрического тока на бесконечный диэлектрический цилиндр радиуса r_0 , ориентированный вдоль оси z . Исследуем два случая, различающихся геометрией области, занятой жидкостью: 1) электрический ток течет в неограниченной проводящей жидкости, 2) область движения жидкости ограничена коаксиальным твердым массивом, проводимость которого совпадает с проводимостью жидкости.

В цилиндрической системе координат возможны несколько вариантов разделения переменных в системе (1.2). Для рассматриваемых случаев справедливо представление

$$\psi_1 = \zeta f_1(\eta), \quad \psi_2 = \zeta f_2(\eta), \quad \psi_3 = f_3(\eta) \quad (1.3)$$

т. е. азимутальное вращение жидкости не зависит от координаты ζ . Подстановка соотношений (1.3) в (1.2) дает сопряженную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для $f_i(\eta)$ (штрих означает дифференцирование по η)

$$\frac{\partial f_1''}{\partial t} + 2(f_1' f_1'' - f_1 f_1''') = 4\eta f_1^{IV} + 8f_1''' + \frac{S}{2} \frac{f_2^2}{\eta^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + 2\left(f_2 f_1' - f_2' f_1 + \frac{f_1 f_2}{\eta}\right) = \frac{4}{\beta} \eta f_2'', \quad \frac{\partial f_3}{\partial t} + 2f_1 f_3' = 4\eta f_3'' \quad (1.5)$$

При исследовании ЭВТ необходимо учитывать тот факт, что для реальных проводящих жидкостей число Бэтчелора пренебрежимо мало: $10^{-7} < \beta < 10^{-6}$. Поэтому, разлагая азимутальное магнитное поле (в принятых обозначениях — это функция $f_2(\eta)$) в ряд по степеням β , обычно ограничиваются членами нулевого или первого порядка (так называемые электродинамическое или безындукционное приближение) [2]. Однако в задачах на ЭВТ в неограниченном объеме проводящей жидкости следует специально оговаривать границы применимости условия малости магнитного числа Рейнольдса Re_m , если компоненты поля скорости имеют положительную степенную зависимость от координат.

Для выбранной схемы растекания электрического тока его плотность ($j_r = -f_2/\sqrt{\eta}$, $j_z = 2\zeta f_2'$) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$f_2(\eta_0)=0, f_2'(\infty)=1$ ($\eta_0=r_0^2/l^2$) [3]. Решение уравнения индукции магнитного поля (1.5) в электродинамическом приближении тривиально: $f_2=\eta-\eta_0$.

В качестве количественной характеристики электрического тока выберем полный ток I_0 , проходящий через участок цилиндрической поверхности $\eta=2\eta_0$, который ограничен плоскостями $\zeta=\pm l/\eta_0$. Тогда $I=I_0/(4\pi)$, а параметр $S=\mu_0 I_0^2/[(4\pi\nu)^2\rho]$. Линии электрического тока симметричны относительно плоскости $\zeta=0$ и имеют гиперболический вид.

Пространственная неоднородность электрического тока приводит к появлению вихревой компоненты силы Лоренца (последний член в уравнении (1.4)), а следовательно, и к движению жидкости. Параметр S характеризует интенсивность индуцируемого ЭВТ и является аналогом числа Рейнольдса задачи. Меридиональное движение жидкости не зависит от направления электрического тока, так как параметр $S\sim I_0^2$. Как будет показано ниже, несмотря на то, что распределение завихренности электромагнитной силы неизменно в обоих случаях (как для течения вне цилиндра в неограниченной жидкости, так и для течения между коаксиальными цилиндрами), направление полоидальной циркуляции жидкости и ее взаимодействие с азимутальным вращением прямо противоположно.

