Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 3, 1992

УДК 533.6.011

© 1992 г. А. И. Рылов

О СВОЙСТВАХ МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ ВИХРЕВЫХ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Доказывается монотонность изменения давления вдоль определенных участков тел и границ области течения, а также отсутствие внутренних точек ветвления изобар (седловых точек) при обтекании выпуклых тел. Используется метод изобар, основанный на монотонном изменении угла наклона вектора скорости вдоль линии постоянного давления (изобары) [1]. Ранее данный метод использовался при изучении вихревых дозвуковых течений между телом, обтекаемым сверхзвуковым потоком, и присоединенной или отошедшей ударной волной [1–3].

1. Рассмотрим плоское симметричное обтекание тела ab (фиг. 1) вихревым дозвуковым потоком газа или несжимаемой жидкости. Предполагается отсутствие вязкости и теплопроводности; газ считается политропным. Здесь и далее рассматривается лишь верхняя половина течения, симметричного относительно оси x. Течение осуществляется слева направо, при этом слева на бесконечности поток параллелен оси x, давление p поперек потока постоянно, но плотность ρ и модуль вектора скорости q в вихревом течении могут зависеть от функции тока ψ. Течение предполагается безотрывным и без областей с замкнутыми линиями тока. И, наконец, в случае обтекания тела ab газом предполагается, что во всех точках области число Маха $M<1$, т. е. течение без местных сверхзвуковых зон.

Рассмотрим на теле прямолинейный участок cd, на котором угол наклона стенки $\theta=\theta^+$ максимален для данного тела, точнее, для его верхней половины, и прямолинейный участок fg с минимальным углом наклона стенки $\theta=\theta^-$. Длины данных участков могут равняться нулю, и в этом случае речь будет идти о точках максимального или минимального наклонов стенки.

Для данного обтекания справедлива следующая теорема.

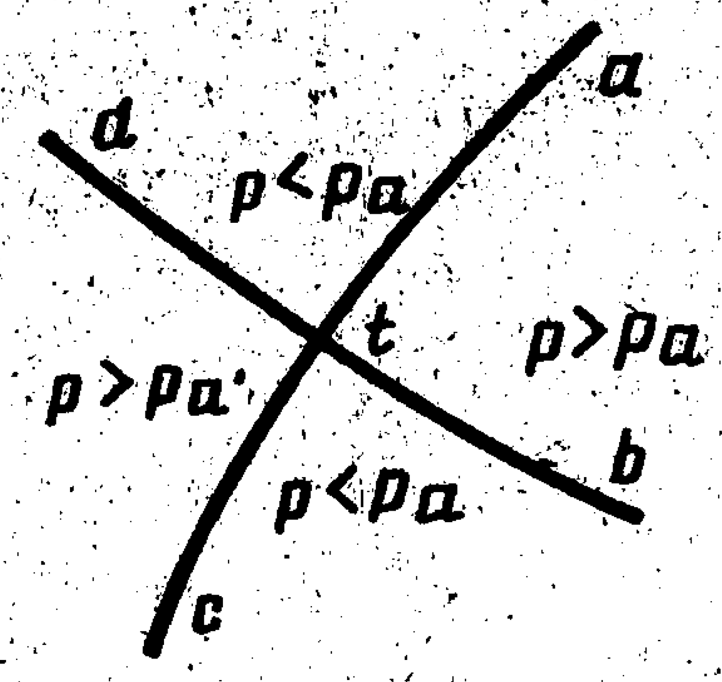
Теорема 1. Вдоль участка максимального (минимального) наклона давление p монотонно убывает (возрастает).

Действительно, пусть в некоторой точке t участка cd давление возрастает, т. е. ускорение в точке t отрицательно. Рассмотрим изобару, выходящую из точки t. Производная от угла наклона вектора скорости, вычисленная вдоль изобары, имеет следующий вид [1]:

$$\theta_l=-p_n(1-M^2\sin^2\beta)/(\rho q^2)$$

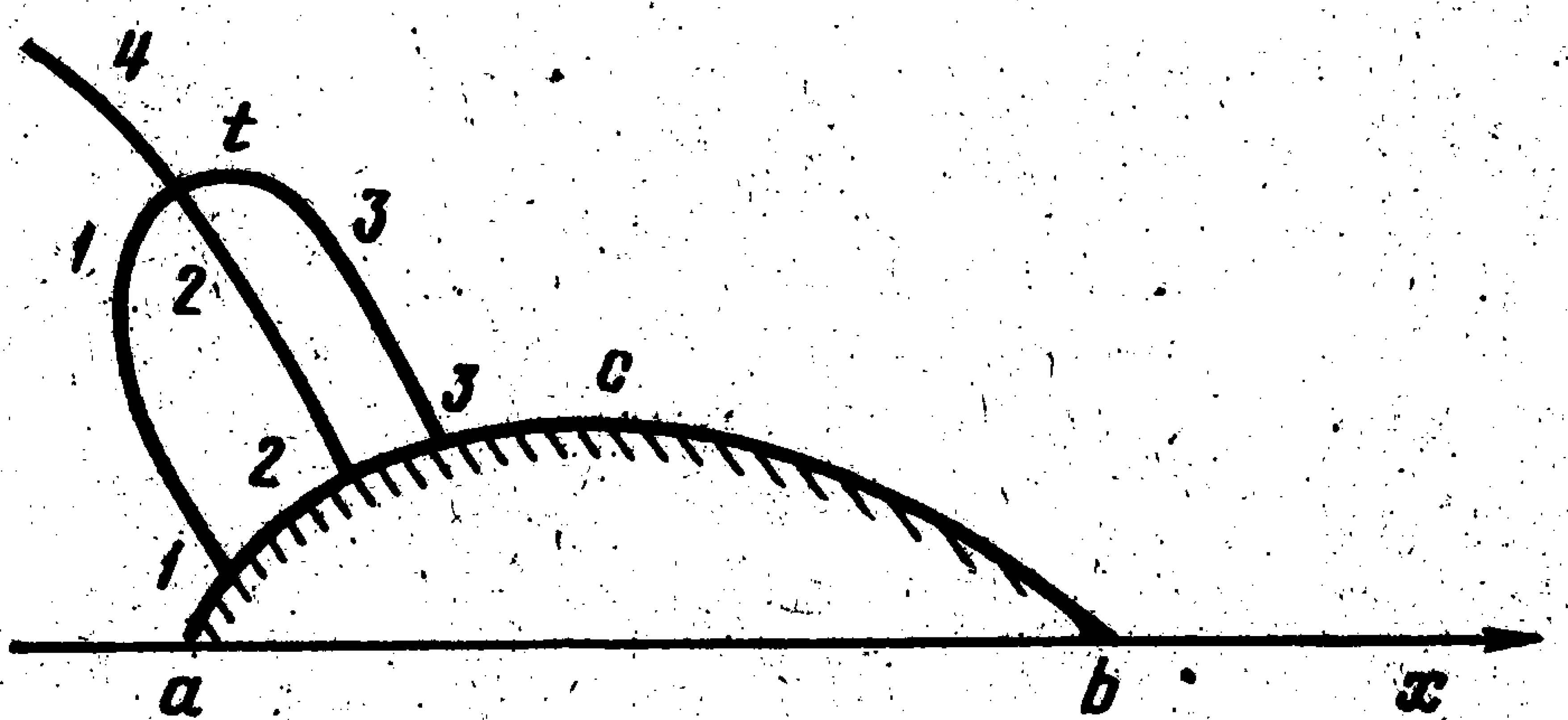
где β — угол между вектором скорости и изобарой, p_n — производная от p, вычисленная по нормали к изобаре (при движении вдоль изобары нормаль направлена влево).

Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 3



Фиг. 4

Следуя [1–3], учитывая возможность точек ветвления [4], далее под изобарой будем понимать линию p=const, являющуюся границей выбранной области повышенного или пониженного, относительно границы, давления. Это означает, что при прохождении точки ветвления для продолжения изобары выбирается ветвь, примыкающая к указанной области. Так, например, на фиг. 2 изобара at, на которой $p=p_a$, после прохождения точки ветвления t, где $p_n=0$, должна быть продолжена ветвью $tb(td)$, если граничной является область повышенного (пониженного) давления, но никак не ветвью tc.

При таком определении изобары при движении вдоль нее производная p_n не меняет свой знак и, следовательно, при $M\leqslant 1$ угол θ вдоль изобары меняется монотонно. Сказанное относится и к несжимаемой жидкости, для которой приведенное выше соотношение будет иметь следующий вид: $\theta_l=-p_n/(\rho q^2)$.

