

УДК 532 : 5.011.536.24

© 1992 г. Г. Г. Черный

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ПЛАВЯЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассматриваются плоские задачи о движении тел в плавящейся твердой среде и о скольжении одного тела по поверхности другого с образованием слоя расплава в зоне контакта тел. Для тел достаточно общей формы развит асимптотический метод, использованный в [1] для случая движения пластины. Решены задачи о движении клина и о поперечном движении круглого цилиндра. Подробно изучена задача о скольжении бруса по плоской поверхности с плавлением материала бруса в зоне контакта.

Пусть на неизменяемый контур (фиг. 1) надвигается с постоянной скоростью V твердая среда, имеющая вдали перед контуром температуру T_∞ и образующая вблизи контура слой расплава или пара. Введем обычные в теории тонкого слоя координаты: x — вдоль контура, y — по нормали к нему; начало координат O поместим в произвольной точке контура. Угол наклона элемента контура к направлению скорости твердой среды обозначим $\gamma(x)$, координату y поверхности фазового перехода — $y^*(x)$. Примем, что точки контура могут перемещаться вдоль него со скоростью $U(x)$.

Уравнения, описывающие течение расплава и распределение температуры в нем, возьмем в приближении тонкого слоя

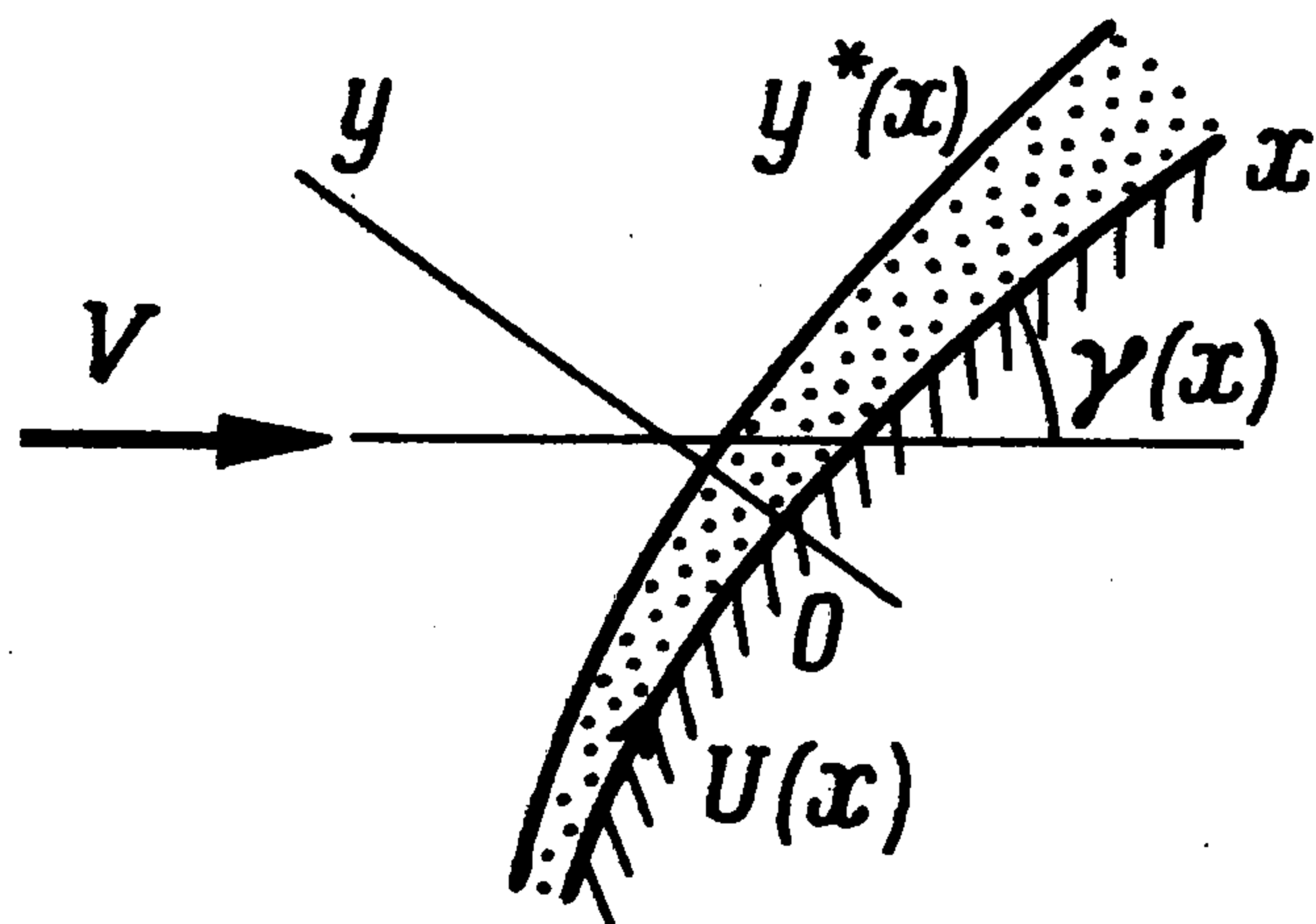
$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u и v — составляющие скорости в направлениях x и y , p — давление, T — температура. Физические параметры расплава — плотность ρ , удельная теплоемкость c , коэффициенты вязкости и теплопроводности μ и λ приняты постоянными. Соответствующие величины ρ_s , c_s и λ_s для твердой среды, как и поглощаемую при плавлении удельную теплоту h , и температуру плавления T_m , также будем считать постоянными.

В соответствии с уравнением неразрывности введем функцию тока ψ так, что $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$.

Краевые условия для уравнений (1) имеют вид

$$\begin{aligned} y=0: \quad \psi=0, \quad \partial\psi/\partial y=U(x), \quad T=T_\infty(x) \\ y=y^*: \quad u=V \cos \gamma - (V \sin \gamma + V) dy^*/dx, \quad T=T_m \\ \lambda \partial T / \partial y \Big|_{y=y^*} dx - \rho h dy^* = \lambda_s \partial T_s / \partial y \Big|_{y=y^*} dx \end{aligned} \quad (2)$$



Фиг. 1

(температура $T_w(x)$ может быть не заданной, а определяться из дополнительных условий, например из условия $\partial T/\partial y|_w=0$).

Последнее условие (3) выписано в приближении тонкого слоя, все остальные справедливы и в точной постановке задачи.

Выражение $\lambda_s \partial T_s / \partial y$ в уравнении баланса тепла на поверхности плавления находится из решения задачи о распределении температуры в твердой среде

$$\rho_s V c_s \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

при краевых условиях

$$y=y^* : T=T_m, \quad y \rightarrow \infty : T=T_\infty \quad (5)$$

Необходимость определения неизвестной заранее границы $y=y^*(x)$ делает эту задачу связанной с задачей о течении в слое расплава.

Следуя идее работы [1], введем вместо x и y новые независимые переменные ζ и $\xi=y/y^*$; функцию тока представим в виде $\psi=y^* \varphi(\zeta, x)$ и введем вместо dp/dx новую величину $k(x)$ по формуле

$$-\mu^{-1} (dp/dx) y^{*2} = k(x) \quad (6)$$

При использовании функции тока ψ второе уравнение системы (1) будет удовлетворено, а уравнение импульсов и уравнение температуры в новых переменных примут вид

$$\begin{aligned} \nu (\varphi''' + k) &= y^{*2} \left(\varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \varphi'' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - y^* y'^* \varphi \varphi'' \\ \lambda T'' + \mu \varphi''^2 &= \rho c \left[y^{*2} \left(\varphi' \frac{\partial T}{\partial x} - T' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - y^* y'^* \varphi T' \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Штрихи у φ и T обозначают их частные производные по ζ , а $y'^* = dy^*/dx$.

Краевые условия (2) и (3) для течения в слое преобразуются к следующим:

$$\zeta=0 : \varphi=0, \quad \varphi'=U(x), \quad T=T_w \quad (8a)$$

$$\zeta=1 : \varphi'(1+y'^{*2}) = V \cos \gamma + (N-1) V \sin \gamma y'^{*} + NV \cos \gamma y'^{*2}, \quad T=T_m,$$

$$\begin{aligned} \rho d(y^*\varphi) &= \rho_s V (\sin \gamma dx + \cos \gamma dy^*) \\ \lambda T' dx + \rho h_f y^* d(y^*\varphi) &= \lambda_s y^* (\partial T_s / \partial y) dy \end{aligned} \quad (85)$$

Условие для φ' (1) получается путем комбинации первого и третьего условий (3).

Для применения асимптотического метода будем считать величину y^* и ее производную y'^* малыми. Условия, при которых величина y^* действительно мала в сравнении с характерным продольным масштабом жидкого слоя, определяются в процессе решения задачи.

Представим функции φ , T , а также k и y^* в виде бесконечных сумм

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, & T &= T_0 + T_1 + T_2 + \dots \\ k &= k_0 + k_1 + k_2 + \dots, & y^* &= y_1 + y_2 + y_3 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

где индекс слагаемого обозначает его порядок малости. Такое представление не является единственным: каждый член суммы может включать и некоторую часть более высокого порядка. Подставляя выражения (9) в уравнения (7) и краевые условия (8), суммируя члены одного порядка и приравнявая эти суммы нулю, получим системы соотношений для последовательного нахождения членов выражений (9). Приведем эти системы для величин, выписанных явно в выражениях (9).

Из уравнений (7) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0''' + k_0 &= 0, & \lambda T_0'' + \mu \varphi_0''^2 &= 0 \\ \varphi_1''' + k_1 &= 0, & \lambda T_1'' + 2\mu \varphi_0'' \varphi_1'' &= 0 \\ \nu (\varphi_2''' + k_2) &= y_1^2 \left(\varphi_0' \frac{\partial \varphi_0'}{\partial x} - \varphi_0'' \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) - y_1 y_1' \varphi_0 \varphi_0'' \\ \lambda T_2'' + \mu (\varphi_1''^2 + 2\varphi_0'' \varphi_2'') &= \rho c \left[y_1^2 \left(\varphi_0' \frac{\partial T_0}{\partial x} - T_0' \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) - y_1 y_1' \varphi_0 T_0' \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Краевые условия (8) дают

$$\begin{aligned} \xi=0: & \varphi_0=0, \quad \varphi_0'=U, \quad T_0=T_w \\ \xi=1: & \varphi_1=0, \quad \varphi_1'=0, \quad T_1=0, \quad \varphi_2=0, \quad \varphi_2'=0, \quad T_2=0 \\ & \varphi_0'=V \cos \gamma, \quad T_0=T_m, \quad \varphi_1'=(N-1)V \sin \gamma y_1', \quad T_1=0 \\ & \varphi_2'=(NV \cos \gamma - \varphi_0') y_1'^2 + (N-1) \sin \gamma y_2', \quad T_2=0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_0 - NV \cos \gamma) y_1' + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} y_1 &= NV \sin \gamma \\ (\varphi_0 - NV \cos \gamma) y_2' + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} y_2 &= - \left(\varphi_1 y_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} y_1 \right) \\ (\varphi_0 - NV \cos \gamma) y_3' + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} y_3 &= - \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 y_2 + \varphi_2 y_1) \\ \lambda T_0' + \rho_s V h_f (y_1 \sin \gamma + y_1 y_1' \cos \gamma) &= \lambda_s y_1 \frac{\partial T_s}{\partial y} \\ \lambda T_1' + \rho_s V h_f [y_2 \sin \gamma + (y_1 y_2' + y_2 y_1') \cos \gamma] &= \lambda_s y_2 \frac{\partial T_s}{\partial y} \\ \lambda T_2' + \rho_s V h_f [y_3 \sin \gamma + (y_1 y_3' + y_2 y_2' + y_3 y_1') \cos \gamma] &= \lambda_s y_3 \frac{\partial T_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

Так как балансовые соотношения на поверхности фазового перехода (третье и четвертое соотношения (8б) при $\zeta=1$) определяют порядок y^* и саму эту величину, то в соответствующих им в главном приближении выражениях (12), определяющих величину y_1 , должны быть сохранены главные части всех слагаемых.

Отметим, что последовательные слагаемые в выражениях (9) для φ и T представляют собой полиномы от ζ повышающегося порядка с коэффициентами, зависящими от x . Влияние конвективного переноса в этих выражениях сказывается лишь начиная с членов второго порядка малости.