2. Закрученное течение вблизи критической окружности. Пусть диэлектрический цилиндр радиуса $r_0=2l$ вращается с угловой скоростью $\Omega=\nu/(4l^2)$ в неограниченной проводящей жидкости. Для безразмерной азимутальной скорости $v_\varphi=f_3/\sqrt{\eta}$ получаем граничное условие

$$f_3=1 \text{ при } \eta=\eta_0=4 \quad (2.1)$$

На бесконечности из физических соображений возможны следующие граничные условия:

$$\text{а) } f_3=0, \text{ б) } f_3=1, \text{ в) } f_3'=\text{const} \quad (2.2)$$

Первое условие означает отсутствие вращательного движения жидкости на бесконечном удалении от цилиндра, второе условие означает дифференциальное вращение жидкости и, наконец, третье соответствует твердотельному вращению с $\Omega=\text{const}$.

Если поверхность цилиндра твердая и непроницаемая, то на ней выполняется условие прилипания

$$f_1=f_1'=0 \text{ при } \eta\neq\eta_0 \quad (2.3)$$

При $S=0$ решение стационарного уравнения (1.4) описывает потенциальное течение вблизи критической окружности $\zeta=0, \eta_0=4$ (окружности, на которой давление жидкости максимально) [4]

$$f_1=-6+\eta+2 \exp(2-\eta/2) \quad (2.4)$$

Жидкость натекает из бесконечности на цилиндр в радиальном направлении и движется вверх и вниз вдоль цилиндра. Аналитическое решение уравнения (1.4) существует только при $\eta_0=4$, чем объясняется выбор радиуса цилиндра $r_0=2l$.

При $S \neq 0$ анализ электромагнитных сил показывает, что, начиная с некоторого значения $\eta_* \gg \eta_0$, ротор вынуждающей силы принимает постоянное значение $S/4$, следовательно, существует внешнее решение задачи [3]

$$\Phi = \left(\frac{S}{6}\right)^{1/2} \eta^{3/2} - 1 \quad (2.5)$$

к которому асимптотически стремится решение задачи (1.4), (2.3)

$$f_1 \rightarrow \Phi, \quad f_1' \rightarrow \Phi' \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

Однопараметрическое семейство решений системы (1.4), (1.5), (2.1)–(2.3) и (2.6) исследовалось методом Кутты–Мерсона пятого порядка. Недостающие граничные условия при $\eta = \eta_0$, появляющиеся при сведении краевой задачи к задаче Коши, определялись при помощи оптимизации Хука–Дживса. Решение считалось найденным, если оно выходило на асимптотическое условие (2.6) при $\eta \gg \eta_0$ с точностью 0,01%. Численная процедура тестировалась при помощи аналитического решения (2.4).

На фиг. 1 приведены результаты численного интегрирования при $S = 0, 1, 10, 100$ (кривые 1–4 соответственно). Радиальные профили осевой $f_1' = v_z / (2\zeta)$ (штриховые линии) и радиальной $f_1 = v_r \sqrt{\eta}$ (сплошные линии) составляющих поперечного течения показаны на фиг. 1, а. В отличие от потенциального натекания на цилиндр при $S = 0$, электровихревое течение имеет отличную от нуля завихренность скорости не только в окрестности критической окружности, но и на бесконечности. Действительно, на бесконечности компонента тензора вязких напряжений $\sigma_{rz}' = 4\zeta \sqrt{\eta} \Phi''(\eta) = -3\zeta \sqrt{S/6}$ при фиксированном значении ζ постоянна. Таким образом, автомодельные решения нелинейных уравнений характеризуются наличием вязкого ядра течения. В этом случае область течения вблизи критической окружности, в которой завихренность скорости, порождаемая как вязкими, так и электромагнитными силами, существенно отличается от своего асимптотического значения, можно рассматривать как «пограничный слой».