Учитывая сказанное, находим, что вдоль изобары, выходящей из точки t, угол θ монотонно возрастает. Следовательно, данная изобара не может выйти на тело ab и на ось симметрии, на которых $\theta\leqslant\theta^+$, а также уйти на бесконечность, где $\theta=0$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы. Аналогично доказывается и монотонное возрастание давления на участке минимального угла, что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что в данном случае исключена ситуация, при которой вдоль исследуемой изобары угол θ меняется на значительную величину $\varphi\leqslant 2\pi$, что делает возможным выход изобары на тело или границы области течения. При помощи анализа линий $\theta=\mathrm{const}$ показываем, что это возможно лишь при наличии областей с замкнутыми линиями тока и внутренних точек торможения [2]. Первое исключено в силу сделанных выше предположений, а второе — из-за условий слева на бесконечности. Действительно, при наличии внутренней точки торможения между двумя линиями тока, приходящими в нее слева с бесконечности, обязательно существует линия тока, выходящая из точки торможения и уходящая влево на бесконечность. Это противоречит условию $\theta=0$ слева на бесконечности.

Очевидно, теорема 1 остается в силе, если рассматриваемое течение ограничено стенкой, на которой $\theta^-\leqslant\theta\leqslant\theta^+$ (течение в симметричном канале).

Применение теоремы 1, в частности, к полубесконечным телам с прямолинейными образующими дает следующие результаты. При обтекании кормовых обводов (фиг. 3, *а*), для которых $\theta=0$ при $x\leqslant 0$, $\theta\leqslant 0$ при $0\leqslant x\leqslant l$, вдоль прямолинейной стенки и вдоль оси симметрии при $x\geqslant l$ имеет место разгон потока. При обтекании головных частей (фиг. 3, *б*, где $\theta=0$ при $x\geqslant 0$, $\theta\geqslant 0$ при $-l\leqslant x\leqslant 0$) вдоль прямолинейной стенки и вдоль оси симметрии при $x\leqslant -l$ поток тормозится.

2. Рассмотрим некоторые условия на форму тела, при симметричном обтекании которого в области течения отсутствуют точки ветвления изобар (седловые точки). Как известно, вопрос о наличии или отсутствии различных особых точек представляет интерес при изучении течений жидкости и газа и в других близких задачах математической физики. Такими точками являются, в частности, точки, в которых обе первые производные p_x и p_y обращаются в нуль. Это либо точки экстремума давления либо точки ветвления изобар (седловые точки). Для вихревых дозвуковых течений первый случай исследовался методом изобар [1], где было показано, что во внутренних точках течения невозможен экстремум давления. Исключение составляют течения с внутренними точками торможения и замкнутыми линиями тока, что имеет место, например, при несимметричном обтекании цилиндра с большими значениями циркуляции. Ниже приводится пример условий на форму тела, при выполнении которых невозможны внутренние точки ветвления изобар (седловые точки).

Теорема 2. В случае симметричного обтекания выпуклого тела, вдоль стенки которого угол θ не может возрастать, внутри области течения (вне стенок тела и оси симметрии) исключены точки ветвления изобар.

Доказательство. Рассмотрим верхнюю половину выпуклого тела *ab*, фиг. 4. Вдоль *ab* угол θ не возрастает, при этом на участке *ac* $\theta\geqslant 0$, на *cb* $\theta\leqslant 0$. Допустим, что точка t — точка ветвления изобар. Это, в частности, означает, что первые производные от p и θ по x и y в этой точке равны нулю. В зависимости от знаков производных от p более высоких порядков в точке t сходится четное число (не меньше четырех) изобар, возможно и касающихся друг друга, и такое же число областей, границами которых и являются указанные изобары. При круговом обходе точки t за областью с повышенным, относительно точки t, давлением, следует область с пониженным давлением, и т. д. (Ситуация, в которой изобара разделяет две области, в каждой из которых давление либо больше, либо меньше, чем на изобаре, исключена, так как при $M<1$ равенство $p_n=0$ возможно лишь в изолированных точках.) Соответственно за изобарой, вдоль которой при движении от точки t угол θ возрастает, при круговом обходе следует изобара, вдоль которой угол θ убывает.