Согласно первому уравнению (10), функция φ_0 — полином третьей степени от ζ ; после определения его коэффициентов при помощи первых двух условий (11) и первого условия (12) найдем

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= U\zeta + \frac{1}{2} \left(V \cos \gamma - U + \frac{k_0}{2} \right) \zeta^2 - \frac{k_0}{6} \zeta^3 \\ \varphi_0' &= U + \left(V \cos \gamma - U + \frac{k_0}{2} \right) \zeta - \frac{k_0}{2} \zeta^2\end{aligned}\quad (13)$$

Температура T_0 , согласно второму уравнению (10), — полином первой степени от ζ , если вязкая диссипация не учитывается, полином четвертой степени — при учете диссипации. Определив коэффициенты полинома при помощи третьего условия (11) и второго условия (12), найдем

$$\begin{aligned}T_0 &= T_w - (T_w - T_m)\zeta + \frac{\mu}{\lambda} \zeta (1 - \zeta) \left[\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{\alpha_0 k_0}{3} + \frac{k_0^2}{12} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\alpha_0 k_0}{3} + \frac{k_0^2}{12} \right) \zeta + \frac{k_0^2}{12} \zeta^2 \right]\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}T_0' &= -(T_w - T_m) + \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{\alpha_0 k_0}{3} + \frac{k_0^2}{12} - \alpha_0^2 \zeta + \alpha_0 k_0 \zeta^2 - \frac{k_0^2}{3} \zeta^3 \right) \\ &\quad \left(\alpha_0 = \varphi_0''(0, x) = V \cos \gamma - U + \frac{k_0}{2} \right)\end{aligned}$$

Два условия (12) при $\zeta=1$ для функций φ_0 и T_0 , выражающие условия баланса массы и баланса тепловых потоков на поверхности фазового перехода, после подстановки в них $\varphi_0(1, x)$, $\partial\varphi_0/\partial x|_{\zeta=1}$ и $T_0'(1, x)$ из выражений (13) и (14) превращаются в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для функций $y^*(x)$ и $k_0(x)$

$$\begin{aligned}\left[U + (1 - 2N) V \cos \gamma + \frac{k_0}{6} \right] y^* + \left(\frac{dU}{dx} + V \frac{d \cos \gamma}{dx} + \frac{1}{6} \frac{dk_0}{dx} \right) y^* &= \\ &= 2NV \sin \gamma \\ -\lambda T_0'(1) &= \lambda (T_w - T_m) + \mu \left(\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{2}{3} \alpha_0 k_0 + \frac{k_0^2}{4} \right) = \\ &= \rho_s V h_f y^* (\sin \gamma + \cos \gamma y^*) - \lambda_s y^* \frac{\partial T_s}{\partial y}\end{aligned}\quad (15)$$

Для определения решения этих уравнений при учете соотношения (6) в общем случае требуются три крайних условия для $y^*(x)$, $k(x)$ и $p(x)$.

Отметим, что если не учитывать вязкую диссипацию в слое, то из уравнения баланса тепловых потоков член с μ выпадает и величина $y^*(x)$ может быть найдена из этого уравнения не зависимо от уравнения баланса массы. Последнее служит затем для нахождения $k_0(x)$.

Рассмотрим сначала задачи о течении расплава в слое у прямолинейной части контура. В этом случае $\gamma = \text{const}$ и исходное соотношение баланса масс на поверхности плавления (8) при $\zeta = 1$ интегрируется в конечной форме (в дальнейшем индекс 0 у величин главного приближения опускается)

$$\rho y^* \varphi = \rho_s V [(x - x_0) \sin \gamma + (y^* - y_0^*) \cos \gamma] \quad (16)$$

Постоянная интегрирования выбрана так, что в сечении x_0 при соответствующем этому сечению значении $y^* = y_0^*$ расход расплава равен нулю (при $y_0^* \neq 0$ расплав растекается в обе стороны от сечения $x = x_0$).

Подставив в (16) значение φ (1), получаем интеграл системы (15)

$$k = 6(2N - 1)V \cos \gamma - 6U + 12NV [(x - x_0) \sin \gamma - y_0^* \cos \gamma] / y^* \quad (17)$$

связывающий функции $k(x)$ и $y^*(x)$.

В уравнении баланса тепла (15) не будем учитывать поток тепла в твердую среду. (Этот поток отсутствует, если среда нагрета до температуры плавления, т. е. $T_\infty = T_m$; приближенно его можно учесть, заменив величину h_f «эффективной» теплотой плавления $h_f + c_s(T_m - T_\infty)$.) Тогда это уравнение после подстановки в него выражения для α и использования интеграла (17) будет определять $y^*(x)$

$$-\lambda T'(1) = \lambda(T_w - T_m) + \mu \left[\frac{1}{2} (V \cos \gamma - U)^2 - \frac{k}{6} (V \cos \gamma - U) + \frac{k^2}{24} \right] = \rho_s V h_f \left(\sin \gamma + \cos \gamma \frac{dy^*}{dx} \right) y^* \quad (18)$$

Предположим, что диссипацией в слое можно пренебречь. При этом, как уже говорилось, уравнение (18) становится независимым от (17) и при $\gamma = \text{const}$ легко интегрируется.

При $\gamma = \pi/2$ уравнение вырождается в конечное соотношение

$$y^* = \frac{\lambda(T_w - T_m)}{\rho_s V h_f} \quad (19)$$

и для определения постоянных интегрирования системы (17), (18) и (6) требуются лишь два крайних условия, а не три, как в общем случае.

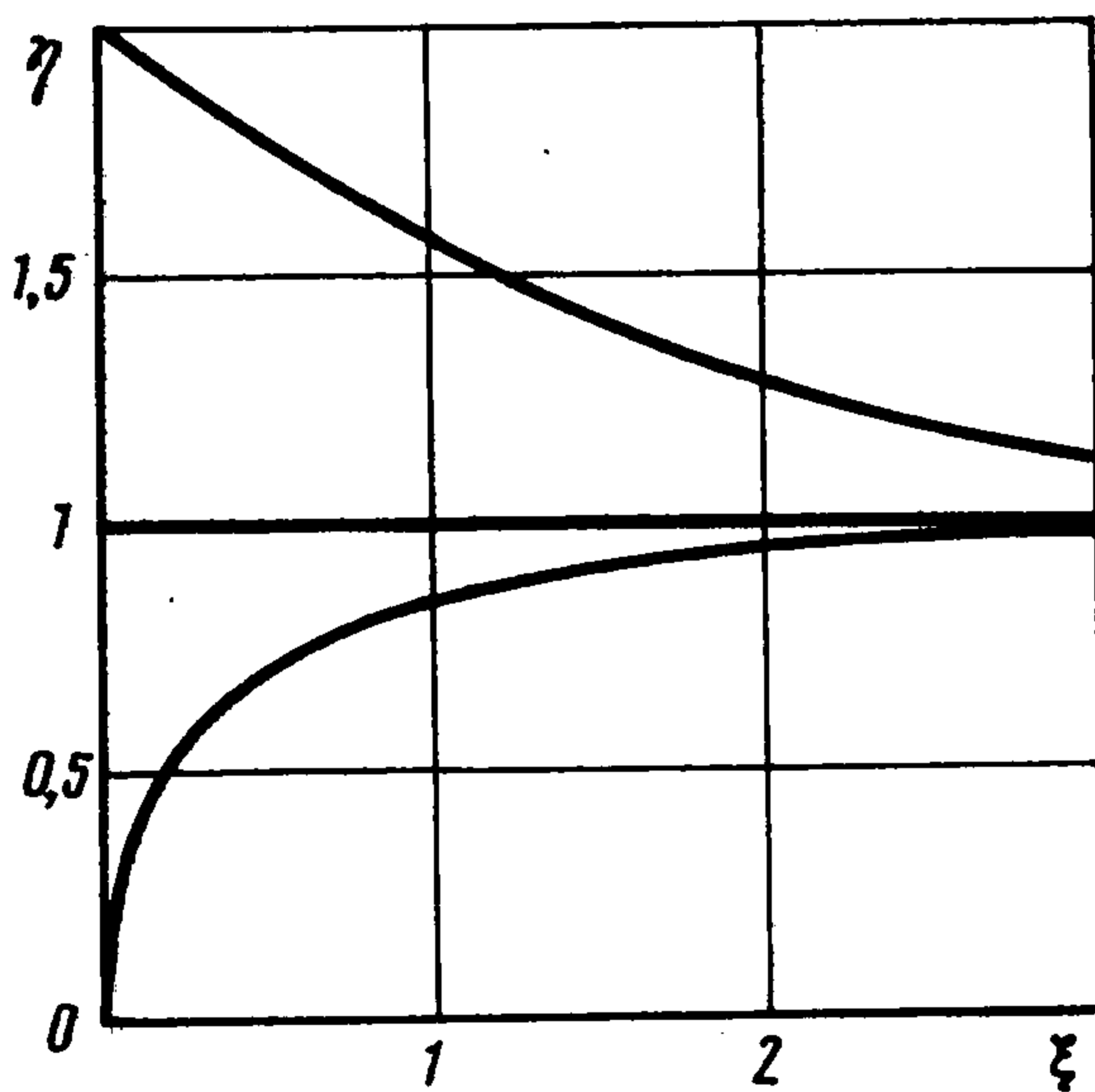
При $\gamma = 0$, предполагая температуру стенки T_w постоянной, получаем (обобщение на случай $T_w \neq \text{const}$ очевидно)

$$y^{*2} = y_0^{*2} + 2 \frac{\lambda(T_w - T_m)}{\rho_s V h_f} (x - x_0) \quad (20)$$

При $\gamma \neq 0, \pi/2$ решение при $T_w = \text{const}$ выражается формулами

$$y^* = \frac{\lambda(T_w - T_m)}{\rho_s V h_f \sin \gamma} = y_\infty^* = \text{const} \quad (21)$$

$$x - x_0 = -\text{ctg} \gamma \left(y^* - y_0^* + y_\infty^* \ln \left| \frac{y_\infty^* - y^*}{y_\infty^* - y_0^*} \right| \right)$$



Фиг. 2

Графики этого решения с точностью до сдвига по x в переменных $\xi = x \operatorname{tg} \gamma / y_{\infty}^*$, $\eta = y^* / y_{\infty}^*$ представлены на фиг. 2. С ростом x толщина слоя возрастает при $y_0^* < y_{\infty}^*$, убывает при $y_0^* > y_{\infty}^*$ и сохраняется постоянной при $y_0^* = y_{\infty}^*$. В первом случае начальная толщина слоя может, в частности, равняться нулю.

Изучим поведение других характеристик течения в слое на участке от $x=0$ до $x=L$ для простейшего случая $y^* = \text{const}$. Для упрощения формул примем, что $\gamma = \pi/2$ (обобщение на случай $\gamma \neq 0$, $\pi/2$ не представляет трудности). Тогда интеграл (17) примет вид

$$k = -6U + 12NV(x - x_0)/y^*$$

Интегрируя соотношение (6) по x и принимая за начальный уровень давлений его значение при $x=L$, получим

$$\frac{y^{*2}}{\mu} p = \left(6U + 12NV \frac{x_0}{y^*}\right)(x - L) - \frac{6NV}{y^*}(x^2 - L^2) \quad (22)$$

Интегрируя величину p еще раз по x от 0 до L , найдем выражение для суммарной нормальной силы, действующей на слой на участке $(0, L)$

$$Y = \frac{4\mu NVL^3}{y^{*3}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x_0}{L} - \frac{3}{4} \beta\right), \quad \beta = \frac{y^*U}{NVL}$$

Здесь β — параметр, характеризующий влияние скорости движения поверхности U .