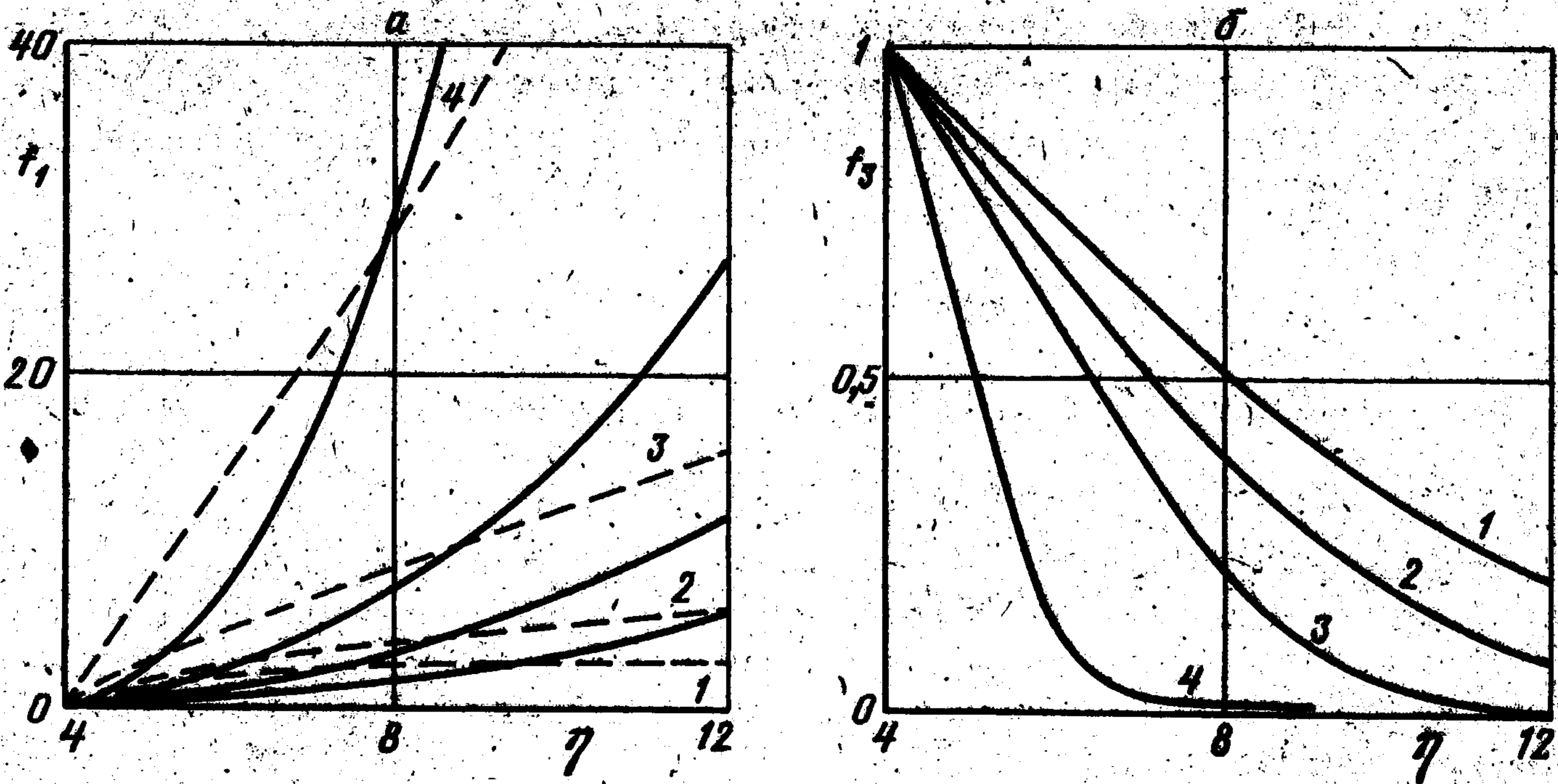
Уравнение для f_3 (1.5) при учете условия (2.1) в стационарном случае можно дважды проинтегрировать

$$f_3(\eta) = 1 + f_3'(\eta_0) \int_{\eta_0}^{\eta} \exp\left(-\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{f_1}{2\eta} d\eta\right) d\eta \quad (2.7)$$