Пусть для определенности в точке t $\theta=\theta_t\geqslant 0$ (случай, когда $\theta_t<0$, исследуется аналогично). Рассмотрим две ближайшие изобары, вдоль которых угол θ при движении от точки t возрастает. На фиг. 4 они отмечены индексами 1 и 3. В соответствии с граничными условиями эти изобары могут выйти только на участок стенки ac, на котором $\theta\geqslant 0$. В точках выхода, также отмеченных индексами 1 и 3, имеем $\theta_1>\theta_t\geqslant 0$, $\theta_3>\theta_t\geqslant 0$. Так как тело выпуклое, имеем $\theta_1>\theta_3>\theta_t\geqslant 0$. Далее, между рассмотренными изобарами обязательно существует изобара, также приходящая на участок ac, при движении вдоль которой от точки t угол θ убывает. На фиг. 4 эта изобара и точка выхода на тело обозначены индексом 2. Итак, в точке 2, расположенной между точками 1 и 3, $\theta=\theta_2<\theta_t<\theta_3$. Но на выпуклой стенке между точками 1 и 3 $\theta\geqslant\theta_3$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

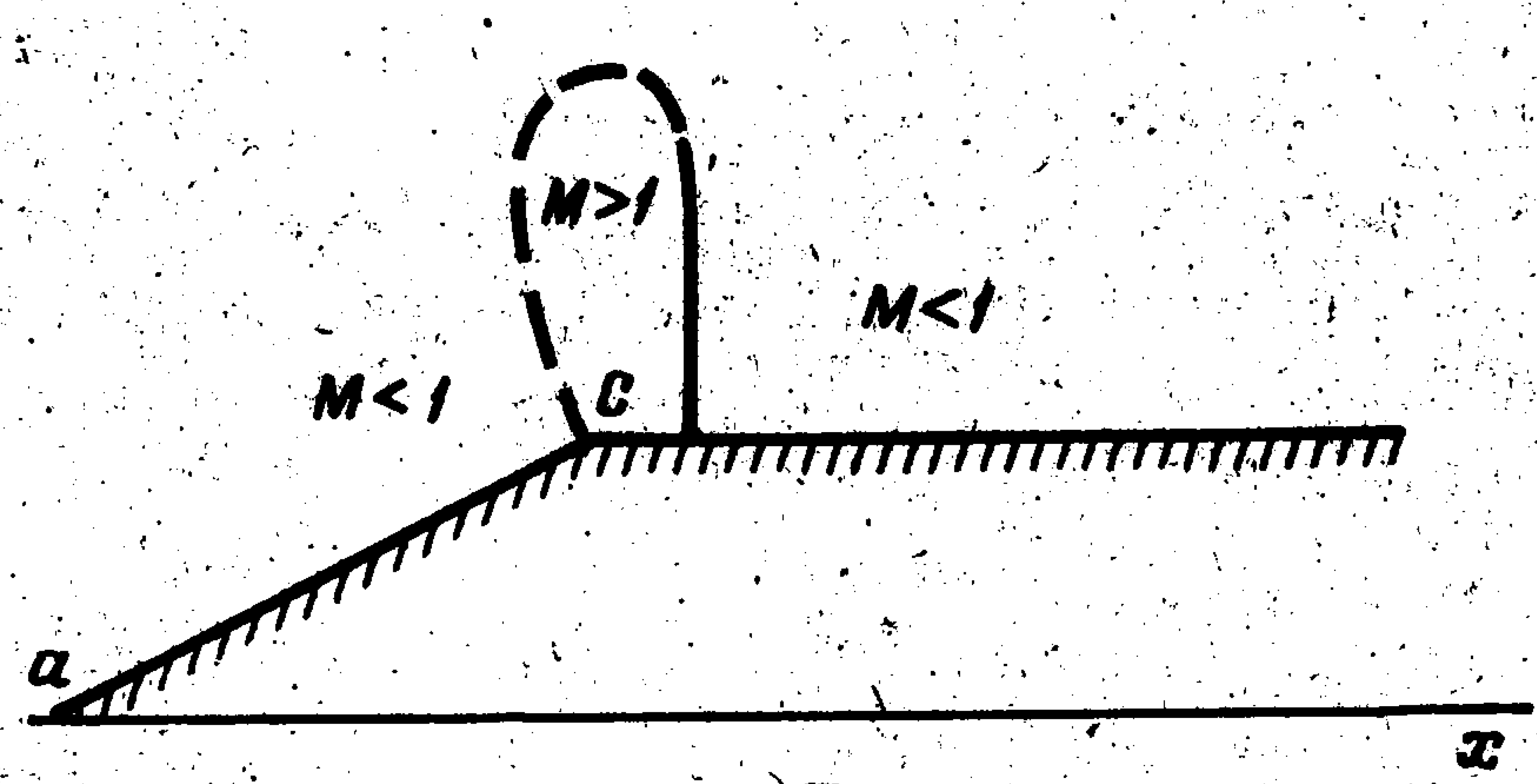
Заметим, что для выпуклых полубесконечных тел, вдоль которых $\theta\geqslant\geqslant 0$, как, например, на фиг. 3, *б*, легко доказывается отсутствие точек ветвления и на оси симметрии.