Для распределения напряжения трения на пластине τ_w и на поверхности плавления твердой среды τ^* получаем

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = \frac{\mu}{y^*} \varphi''(0) = \frac{\mu U}{y^*} \left(-4 + \frac{6}{\beta} \frac{x - x_0}{L}\right)$$

$$\tau^* = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|^* = \frac{\mu}{y^*} \varphi''(1) = \frac{\mu U}{y^*} \left(-2 + \frac{6}{\beta} \frac{x - x_0}{L}\right)$$

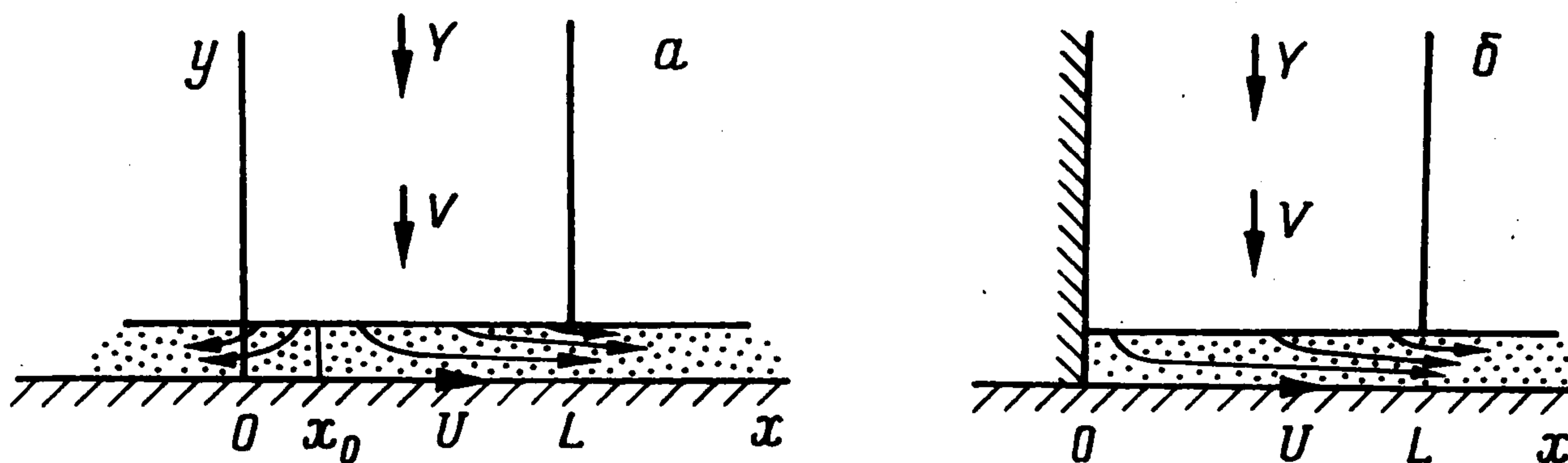
Для суммарных сил трения на участках пластины и поверхности плавления от $x=0$ до $x=L$ отсюда следуют формулы

$$X_w = \frac{\mu UL}{y^*} \left[-4 + \frac{3}{\beta} \left(1 - 2 \frac{x_0}{L}\right)\right], \quad X^* = \frac{\mu UL}{y^*} \left[-2 + \frac{3}{\beta} \left(1 - 2 \frac{x_0}{L}\right)\right]$$

Рассмотрим приложения полученных соотношений к некоторым конкретным задачам.

Пусть брус постоянной конечной ширины L прижат силой Y нормально к движущейся со скоростью U нагретой плоскости (фиг. 3, а, б). При контакте с плоскостью материал бруса плавится и жидкий расплав выжимается из под бруса, так что брус перемещается по направлению к плоскости со скоростью V .

Эта задача имеет ряд приложений и неоднократно рассматривалась ранее. Так, изучен [2] случай $U=0$, причем уравнение движения бралось в том же виде, что и в настоящей работе, а уравнение баланса тепла в слое записывалось в интегральной



Фиг. 3

форме с заданным в виде квадратичного полинома распределением температуры. Методом интегральных соотношений с квадратичными полиномами для скорости и для температуры рассматривался [3] общий случай $U=\text{const} \geq 0$ и $\mu \geq 0$. Наконец, недавно эта задача рассматривалась [4] с использованием тех же уравнений, что и в настоящей статье.

Для применения написанных выше формул к этой задаче определим в них параметр x_0 , т. е. положение сечения, где расход расплава равен нулю. Этот параметр найдем из условия, что давление в сечении $x=0$ такое же, что и при $x=L$, т. е. равно нулю. Из выражения (22) для p , полагая в нем $x=0$ и $p=0$, получаем $x_0/L = 1/2(1-\beta)$. Величина x_0/L равна, очевидно, доле Q расплава, выжимаемого из-под бруса навстречу движению пластины. При $Q=0$ весь выдавливаемый влево расплав возвращается под брус, при $Q>0$ перед брусом должен быть сток расплава, решение с $Q<0$ соответствует втеканию уже имеющегося на пластине расплава под брус. Подставляя полученное выражение для x_0 в формулы для p , τ_w , τ^* , получим

$$p = \frac{6\mu NV}{y^{*3}} x(L-x)$$

$$\tau_w = \frac{\mu U}{y^*} \left(3 \frac{2x-L}{Uy^*} NV - 1 \right), \quad \tau^* = \frac{\mu U}{y^*} \left(3 \frac{2x-L}{Uy^*} NV + 1 \right)$$

Отсюда следует, что распределение давления в этом случае симметрично относительно середины бруса и не зависит от скорости U . Для суммарных сил Y , X_w и X^* справедливы выражения

$$Y = \frac{\mu NV L^3}{y^{*3}}, \quad X^* = -X_w = \frac{\mu UL}{y^*}$$

Отметим, что сила X^* трения бруса о поверхность при наличии слоя расплава такая же, как и сила трения при наличии обычного слоя смазки той же толщины y^* при сдвиговом течении Куэтта в нем.

Подставив в эти выражения $y^* = \lambda(T_w - T_m) / (\rho_s V h_f)$, получим

$$Y = N\mu V \left[\frac{\rho_s V L h_f}{\lambda(T_w - T_m)} \right]^3, \quad X^3 = -X_w = \frac{\mu \rho_s U V L^3}{\lambda(T_w - T_m)}$$

Первая из этих формул устанавливает связь между прижимающей брус силой Y и скоростью плавления V : скорость плавления пропорциональна $Y^{1/3}$. Из формулы для \bar{Q} находим связь этой величины с прижимающей силой Y

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} - \left(\frac{\rho U L h_f}{\lambda(T_w - T_m)} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu U}{Y} \right)^{1/2}$$

Если считать что начального жидкого слоя на пластине нет, то должно быть $Q \geq 0$. Минимальное значение прижимающей силы, при котором выполняется равенство $Q=0$ и весь расплавленный материал увлекается из-под бруса движущейся пластиной, равно

$$Y_{\min} = 4\mu U \frac{\rho U L h_f}{\lambda(T_w - T_m)}$$

С ростом Y , сверх этой величины все большая часть расплава выдавливается из-под бруса навстречу движению пластины; при неограниченном росте Y эта часть стремится к половине общего расхода расплава.

Отметим еще, что полученное равенство модулей сил X_w и X^* справедливо лишь в главном приближении. В действительности их сумма должна равняться (при учете того, что $p(0) = p(L)$) разности проекций на направление x импульсов жидкости в слое в сечениях $x=L$ и $x=0$, которая, как нетрудно подсчитать, равна $\rho_s V L U$. Эта величина и определяет порядок точности выражений для X_w и X^* .

Выпишем еще осредненный коэффициент трения бруса о движущуюся поверхность при наличии слоя расплава

$$\mu_f = \frac{X^*}{Y} = \left(\frac{\mu U}{Y} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho U L h_f}{\lambda(T_w - T_m)} \right)^{1/2}$$

Пусть теперь прижимаемый к движущейся поверхности брус ограничен слева непроницаемой для расплава стенкой (фиг. 3, б). Условие $p(0) = 0$ следует при этом заменить условием $x_0 = 0$. Требуемое точное условие $u = \varphi'(\zeta)$ при $x=0$, $0 < \zeta \leq 1$ удовлетворяется при этом, конечно, лишь в среднем по толщине слоя. Из общих формул при $x_0 = 0$ получаем

$$p = \frac{6\mu N V L^2}{y^{*3}} \left[1 - \frac{x^2}{L^2} - \beta \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] \quad (23)$$

$$\tau_w = \frac{\mu N V L}{y^{*2}} \left(-4\beta + \frac{6x}{L} \right), \quad \tau^* = \frac{\mu N V L}{y^{*2}} \left(-2\beta + \frac{6x}{L} \right)$$

и соответственно

$$Y = \frac{\mu NV L^3}{y^{*3}} (4 - 3\beta)$$

$$X_w = \frac{\mu NV L^2}{y^{*2}} (-4\beta + 3), \quad X^* = \frac{\mu NV L^2}{y^{*2}} (-2\beta + 13) \quad (24)$$

Графики распределения давления в безразмерных переменных

$$\bar{p} = \frac{y^{*3}}{6\mu NV L^2} P, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}$$

для нескольких значений β приведены на фиг. 4. С ростом β , т. е. при увеличении скорости U , давление под бруском благодаря увлекающему действию движущейся поверхности уменьшается; при $\beta=1$ оно достигает нуля у левого края бруса, а при $\beta \geq 2$ становится всюду ниже внешнего давления.

Согласно формулам (24), суммарная нормальная сила Y при $\beta \geq 4/3$ меняет знак и становится отрицательной, т. е. брус прижимается к нагретой поверхности вследствие образующейся под ним области пониженного давления.

Подставив в формулу (24) для Y выражения для β и y^* , после некоторых преобразований найдем связь между величиной Y и скоростью плавления V в виде

$$Y = \frac{\mu U}{N^2} \left(\frac{U}{\alpha}\right)^2 \left[4 \left(\frac{V}{\alpha}\right)^4 - 3 \left(\frac{V}{\alpha}\right)^2 \right] \quad \left(\alpha = \left(\frac{\lambda \Delta T U}{N \rho_s h_f L}\right)^{1/2} \right)$$

Согласно этой зависимости, график которой в переменных

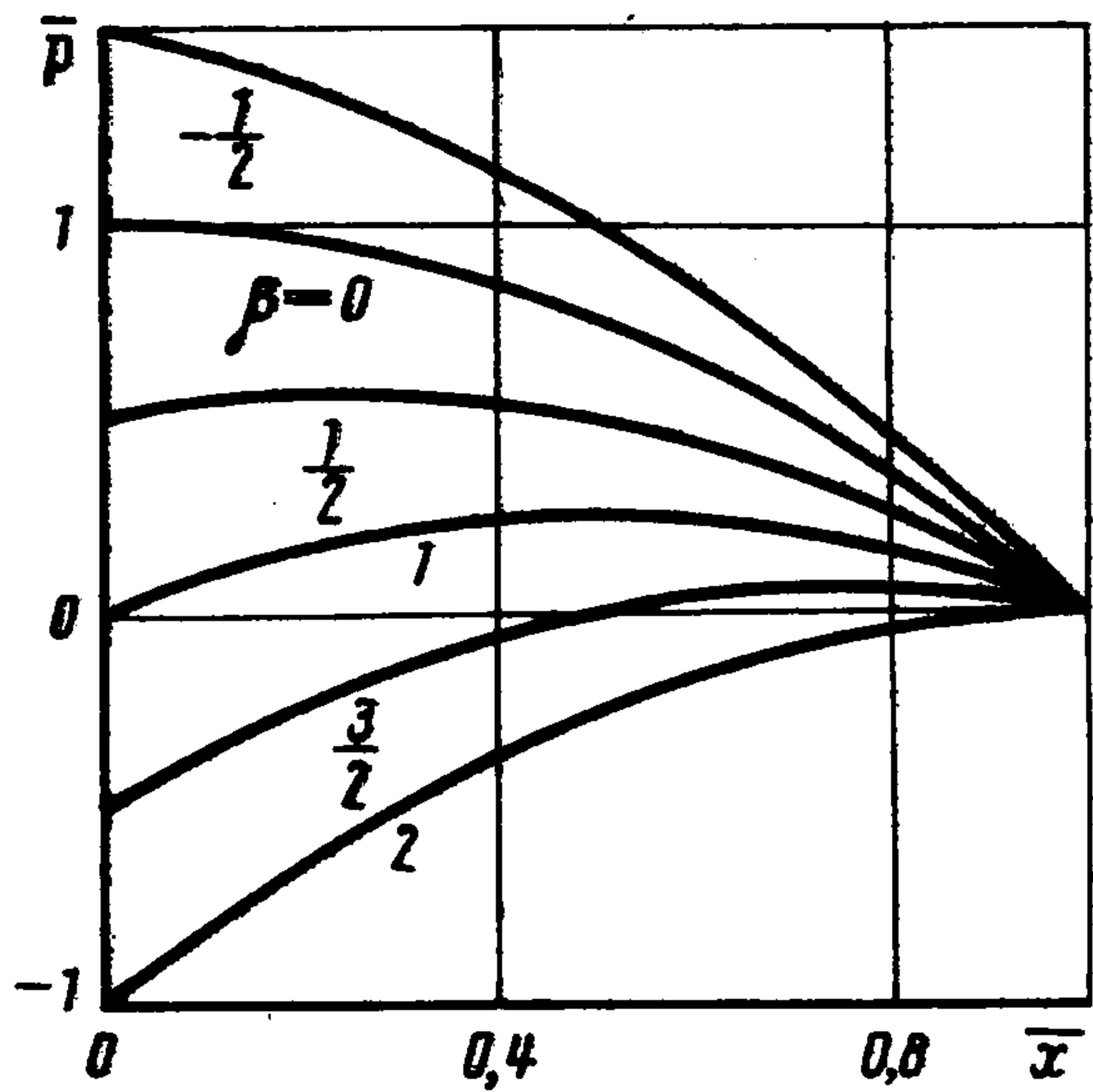
$$\bar{Y} = \frac{N^2}{\mu U} \left(\frac{\alpha}{U}\right)^2 Y, \quad \frac{V}{\alpha}$$