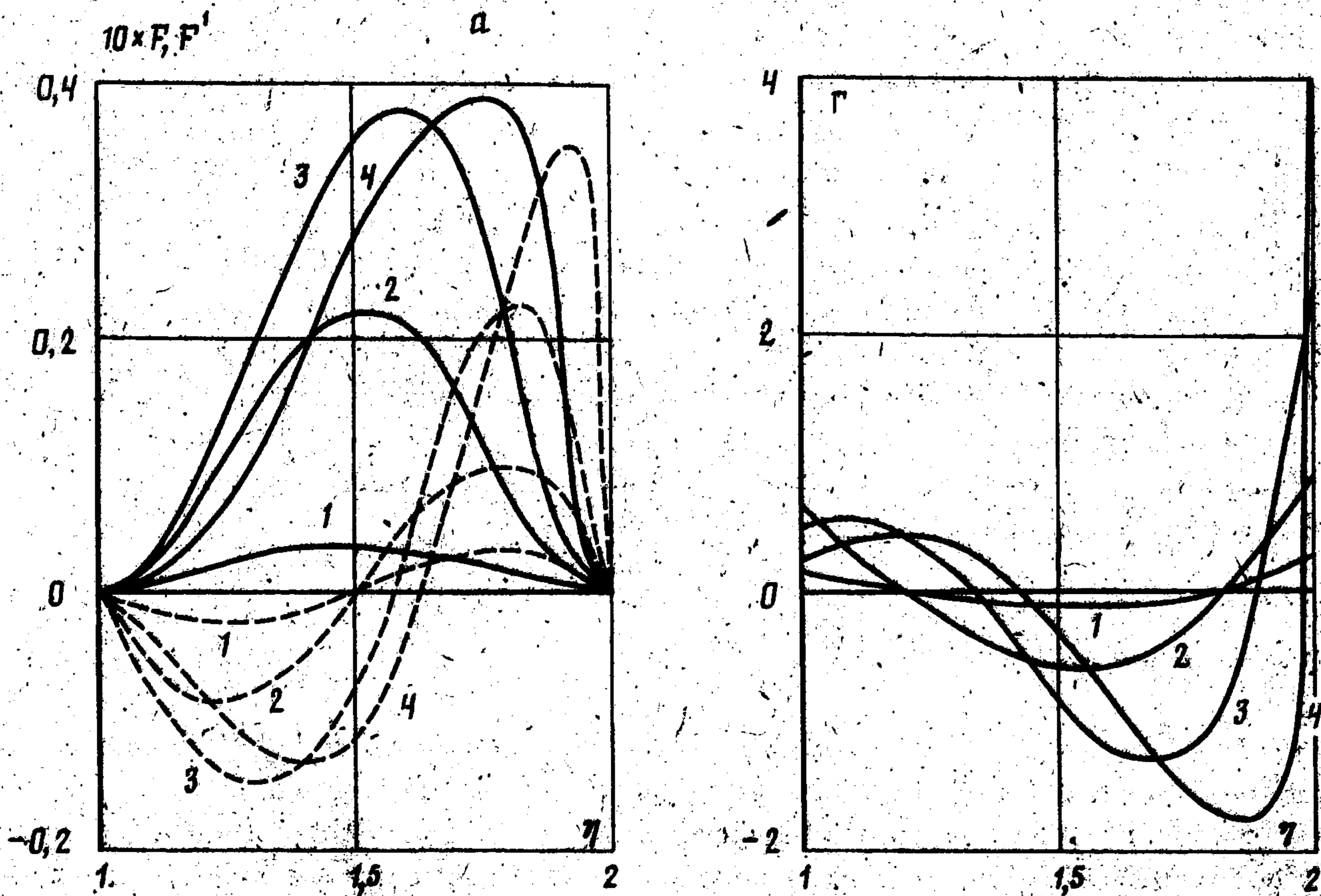
Можно показать, что для выражения (2.7) третье условие (2.2) (твердотельное вращение вне цилиндра) невыполнимо. При наличии меридионального электровихревого течения возможно только дифференциальное вращение жидкости $\Omega = \Omega(\eta)$.