3. Рассмотрим плоское симметричное обтекание безвихревым дозвуковым равномерным потоком газа клина конечной толщины, сопрягающегося через угловую точку с горизонтальной стенкой (фиг. 5). Важная особенность данного обтекания состоит в том, что при сколь угодно малой дозвуковой скорости набегающего потока в окрестности угловой точки c реализуется локальная сверхзвуковая зона (ЛСЗ), границей которой является звуковая линия, выходящая из угловой точки c, и замыкающая ударная волна (ЗУВ). На фиг. 5 они изображены соответственно штриховой и сплошной линиями. Заметим, что течение в ЛСЗ достаточно сложное. Помимо веера разрежения оно может содержать и внутренние ударные волны, отличные от ЗУВ. Для дальнейшего важно лишь то, что граница ЛСЗ содержит отрезок ударной волны.

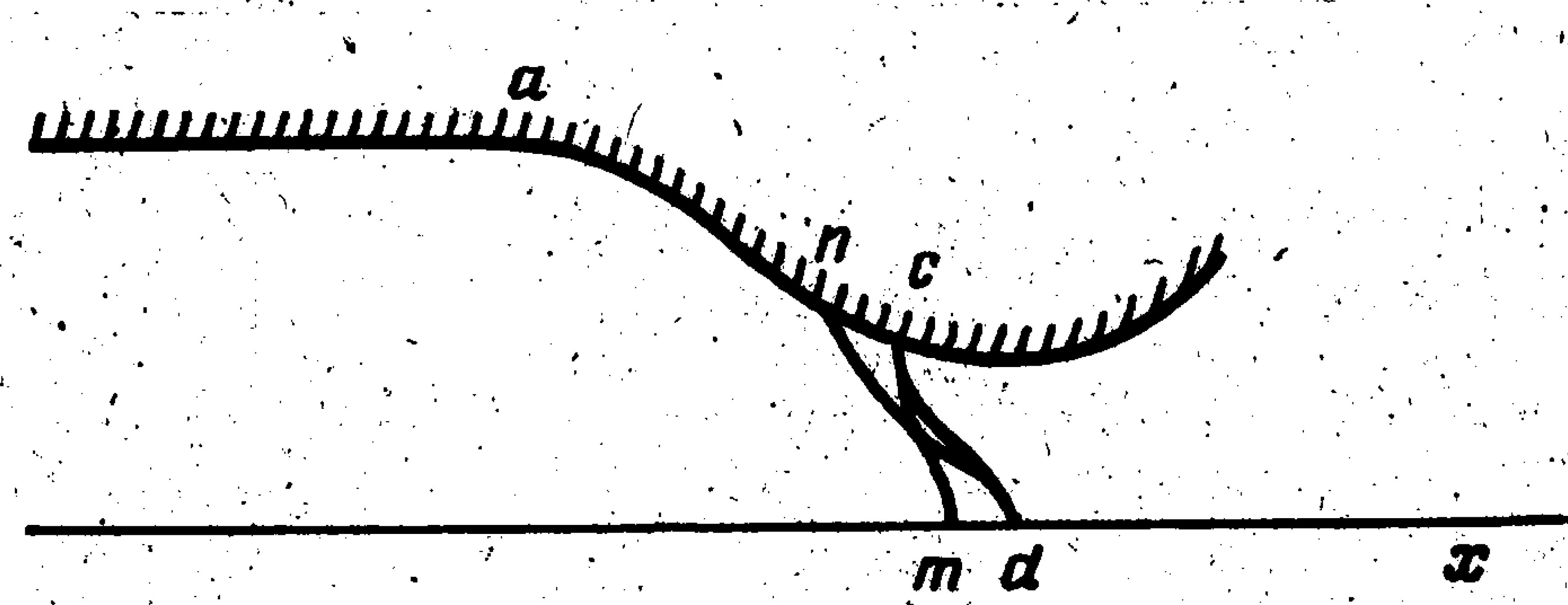
Как оказывается, монотонность давления вдоль стенки клина ac непосредственно связана со значением угла θ на ЗУВ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если на ЗУВ (вне ЛСЗ) угол θ не превосходит угол клина θ_0, то давление p монотонно убывает вдоль стенки клина ac (фиг. 5).