изображен на фиг. 5; решение при уменьшении нагрузки существует до значений

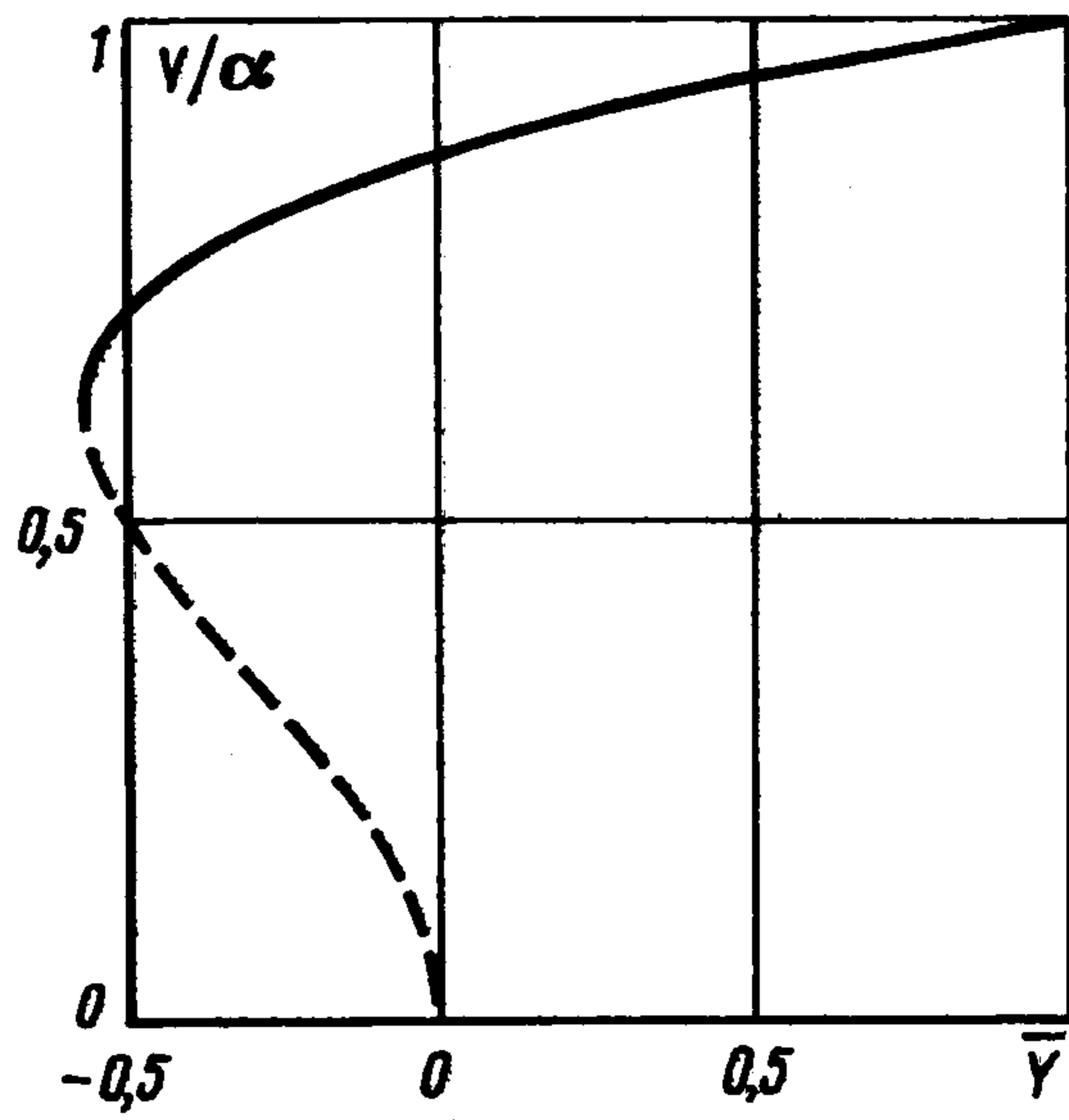
$$Y_{\min} = -\frac{9}{16} \mu U \frac{\rho U L h_f}{\lambda \Delta T}$$

При меньших значениях Y решение задачи в принятой постановке не существует. В диапазоне $Y_{\min} < Y < 0$ одному и тому же значению силы соответствуют два значения скорости плавления. Однако решение с меньшим значением V (штриховой участок кривой на фиг. 5) нужно отбросить из-за того, что в этом решении при возрастании нагрузки толщина слоя y^* , обратно пропорциональная V , тоже возрастает, а не уменьшается, как следовало бы ожидать.

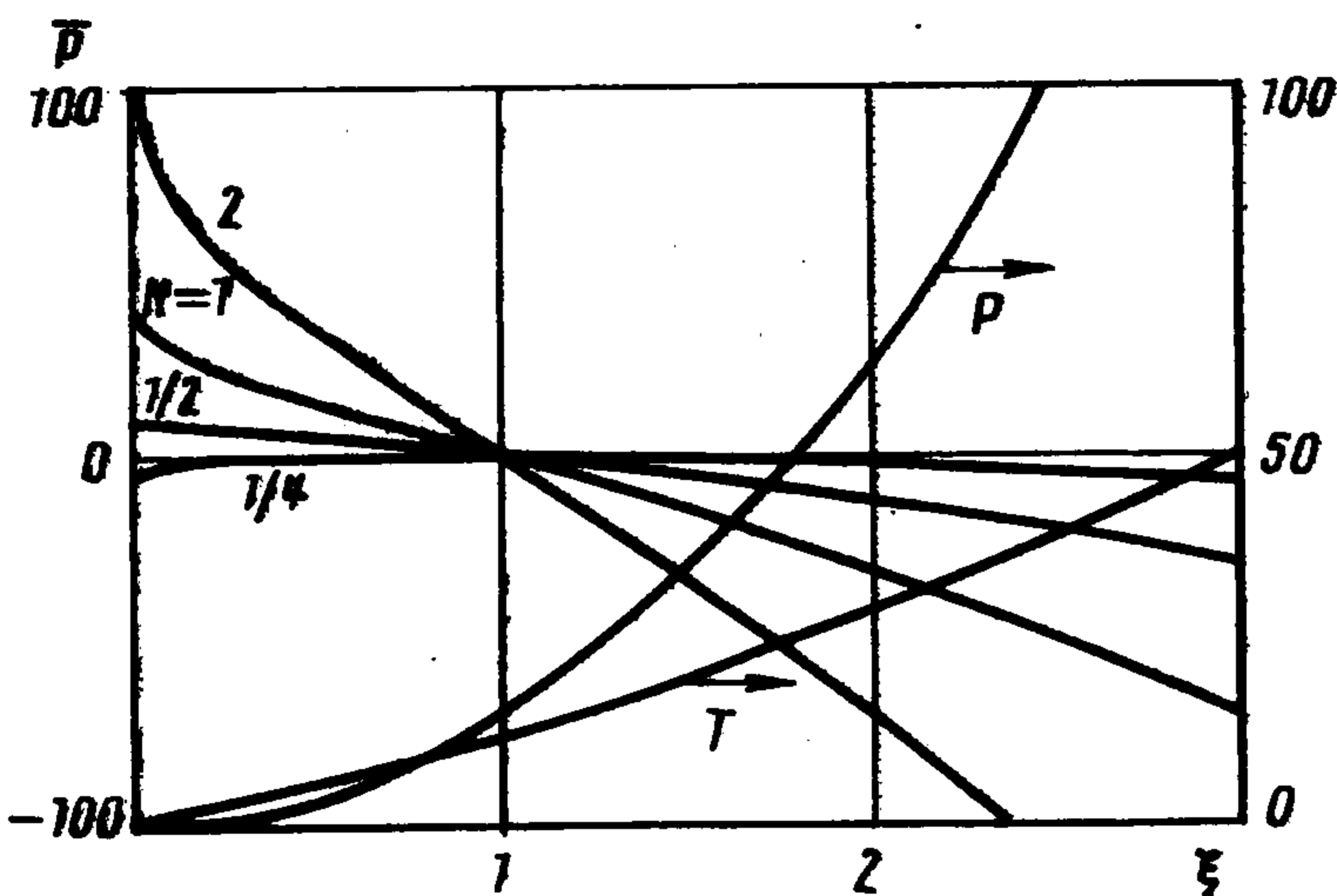
Из формул (24) для X_w и X^* получаем, что при фиксированной силе Y с ростом скорости U сила трения на стенке X_w меняет знак при $\beta=3/4$: из тянущей она становится тормозящей, то же происходит и с силой трения на брусе X^* , но при $\beta=3/2$. Такое изменение легко объяснить поведением профиля скорости расплава в разных сечениях слоя, в свою очередь обусловленным меняющимся с β распределением давления.