Уравнение (1.5) для f_3 с условием (2.1) и вторым условием (2.2) имеет тривиальное решение: $f_3 = 1$, которое не зависит от меридиональной циркуляции. В этом случае жидкость вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = 1/\eta$. Для варианта а граничных условий (2.2) зависимость $f_3(\eta)$ при различных значениях параметра S изображена на фиг. 1, б. Видно, что с ростом интенсивности электровихревого течения происходит локализация азимутального вращения вблизи поверхности цилиндра с образованием погранслоевой структуры.

3. Дифференциальное вращение между коаксиальными цилиндрами. Рассмотрим влияние меридионального ЭВТ на азимутальное движение жидкости между двумя коаксиальными бесконечными цилиндрами, вращающимися вокруг своей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 . Пусть $R_1 = l$ — радиус внутреннего диэлектрического цилиндра, а R_2 — радиус внешнего проводящего цилиндра или в новых переменных $\eta_1 = 1$ и $\eta_2 = 1 + \delta$, где δ — расстояние между цилиндрами. Введем безразмерные угловые скорости



Фиг. 1



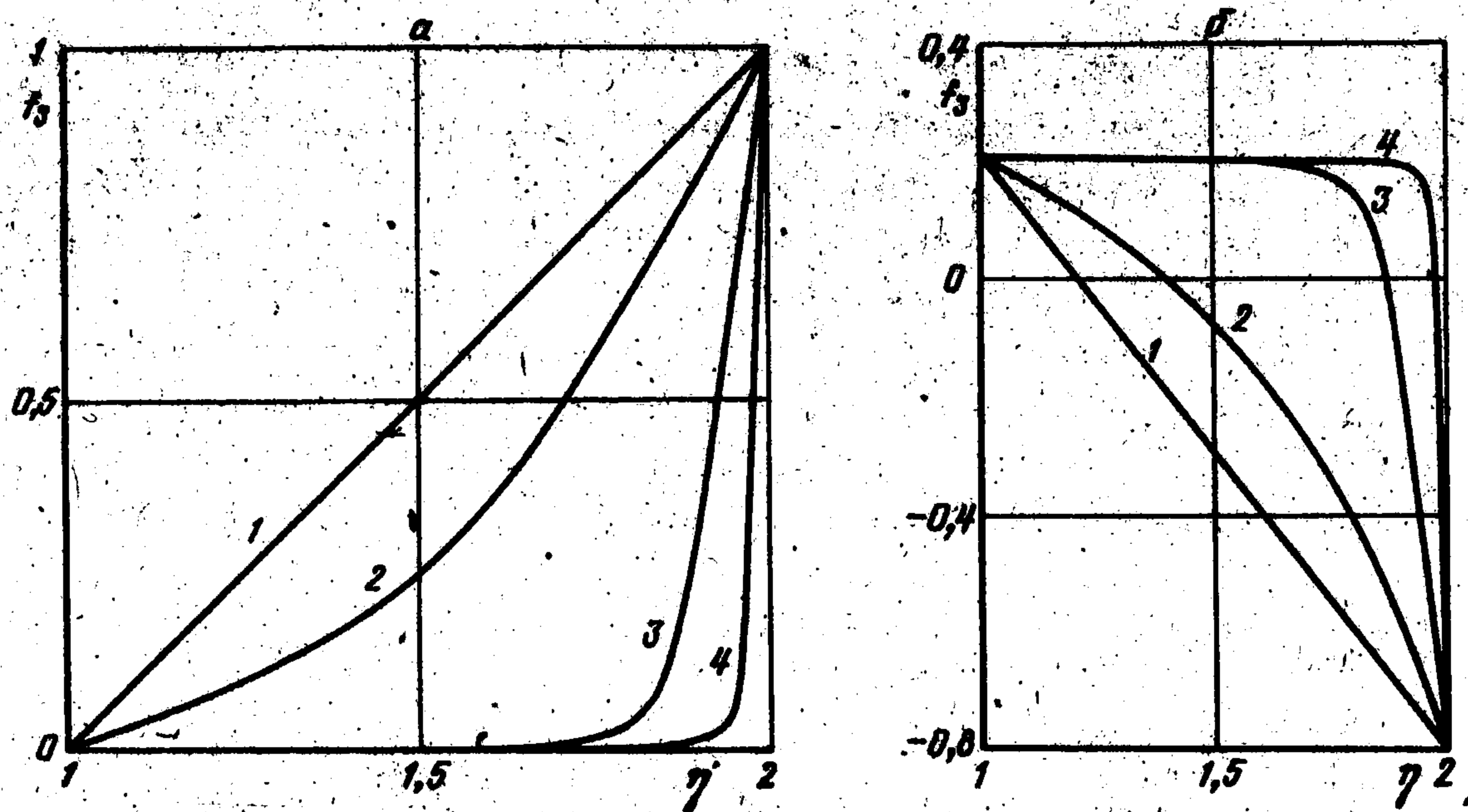
Фиг. 2

$\omega_i = \Omega_i l^2 / \nu$, $i = 1, 2$. На поверхностях цилиндров потребуем выполнения условий прилипания

$$f_1 = 0, f_1' = 0, f_3 = \omega_1 \eta_1 \text{ при } \eta = \eta_1 \quad (3.1)$$

$$f_1 = 0, f_1' = 0, f_3 = \omega_2 \eta_2 \text{ при } \eta = \eta_2$$