Действительно, пусть в некоторой точке t на ac давление возрастает. Тогда вдоль изобары, выходящей из точки t, угол θ возрастает. Число



Фиг. 5



Фиг. 6

Маха вдоль этой изобары не возрастает, так как энтропия не убывает, а полное давление не возрастает. Следовательно для изобары имеется лишь одна возможность – выйти на ЗУВ. Но в этом случае в соответствующей точке ЗУВ $\theta > \theta_0$, что противоречит условию теоремы.

Даже не имея строгих оценок для θ на ЗУВ, следует признать маловероятным неравенство $\theta > \theta_0$ на ЗУВ. Следовательно, в такой же степени маловероятно и немонотонное изменение p на ac. Сказанное подтверждается и экспериментальными исследованиями [5], в которых наблюдалось лишь монотонное изменение p вдоль стенки клина.

В случае плавного сопряжения конечного клина с горизонтальной стенкой возможно существование ЛСЗ, граница которой не содержит отрезков ударной волны. В этом случае монотонность течения вдоль стенки доказывается строго.

4. Рассмотрим плоское безвихревое течение газа в симметричном сопле Лаваля, в котором сужающейся части ab (фиг. 6), на которой $\theta \leqslant 0$, предшествует бесконечная прямолинейная стенка, на которой $\theta = 0$. Будем считать, что сужающаяся часть достаточно гладкая, в результате чего левее звуковой линии cd число Маха $M < 1$.

Согласно теореме Никольского – Таганова [6] в точке c имеем $\theta < 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Вдоль бесконечной горизонтальной стенки вплоть до точки a давление монотонно возрастает, а вдоль оси симметрии вплоть до звуковой точки d оно монотонно убывает.

Действительно, пусть в некоторой точке t на прямолинейной стенке поток разгоняется. Тогда вдоль изобары, выходящей из этой точки, угол θ возрастает. В результате изобара не может выйти на звуковую линию, на которой давление меньше, чем в точке t, а также на ось симметрии и на прямолинейную стенку, на которых $\theta=0$, и на стенку ac, на которой $\theta<0$.

Аналогично доказывается и монотонное уменьшение давления вдоль оси симметрии левее точки d, что и завершает доказательство теоремы.

С некоторыми оговорками эта теорема переносится и на вихревые течения. Выделим два случая.

1°. Производная от полного давления $dp_0/d\psi\geqslant 0$, где ψ — определенная обычным образом функция тока. В этом случае на изобаре cm, выходящей из звуковой точки c верхнего контура, $M\leqslant 1$. Можно показать, что теорема 3 остается справедливой для прямолинейной верхней стенки левее точки a и для оси симметрии левее точки m. Изобары, выходящие из отрезка md, приходят лишь на звуковую линию cd. Следовательно, если давление монотонно вдоль cd, то оно монотонно и вдоль md. В свою очередь отметим, что при $dp_0/d\psi\geqslant 0$ изменение p монотонно вдоль cd, если каждая линия тока пересекает cd лишь один раз.

2°. Производная $dp_0/d\psi\leqslant 0$. В этом случае на изобаре dn, выходящей из точки d, $M\leqslant 1$, причем в точке n $\theta<0$. При указанных условиях теорема 3 полностью остается в силе.

Отметим, что существует определенная аналогия между теоремой 1 данной работы и некоторыми результатами для струйных плоских потенциальных течений, в которых доказана монотонность изменения θ вдоль свободной границы $p=\mathrm{const}$ в случае экстремальных значений p на данной границе [7]. По существу в указанных результатах для струй и в теореме 1 p и θ меняются местами.

В данной работе можно было бы воспользоваться принципом максимума θ. Но при этом следует иметь в виду, что принципы максимума для p и для θ применительно к вихревым дозвуковым течениям газа и несжимаемой жидкости были установлены с помощью анализа линий $p=\mathrm{const}$ и $\theta=\mathrm{const}$, вдоль которых соответственно θ и p меняются монотонно [1]. Кроме того, даже при использовании принципа максимума θ в теореме 4, все равно необходим анализ изобар для оценки значений θ на некоторых участках границ исследуемых областей.

Автор благодарит П. И. Плотникова за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский А. А.* О плоских вихревых течениях газа // Никольский А. А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
2. *Рылов А. И.* О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95–99.
3. *Рылов А. И.* О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 780–786.
4. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.
5. *Сахненко Т. М.* Экспериментальное исследование обтекания клиньев трансзвуковым потоком газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1990. Т. 21. № 2. С. 111–114.
6. *Никольский А. А., Таганов Г. И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
7. *Биркгоф Г., Сарантанелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир. 1964. 446 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.VII.1991