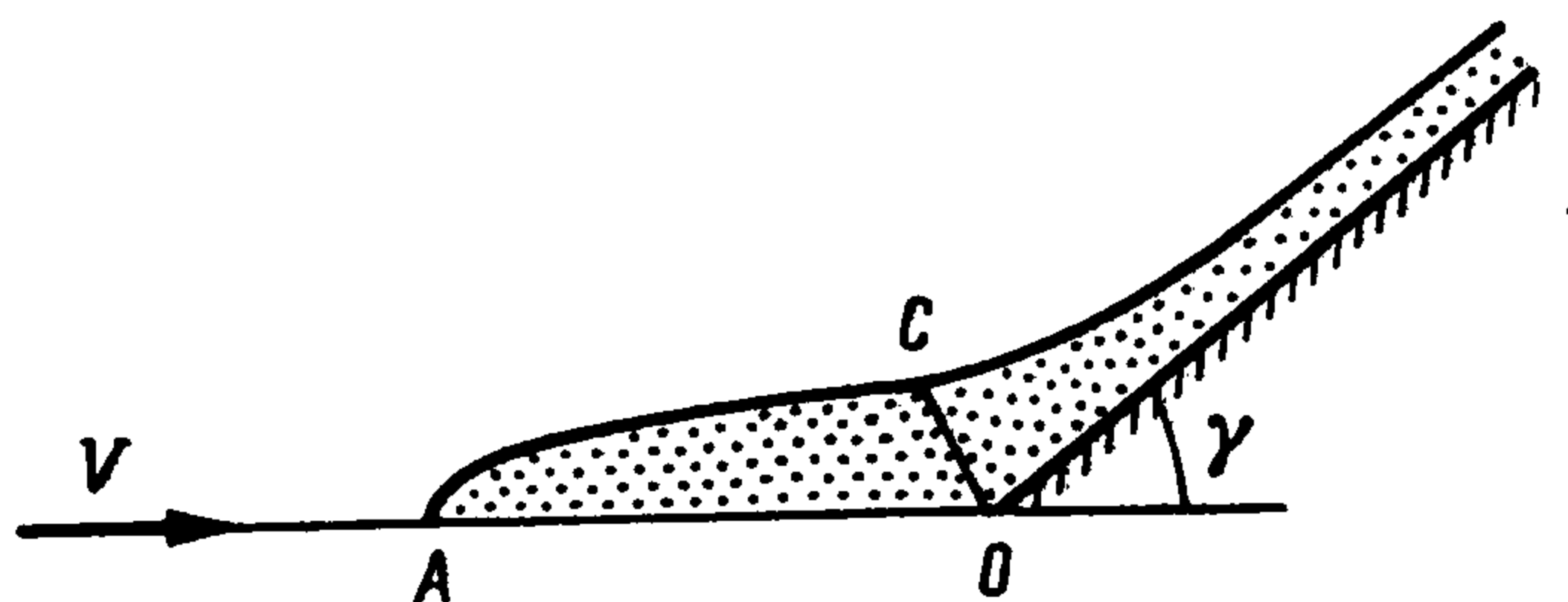
Фиг. 4



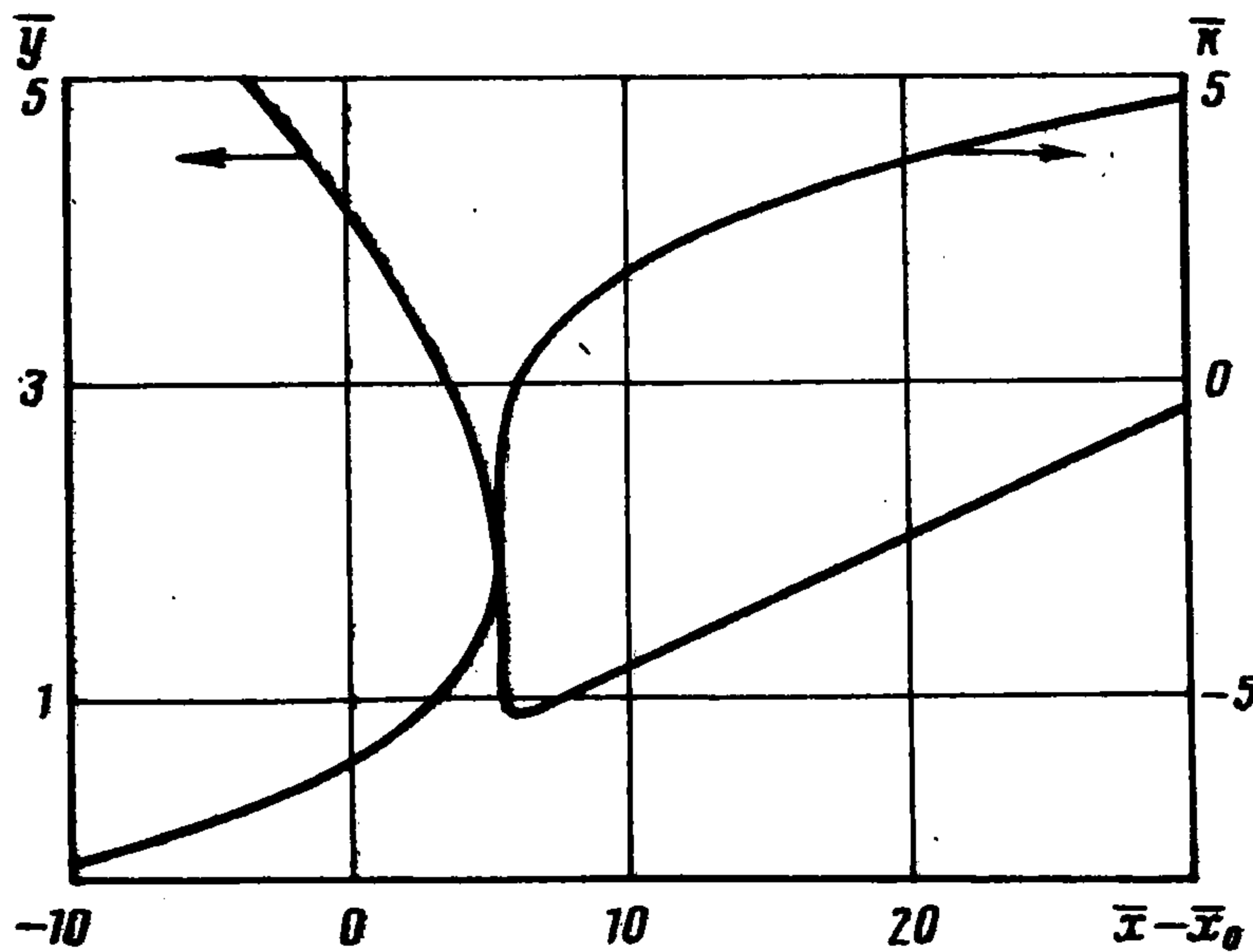
Фиг. 5



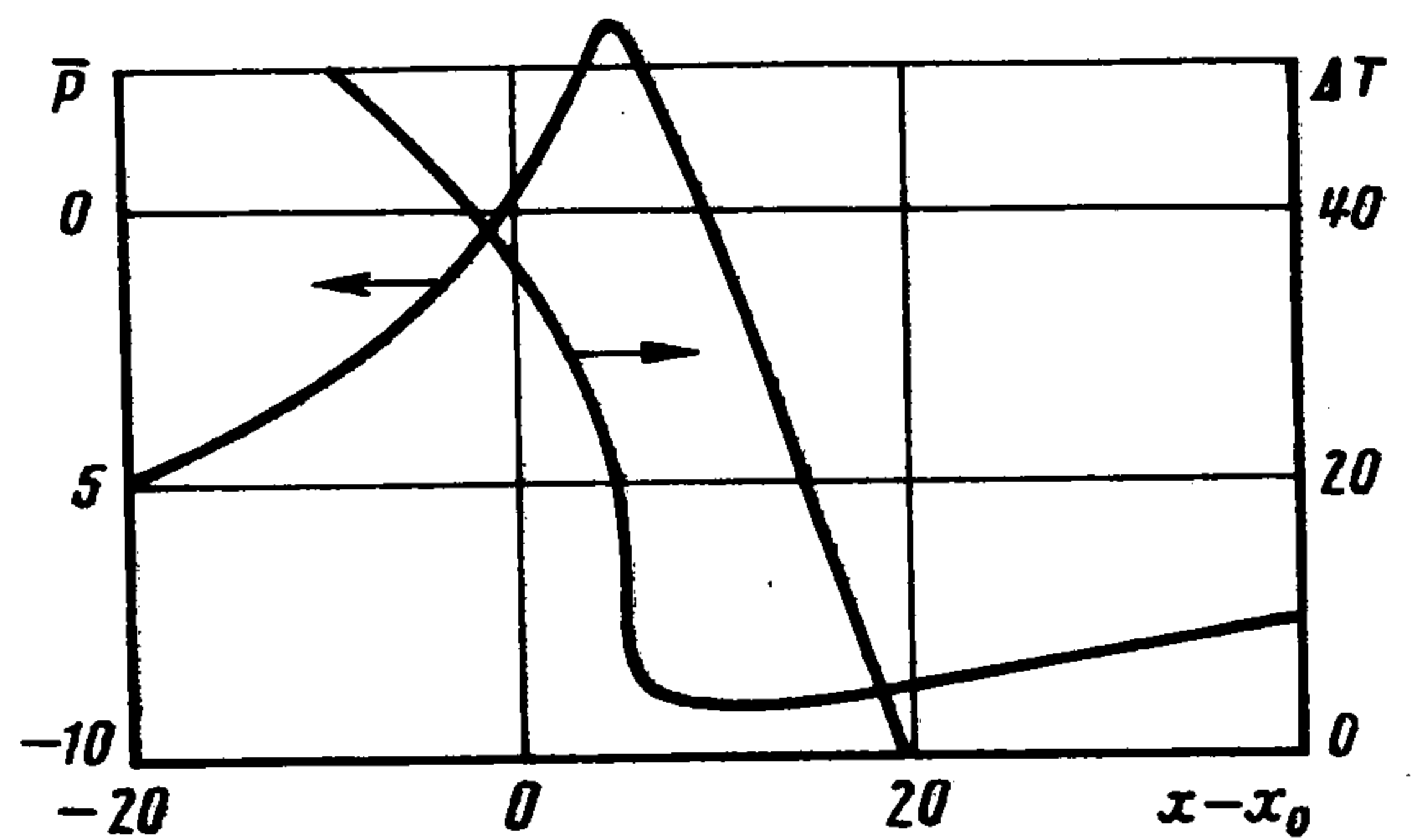
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Рассмотрим теперь симметричное движение клина сквозь плавящуюся среду (эта задача рассматривалась ранее [5] методом интегральных соотношений). Поместим начало координат в вершину клина и примем, что начальная толщина слоя расплава у вершины клина равна нулю, т. е. будем считать, что отход фронта плавления вперед от вершины клина L_T ,

по порядку равный $\lambda(T_w - T_m)(\rho_s V h_f)^{-1}$, пренебрежимо мал по сравнению с длиной стенки клина L , см. [1].

Форма фронта плавления описывается вторым выражением (21) с $y_0^* = 0$ и представлена нижней кривой на фиг. 2.

Так как с неограниченным ростом x толщина слоя расплава стремится к постоянной величине y_∞^* , то скорость расплава должна при этом неограниченно возрастать; можно получить, что при $x \rightarrow \infty$

$$u_{\max} \rightarrow \frac{3}{2} NV \sin \gamma x$$

Из выражения (17) для k_0 при $x_0 = y_0^* = 0$ и $U = 0$ после использования связи между k_0 и dp/dx , полагая вновь $p = 0$ при $x = L$, получим для распределения давления p формулу

$$p = \frac{\rho_s V^2 h_f \mu \cos^2 \gamma}{\lambda(T_w - T_m)} [\bar{p}(\xi) - \bar{p}(\xi_L)]$$

$$\left(\bar{p}(\xi) = \int_{\xi}^1 \frac{6(2N - 1)\eta + 12N\xi}{\eta^3} d\xi, \quad \xi_L = \frac{L \operatorname{tg} \gamma}{y_\infty^*} \right)$$

На фиг. 6 приведен график зависимости $\bar{p}(\xi)$ для нескольких значений N . Нетрудно установить, что при $\xi = 0$ и $N \neq 1/2$ давление имеет логарифмическую особенность ($\bar{p} \rightarrow 6(2N - 1) \ln \xi$), а при больших значениях ξ (когда $\eta \rightarrow 1$) $\bar{p} \rightarrow -\infty$ как $-6N\xi^2$.

Интегрированием выражения (25) получим суммарную силу нормального давления, действующую на участок стороны клина длиной L :

$$P = \mu V \frac{\cos^3 \gamma}{\sin \gamma} \left[\int_0^{\xi_L} \bar{p}(\xi) d\xi - \xi_L \bar{p}(\xi_L) \right] = \mu V \frac{\cos^3 \gamma}{\sin \gamma} \bar{P}$$

Определим силу трения, действующую на участок стороны клина длиной L

$$T_w = \mu \int_0^L \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w dx = \mu \int_0^L \frac{\varphi''(0, x)}{y^*} dx$$

В принятом приближении

$$T_w = \mu \int \frac{\alpha_0(x)}{y^*} dx = \frac{\mu V \cos^2 \gamma}{\sin \gamma} \int_0^{\xi_L} \left[\frac{6N - 2}{\eta} + 6N \frac{\xi}{\eta^2} \right] d\xi = \frac{\mu V \cos^2 \gamma}{\sin \gamma} \bar{T}$$

Графики зависимостей \bar{P} и \bar{T} от ξ_L при $N = 1$ приведены на фиг. 6.

Рассмотрим еще качественно поведение слоя расплава в конфигурации, изображенной на фиг. 7, когда клину предшествует нагретый участок стенки АО, параллельный направлению движущейся твердой среды. Так как вдоль этого участка толщина слоя расплава нарастает (см. формулу (20)) пропорционально корню квадратному из расстояния от начала участка, то у излома стенки толщина слоя y_0^* может быть меньше или больше предельной толщины слоя y_∞^* для клина. В соответствии со вторым

соотношением (21) для y^* слой за изломом стенки будет либо утолщаться, либо толщина его будет убывать.

Рассмотрение течения расплава вблизи излома стенки выходит, конечно, за пределы применимости теории тонкого слоя. Однако приближенно сопряжение решений для двух частей слоя у точки излома стенки можно произвести из условий непрерывности расхода расплава, толщины слоя и давления в сечении ОС (см. фиг. 7, соответствующую случаю, когда $y_0^* > y_\infty^*$).

Более сложной задачей является изучение течений с учетом тепловыделения в слое вследствие вязкой диссипации. Рассмотрим вновь задачу об образовании слоя расплава между движущейся плоскостью (пластиной) и прижатой к ней плавящейся средой. Отдельно изучим случай теплоизолированной пластины, когда необходимое для плавления среды тепло целиком генерируется при вязкой диссипации в слое, и случай, когда задана температура пластины.

В первом случае из второго выражения (14) с использованием условия $T_0'(0) = 0$ получаем

$$T_w = T_m + \frac{\mu}{12\lambda} \left(6U^2 - 2Uk_0 + \frac{k_0^2}{2} \right), \quad T'(1) = -\frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{k_0^2}{12} + U^2 \right)$$

Условия баланса массы (17) и тепла (18) примут вид

$$k_0 = -6U + 12NV \frac{x - x_0}{y^*} \quad (25)$$

$$-\mu \left(\frac{k_0^2}{12} + U^2 \right) + \rho_s V h_f y^* = 0 \quad (26)$$

Таким образом, зависимость y^* от $x - x_0$ выражена параметрически через k_0 : y^* — квадратичный, а $x - x_0$ — кубический полином от k_0 .