В отсутствие электровихревого течения ($S=0$) последнее уравнение (1.5) описывает классическое течение Куэтта между вращающимися цилиндрами [5]. Отметим, что при соотношении угловых скоростей $\omega_2/\omega_1 = \eta_1/\eta_2$ $f_3 = \text{const}$ и азимутальное вращение не зависит от ЭВТ.



Фиг. 3

Величина параметра ЭВТ S для течения в неограниченной области была не принципиальна, так как для любого малого S число Рейнольдса задачи $Re = v_{\max}(\eta) l / \nu = \eta \sqrt{S/6}$ (см. (2.5)) при удалении от цилиндра может быть сколь угодно большим, тогда как для краевой задачи (3.1) величина собственного значения S определяет режим электровихревого течения.

В случае малых S (ползущее течение) линейное решение задачи (1.4), (3.1) пропорционально параметру ЭВТ:

$$f_1(\eta) = S(\alpha_0 \eta^3 + \alpha_1 \eta^2 + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \eta \ln \eta - \eta^2 \ln \eta - \eta \ln^2 \eta / 2 + \alpha_4) \quad (3.2)$$

$$\alpha_0 = 12[2(1-\eta_1)^2 + (1-\eta_1^2) \ln \eta_1], \quad \alpha_1 = 1/12$$

$$\alpha_2 = -[3(1-\eta_1)^2(\eta_1-3) + 2(1-\eta_1)(\eta_1^2+7\eta_1+1) \ln \eta_1 + 6(2\eta_1^2+\eta_1+1) \ln^2 \eta_1] / \alpha_0$$

$$\alpha_3 = [(1-\eta_1)^2(\eta_1^2-8\eta_1-11) + (1-\eta_1)(4\eta_1^2+25\eta_1+1) \ln \eta_1 + 6(5\eta_1^2+2\eta_1+1) \ln^2 \eta_1] / \alpha_0$$

$$\alpha_4 = [(1-\eta_1)^2(11+14\eta_1-\eta_1^2) + 12(1-\eta_1^2) \ln \eta_1 + 6(1-\eta_1^2) \ln^2 \eta_1] / \alpha_0$$