Введя новые переменные по формулам

$$x = \frac{\mu U^3}{12N\rho_s V^2 h_f} \bar{x}, \quad y^* = \frac{\mu U^2}{\rho_g V h_f} \bar{y}, \quad k_0 = U\bar{k}, \quad p = \frac{\rho h_f}{12} \bar{p} \quad (27)$$

представим эти зависимости в виде

$$\bar{y} = 1 + \frac{\bar{k}^2}{12}, \quad \bar{x} - \bar{x}_0 = (\bar{k} + 6) \left(1 + \frac{\bar{k}^2}{12} \right) = \frac{16}{3} + \frac{(\bar{k} + 2)^3}{12}$$

Для распределения давления (с точностью до постоянной) и температуры стенки получим

$$\bar{p} = - \int_0^{\bar{x} - \bar{x}_0} \frac{\bar{k}}{\bar{y}^2} d(\bar{x} - \bar{x}_0), \quad \Delta \bar{T} = \frac{12\lambda (T_w - T_m)}{\mu U^2} = \frac{\bar{k}^2}{2} - 2\bar{k} + 6$$

Фиг. 8 иллюстрирует в безразмерных переменных поведение толщины слоя расплава \bar{y} и градиента давления \bar{k} . Толщина слоя сначала уменьшается, достигает при $\bar{x} = \bar{x}_0 + 6$ минимума $y_{\min}^* = \mu U^2 / (\rho_s V h_f)$, а затем вновь возрастает. Величина \bar{k} монотонно возрастает с увеличением \bar{x} и обраща-

ется в нуль при $x = \bar{x}_0 + 6$, т. е. там, где минимальна толщина слоя: давление в этом сечении имеет максимум.

Графики давления и температуры в безразмерных переменных приведены на фиг. 9.

Температура стенки сначала монотонно падает, достигает минимума ниже сечения с наименьшей толщиной слоя, а затем вновь возрастает. Отметим, что при $\bar{x} - \bar{x}_0 = 16/3$ производная $\partial T / \partial x|_w$ обращается в бесконечность, так что, строго говоря, вблизи этого сечения нарушается предположение теории тонкого слоя о возможности не учитывать тепловой поток в продольном направлении.

Используем полученные универсальные зависимости вновь для решения задачи о плавлении бруса шириной L , прижимаемого к пластине силой Y . Как и прежде, для этого необходимо найти значение параметра x_0 . Для определения зависимости от величины прижимающей силы Y этого параметра, а также скорости плавления V в рассматриваемом случае имеем два соотношения.

$$\bar{p}(-\bar{x}_0) = \bar{p}(\bar{x}_L - \bar{x}_0), \quad \frac{12N}{\rho_s h_f L} Y = \frac{1}{\bar{x}_L} \int_{-\bar{x}_0}^{\bar{x}_L - \bar{x}_0} [\bar{p}(\xi) - \bar{p}(-x_0)] d\xi$$

$$(\bar{x}_L = 12N \rho_s h_f L V^2 (\mu U^3)^{-1})$$

На фиг. 10 приведены вычисленные зависимости

$$\bar{x}_L^{1/2} = (12N \rho_s h_f L (\mu U^3)^{-1})^{1/2} V \quad \text{и} \quad x_0/L \quad \text{от} \quad \bar{Y} = 12N (\rho_s h_f L)^{-1} Y$$

В качестве примера их использования на фиг. 11 приведены графики давления

$$p = \frac{\rho_s h_f}{12N} [\bar{p}(\bar{x} - \bar{x}_0) - \bar{p}(-\bar{x}_0)]$$

и температуры для нескольких значений \bar{Y} ; светлые точки на каждой кривой соответствуют сечениям $x = x_0$.

Пусть теперь задана постоянная температура пластины $T_w (> T_m)$. Тогда первое условие (25) баланса массы на поверхности фазового перехода остается тем же, а второе условие (25) баланса тепла заменится согласно (18) следующим:

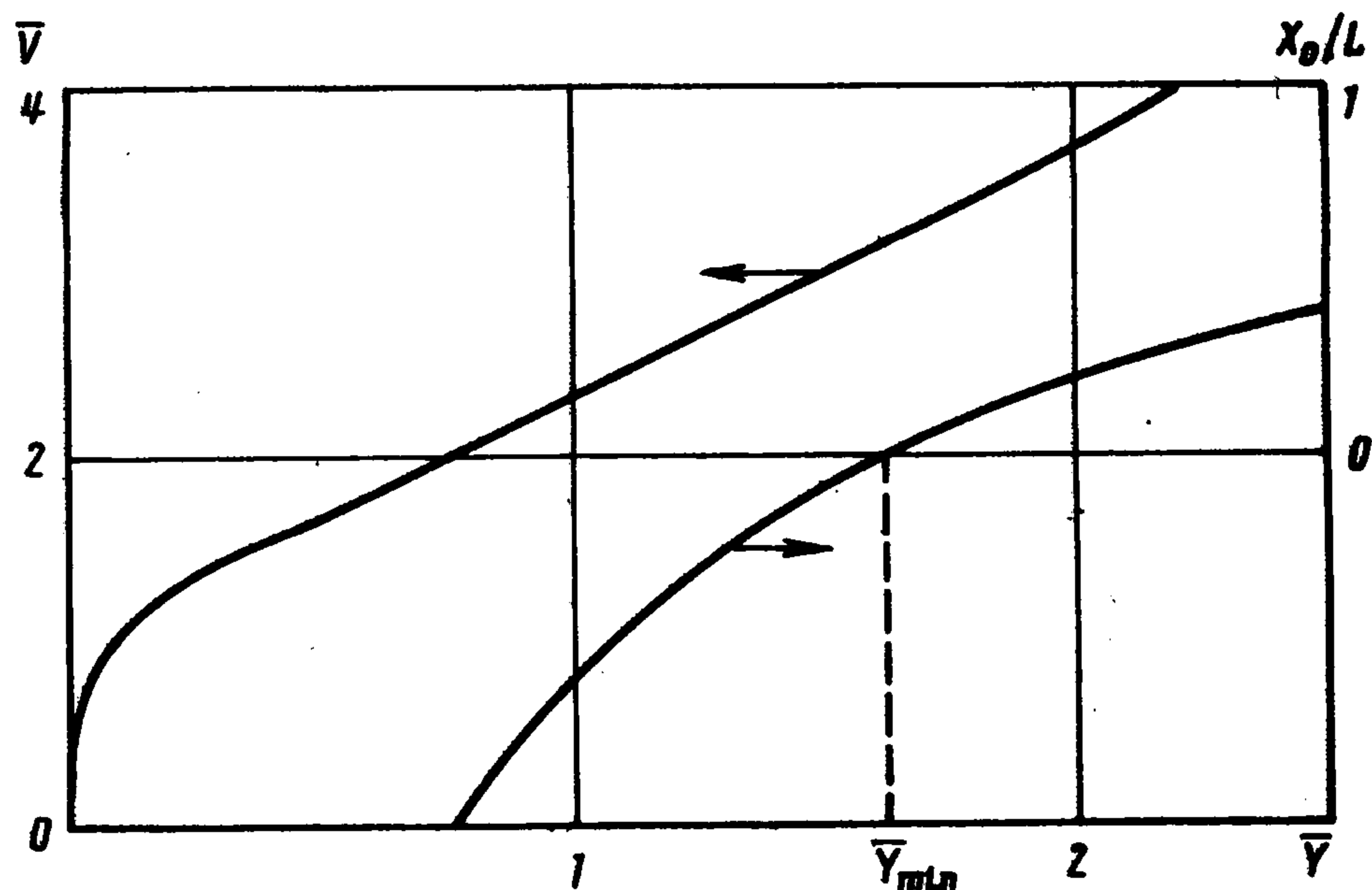
$$\lambda (T_w - T_m) + \mu \left(\frac{k^2}{24} + \frac{Uk}{6} + \frac{1}{2} U^2 \right) = \rho_s V h_f y^*$$

Вводя те же безразмерные переменные (27), приведем определяющие соотношения к виду

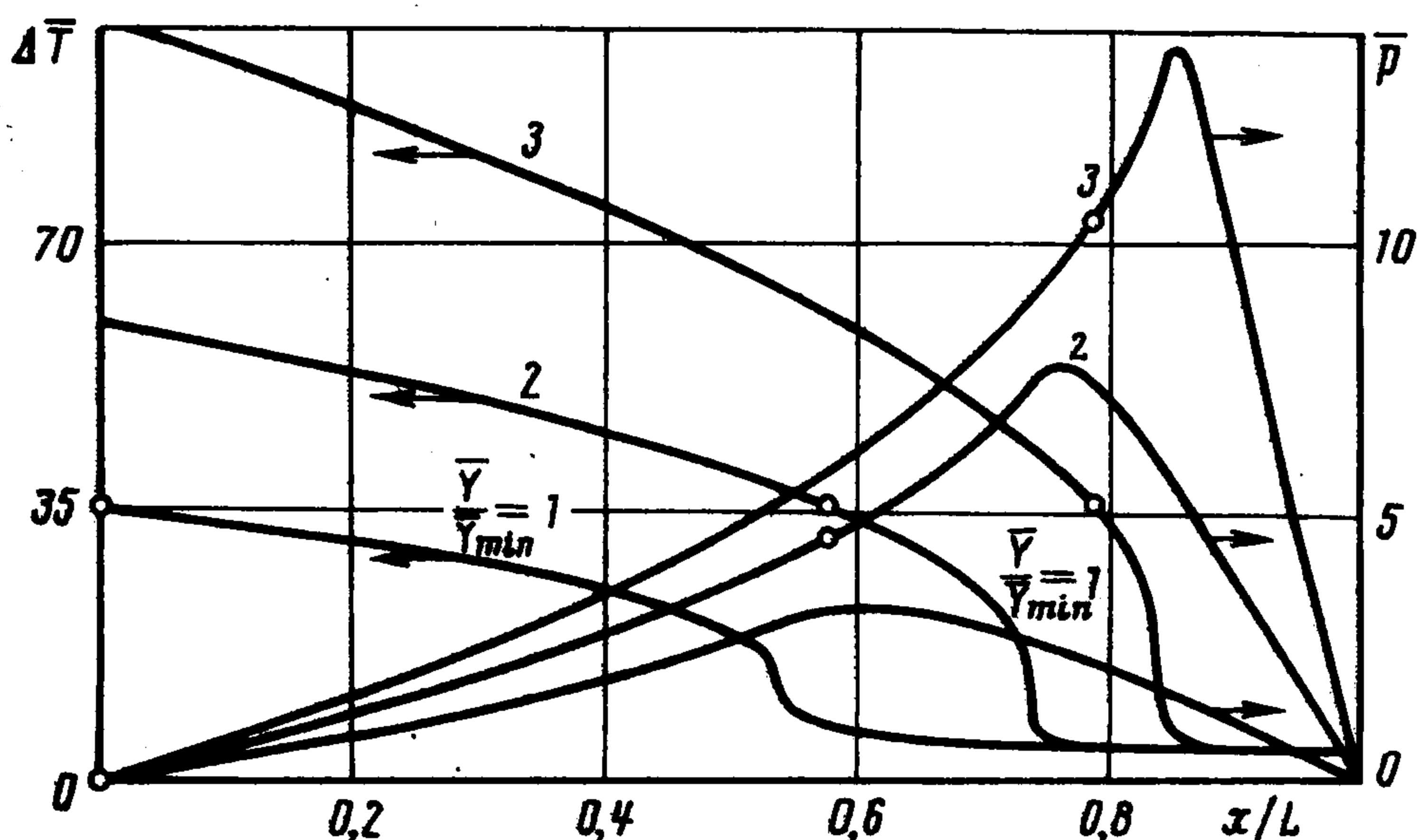
$$\bar{y} = \chi + \left(\frac{\bar{k}^2}{24} + \frac{\bar{k}}{6} + \frac{1}{2} \right), \quad \bar{x} - \bar{x}_0 = (\bar{k} + 6) \bar{y}, \quad \chi = \frac{\lambda (T_w - T_m)}{\mu U^2}$$

Таким образом, в отличие от предыдущего случая определяющие соотношения содержат задаваемый параметр χ .