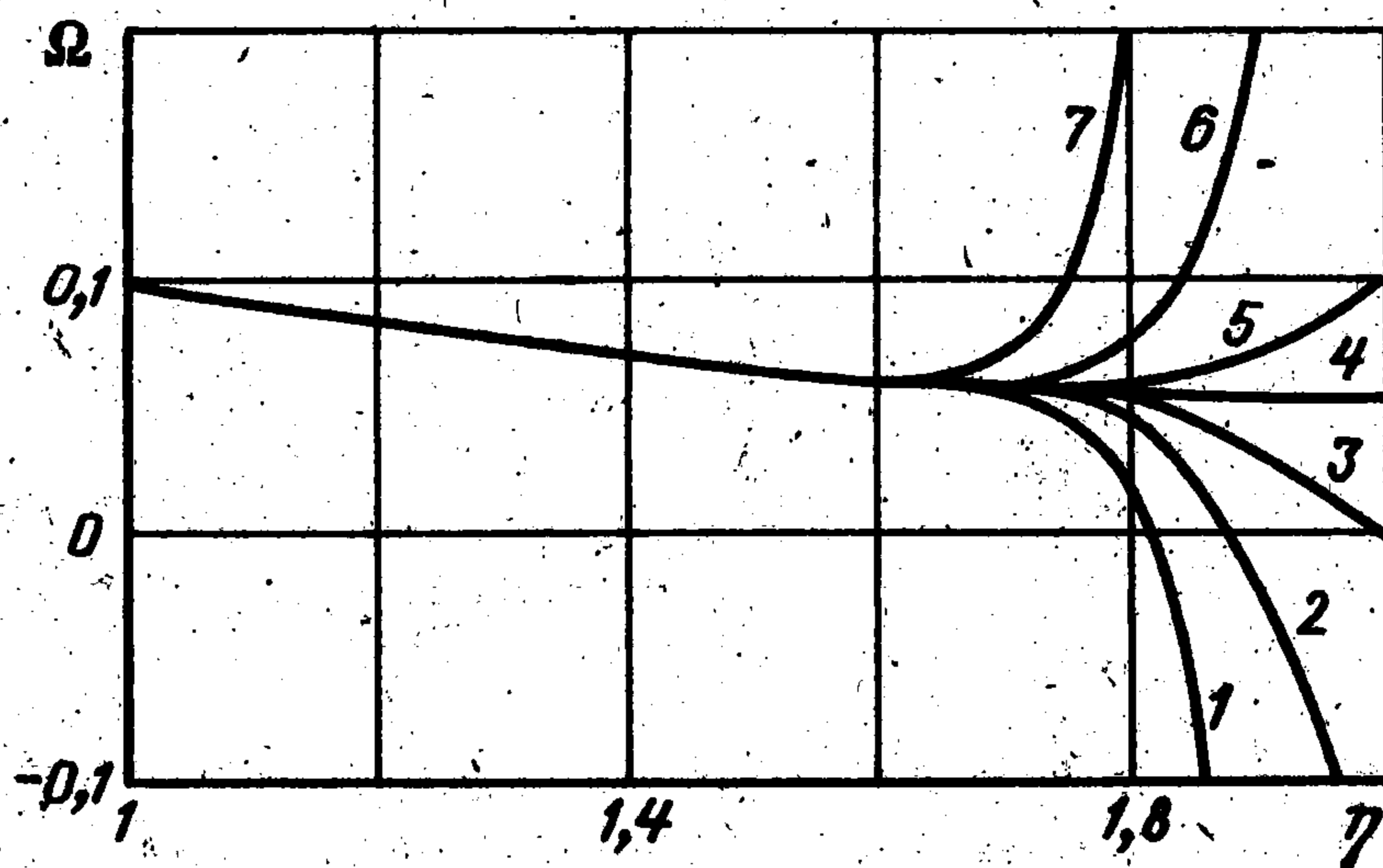
$$\alpha_5 = -[(1-\eta_1)^2(\eta_1^2-11\eta_1) + 2\eta_1(1-\eta_1)(\eta_1+6) \ln \eta_1 + 6\eta_1(3\eta_1+1) \ln^2 \eta_1] / \alpha_0$$

Согласно соотношениям (3.2), (1.1), ЭВТ между цилиндрами имеет вид двухтороидального течения, симметричного относительно плоскости $\zeta=0$, причем в верхнем вихре жидкость циркулирует против часовой стрелки.

С увеличением параметра S проявляется нелинейный характер уравнения (1.4). Электромагнитные силы компенсируются вязкими за счет больших градиентов вблизи твердых границ, а в невязком ядре течения уравновешиваются инерционными членами. О существенно нелинейном режиме ЭВТ свидетельствует пропорциональность скорости \sqrt{S} .

Численные исследования задачи, описываемой уравнением (1.4), вторым уравнением (1.5) и условиями (3.1), проводились при фиксированном геометрическом

параметре $\delta=1$ для значений S , равных $2 \cdot 10^3$, 10^4 , 10^5 , $5 \cdot 10^6$ (кривые 1–4 на фиг. 2). На фиг. 2, а сплошными линиями показаны профили радиальной ($F=v_r/\sqrt{S}$) составляющей скорости, а штриховыми линиями – осевой ($F'=v_z/(2\xi\sqrt{S})$) составляющей. Видно, что с увеличением параметра S происходит смещение центров вихрей к поверхности внешнего цилиндра. Зависимость φ -компоненты завихренности скорости ($\Gamma=-4\xi f_z \sqrt{\eta/S}$) от координаты η представлена на фиг. 2, б. В стоковом режиме ЭВТ симметрично расположено между коаксиальными цилиндрами (кривая 1). С ростом параметра S трение на поверхности диэлектрического цилиндра увеличивается медленнее, чем на проводящем. При $S > 10^6$ (кривая 4) электровихревое те-



Фиг. 4

чение деформируется в сторону внешнего цилиндра с образованием выраженного пограничного слоя.

При $\omega_1=0$, $\omega_2=1$ (вращается только внешний цилиндр) из формулы классического течения Куэтта [5] имеем $f_3=(1+\delta)(\eta-1)/\delta$ (фиг. 3, а, кривая 1 соответствующая $S=0$). Для других значений S : 10^3 , $6 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^8$ (кривые 2–4 соответственно) радиальная функция азимутальной скорости $f_3(\eta)$ существенно меняется, что свидетельствует о локализации вращения жидкости вблизи поверхности вращающегося цилиндра.

При $\omega_1=0,2$, $\omega_2=-0,8$ точка инверсии вращения ($v_\varphi=0$) с ростом S смещается к внешней границе (фиг. 3, б).

Исследуем влияние существенно нелинейного режима ЭВТ на вращательное движение в цилиндрическом слое в общем случае $\omega_2=\alpha\omega_1$. На фиг. 4 изображена радиальная зависимость угловой скорости вращения жидкости $\omega=\omega(\eta)$ при $S=6 \cdot 10^6$, $\omega_1=1$ и α , равным -10 , $-1,5$, 0 , $0,5$, 1 , 5 , 50 (кривые 1–7). Область закрученного течения делится на область $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2(S)$, в которой жидкость вращается с угловой скоростью ω_1/η («ядро вращения») и область $\eta_2(S) \leq \eta \leq \eta_3$, в которой $\omega(\eta)$ зависит от величины α .

Таким образом, в обоих рассмотренных случаях (течение около цилиндра в неограниченной жидкости и между коаксиальными цилиндрами) развитое погранслоное меридиональное течение приводит к погранслоной структуре азимутального вращения жидкости.

Другой характерной особенностью рассмотренных осесимметричных ЭВТ является то, что в заданном поле массовых сил можно менять структуру течения – направление меридиональной циркуляции и местоположение пограничных слоев. Это может быть использовано для интенсификации дифференциального вращения проводящей жидкости. Управление движением жидких металлов в кольцевом зазоре применяется в смазке,

центробежном литье и т. д. Пограничная структура вращательного движения эффективно используется в МГД-сепарации для обогащения руд, очистки жидких металлов, извлечения металлов и окислов из шлаков [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Моффар Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 339 с.
2. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
3. Колпаков Н. Ю., Колесниченко В. И. Электровихревое течение вблизи критической окружности // Магнитн. гидродинамика. 1990. № 3. С. 99-106.
4. Бурда Г. И. Точное решение уравнений Навье-Стокса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 168-169.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Павл И. Л., Капуста А. Б., Чекин Б. В. Магнитная гидродинамика в металлургии. М.: Металлургия, 1974. 240 с.

Пермь

Поступила в редакцию
6.II.1991