На фиг. 12, а представлена в безразмерных переменных зависимость y^* от $x - x_0$ для нескольких значений χ . Толщина слоя с ростом ξ умень-



Фиг. 10



Фиг. 11

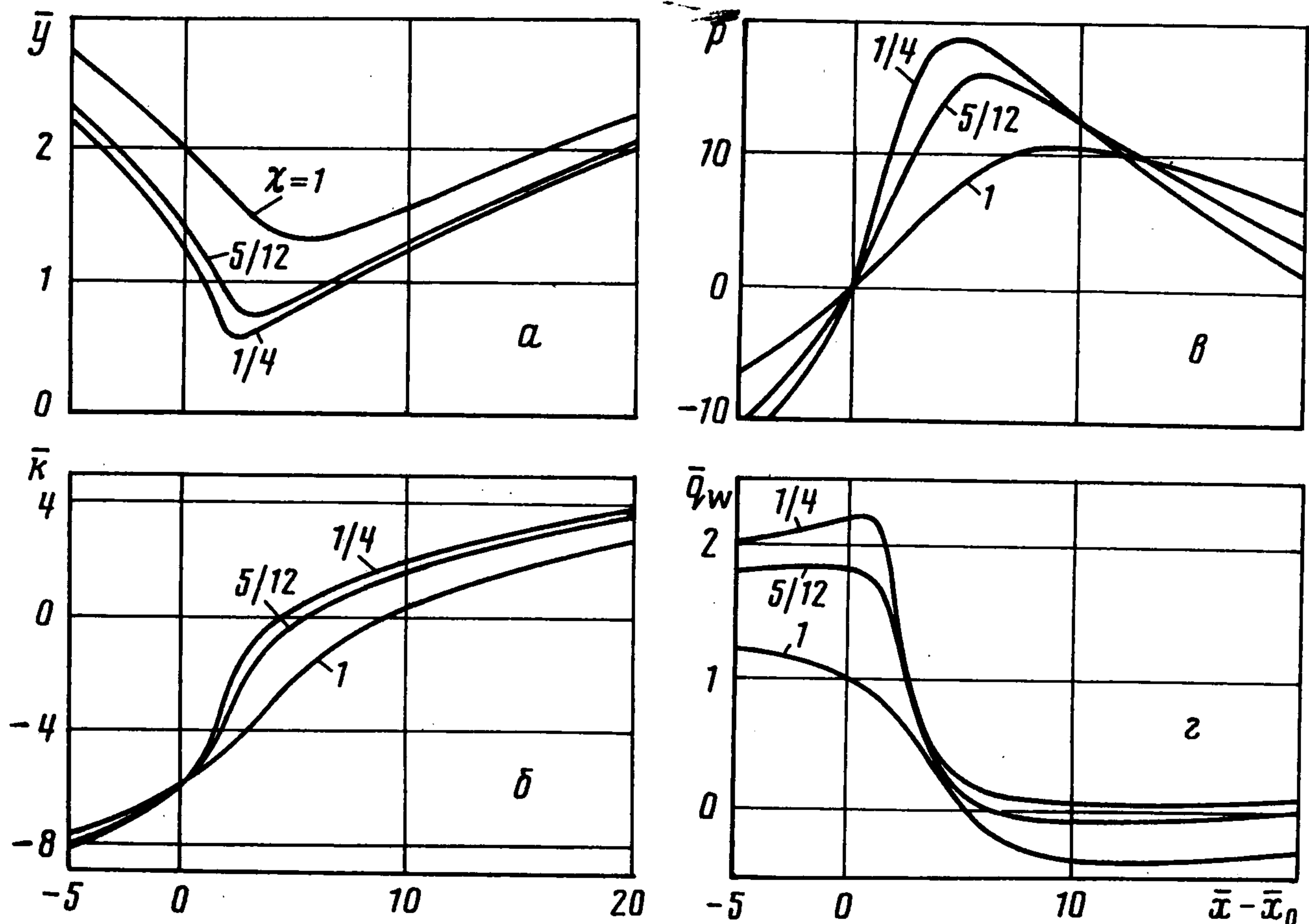
шается до значения $\bar{y}_{min} = \chi + 1/3$ при $\xi = 4(\chi + 1/3)$, а затем вновь возрастает.

Величина \bar{k} с ростом ξ возрастает, переходя через нуль при $\xi = 6(\chi + 1/2)$. Графики $\bar{k}(\xi)$ приведены на фиг. 12, б. Соответственно давление сначала растет, достигает при $\xi = 6(\chi + 1/2)$ наибольшего значения, а затем вновь убывает; соответствующие кривые представлены на фиг. 12, в.

Тепловой поток к пластине определяется формулой

$$\bar{q}_w = \frac{\lambda}{\rho_s V h_f} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w = \frac{1}{\bar{y}} \left(-\chi + \frac{\bar{k}^2}{24} - \frac{\bar{k}}{6} + \frac{1}{2} \right)$$

Графики этой зависимости для трех характерных значений χ , лежащих в диапазонах $(0, 1/3)$, $(1/3, 1/2)$ и $(1/2, \infty)$, приведены на фиг. 12, г. Видно, что при небольшой величине разности $T_w - T_m$ ($\chi < 1/3$) тепловой поток направлен к пластине (положителен), т. е. плавление происходит за счет тепловыделения при диссипации механической энергии в слое расплава. С ростом разности $T_w - T_m$ появляется все больший участок пластины, от которого подводится тепло к потоку, при некотором значении этой разности вся поверхность пластины под брусом является источником тепла.



Фиг. 12

Расчет зависимостей от прижимающей силы скорости плавления бруса V и долей расплава, выжимаемых из-под бруса в разных направлениях, т. е. величины x_0 , проводится по тем же формулам, что и для теплоизолированной пластины.

В заключение рассмотрим задачу об образовании слоя расплава при движении круглого цилиндра нормально к своей образующей в твердой плавящейся среде. Сферический аналог этой задачи в приближении Стокса и без учета вязкой диссипации в слое рассматривался ранее в [5].

Согласно фиг. 13, в этом случае $\gamma = \pi/2 - x/R$, где R — радиус сечения цилиндра, x — расстояние от передней точки вдоль окружности. Соотношения (15) примут при этом вид (вновь пренебрегаем оттоком тепла в твердую среду)

$$\left[(1 - 2N) V \sin \frac{x}{R} + \frac{1}{6} k_0 \right] y^* + \left(\frac{V}{R} \cos \frac{x}{R} + \frac{1}{6} \frac{dk_0}{dx} \right) y^* = 2NV \cos \frac{x}{R} \quad (28)$$

$$\lambda (T_w - T_m) + \mu \left(\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{2}{3} \alpha_0 k_0 + \frac{1}{4} k_0^2 \right) = \rho_s V h_f y^* \left(\cos \frac{x}{R} + y^* \sin \frac{x}{R} \right)$$

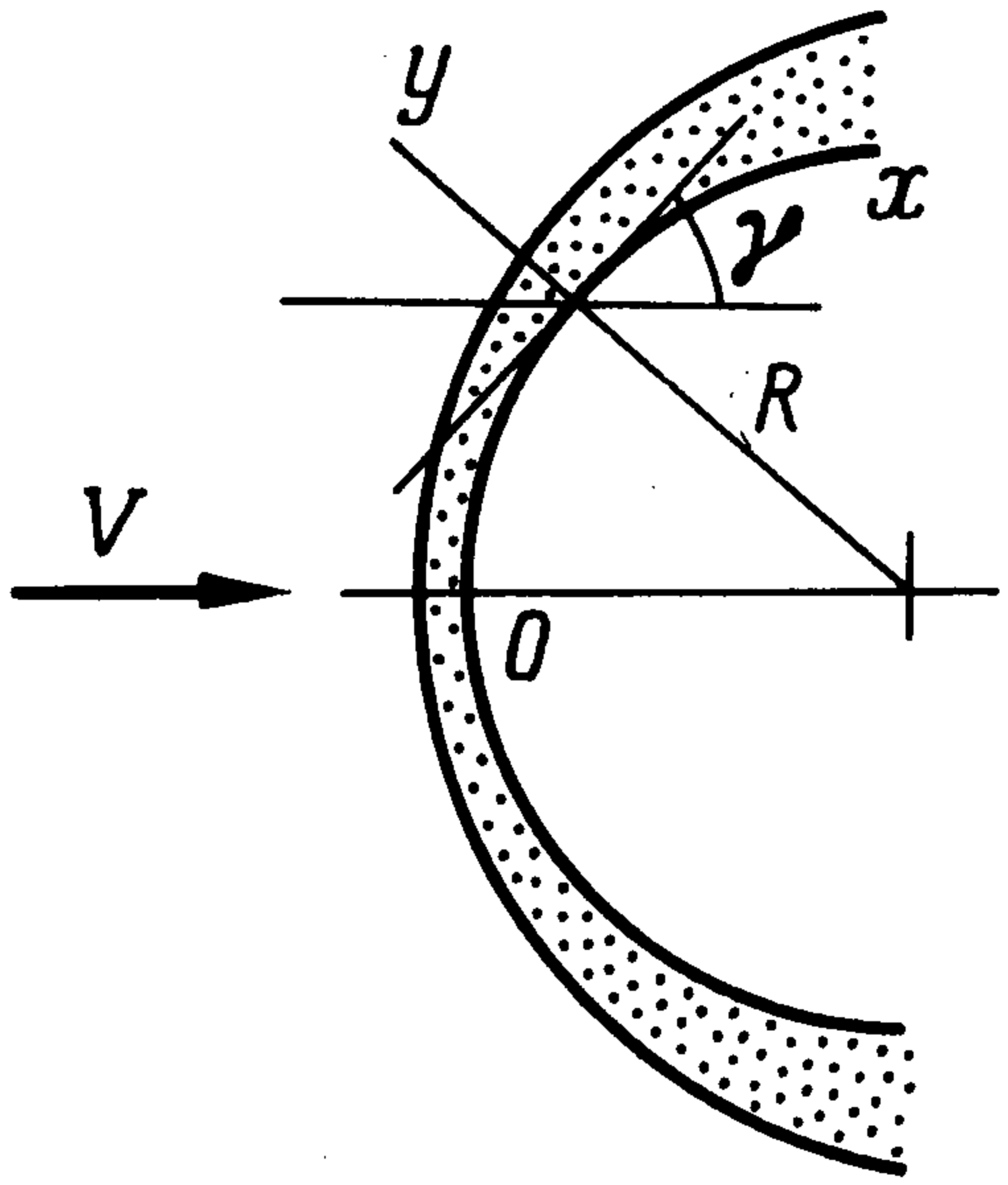
$$(\alpha_0 = V \sin(x/R) + k_0/2).$$

Начальные условия для решения этой системы возьмем в виде

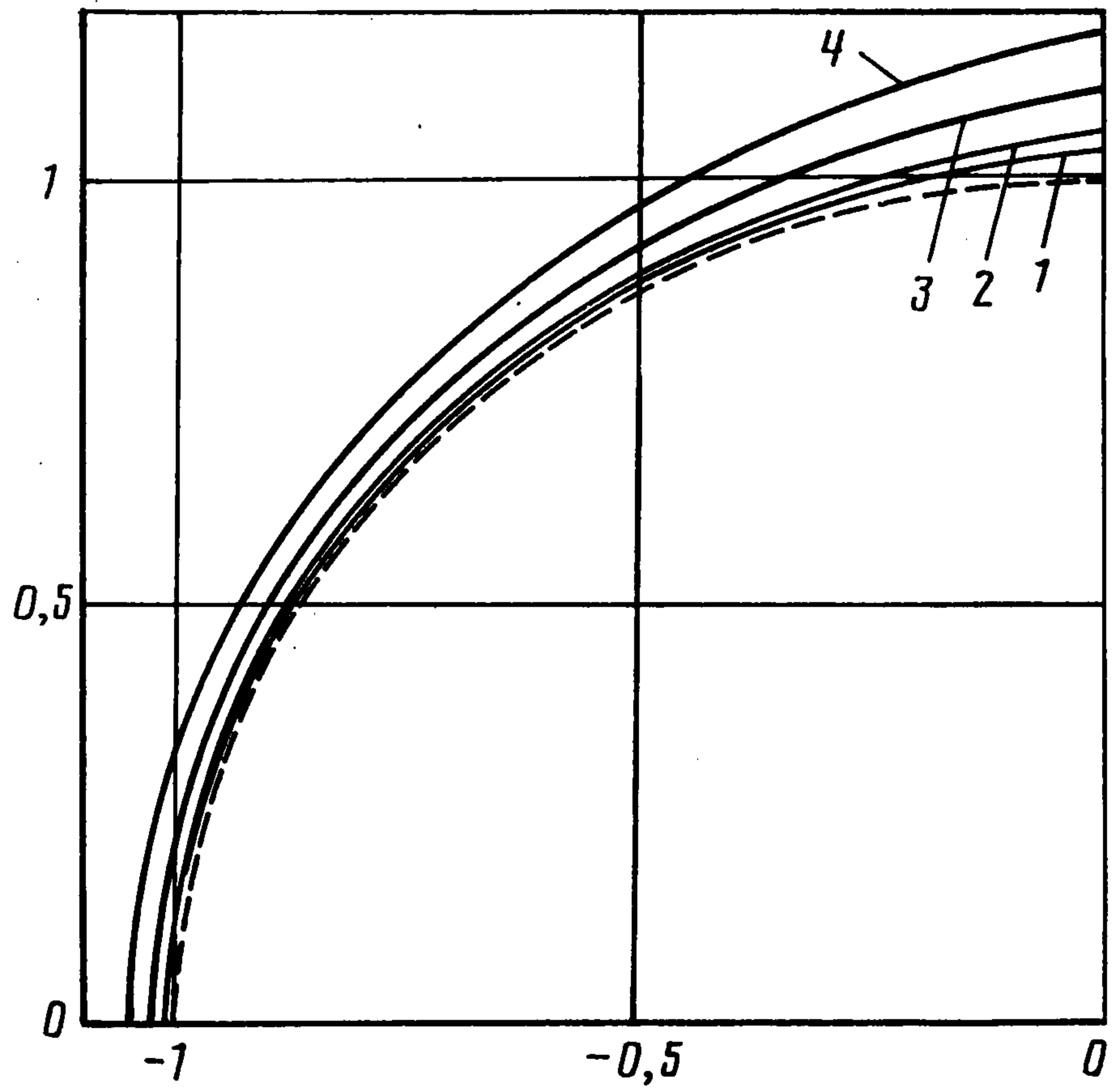
$$x=0: y^* = y_0 = \lambda (T_w - T_m) / (\rho_s V h_f), \quad k=0 \quad (29)$$

Введем безразмерные переменные, обозначив их черточками вверх

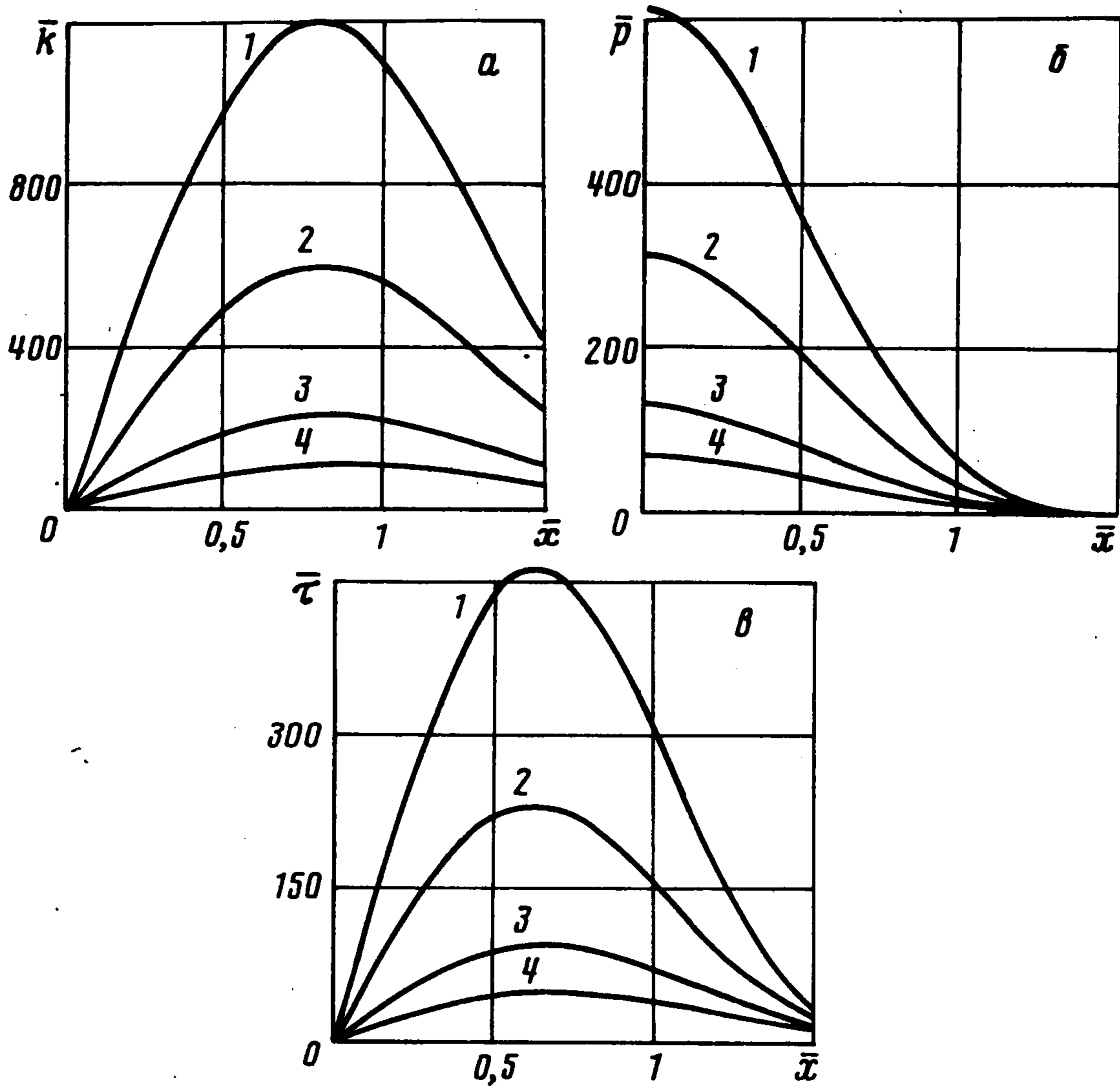
$$x = R\bar{x}, \quad y^* = R\bar{y}, \quad k = V\bar{k}, \quad \alpha = V\bar{\alpha} \quad (\bar{\alpha} = \sin \bar{x} + \bar{k}/2)$$



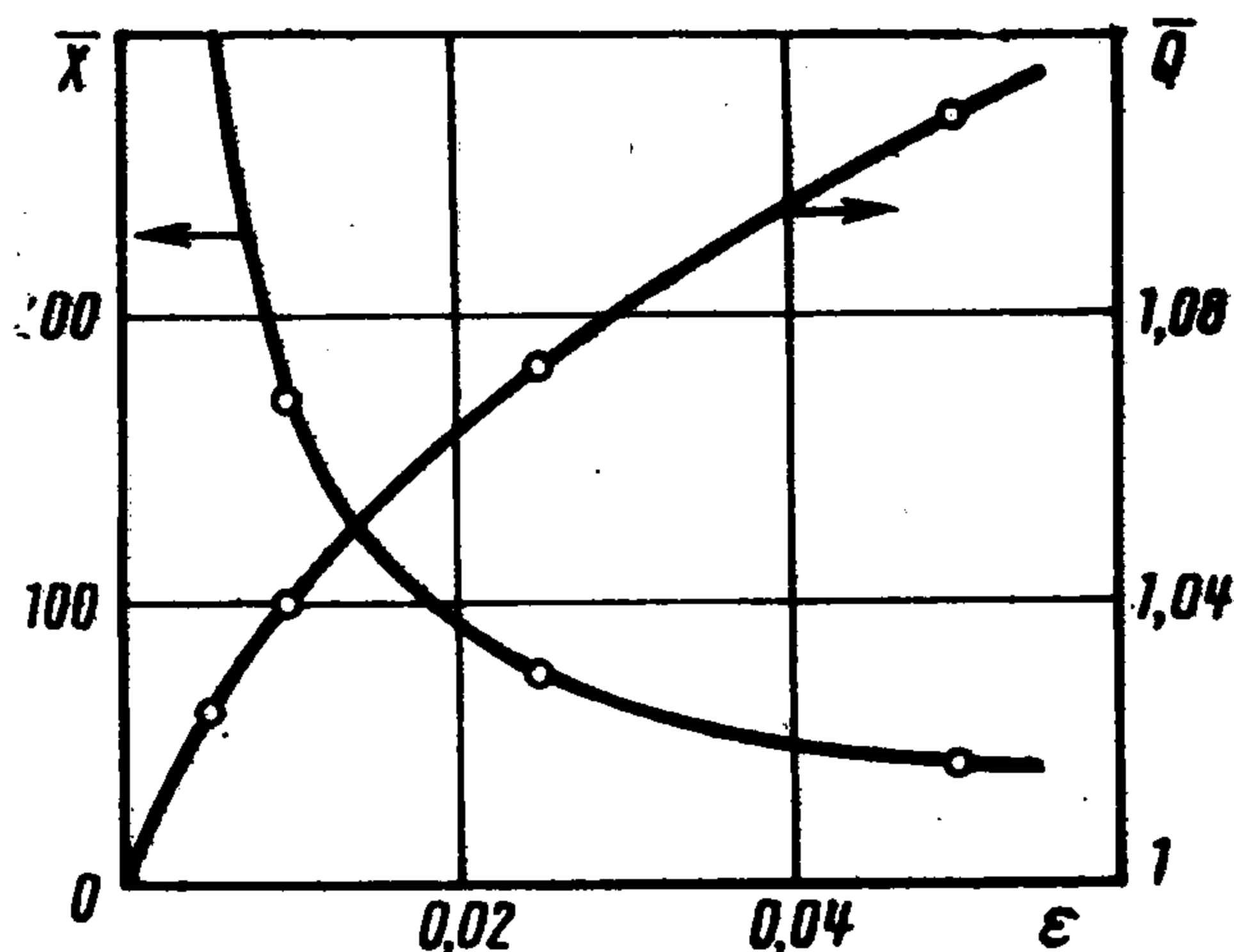
Фиг. 13



Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16

Система (28) с начальными условиями (29) приобретает вид

$$\left[(1 - 2N) \sin \bar{x} + \frac{1}{6} \bar{k} \right] \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \left(\cos \bar{x} + \frac{1}{6} \frac{d\bar{k}}{d\bar{x}} \right) \bar{y} = 2N \cos \bar{x} \quad (30)$$

$$\frac{y_0}{R} + \bar{\mu} \left(\frac{\bar{\alpha}^2}{2} - \frac{2}{3} \bar{\alpha} \bar{k} + \frac{1}{4} \bar{k}^2 \right) = \left(\cos \bar{x} + \sin \bar{x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \right) \bar{y}$$

$$\bar{y}(0) = y_0/R, \quad \bar{k}(0) = 0$$

Эта система содержит кроме величины N еще два параметра:

$$\varepsilon = y_0/R \quad \text{и} \quad \bar{\mu} = \mu V (\rho, h, R)^{-1}$$

После нахождения из системы (30) зависимостей $\bar{y}(\bar{x})$ и $\bar{k}(\bar{x})$ интегрированием соотношения $\mu^{-1} dp/dx = -k/y^{*2}$ находится распределение давления, а интегрированием составляющих избыточной силы давления и силы трения в направлении движения — сопротивление лобовой части цилиндра

$$X = 2 \int_0^{\pi R/2} [\tau \cos \gamma + (p - p_d) \sin \gamma] dx = 2\mu V \int_0^{\pi/2} \left[\frac{(\sin \bar{x} + \bar{k}/2)}{\bar{y}} \sin \bar{x} + \cos \bar{x} \int_0^{\pi/2} \frac{\bar{k}}{\bar{y}^2} d\bar{x} \right] d\bar{x} = 2\mu V \bar{X}$$

Результаты расчетов для случая $\mu=0$, $N=1$ и различных значений параметра $\varepsilon = \lambda (T_w - T_m) (\rho, V h, R)^{-1}$ представлены на фиг. 14, 15.

На фиг. 14 показана форма поверхности слоя расплава; штриховая линия соответствует поверхности цилиндра, кривым 1-4 соответствуют значения $\varepsilon \cdot 10^3 = 5, 10, 25, 50$. На фиг. 15, а представлены графики величины \bar{k} , иллюстрирующей (с обратным знаком) поведение градиента давления вдоль поверхности цилиндра, а на фиг. 15, б, в — распределение избыточного давления $p - p_d = \mu V (\varepsilon^2 R)^{-1} \bar{p}$ и поверхностного трения $\tau = \mu V (\varepsilon R)^{-1} \bar{\tau}$. Наконец, на фиг. 16 точками представлены значения сопротивления лобовой части цилиндра $X = 2\mu V \varepsilon^{-2} \bar{X}(\varepsilon)$ и полного теплового потока от нее в плавящуюся среду $Q = 2\rho, V h, R \bar{Q}(\varepsilon)$.

Автор благодарит М. Славинского за проведение вычислений и подготовку графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Движение пластины в твердой плавящейся среде. ИММ, 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 355-367.
2. Saito A., Ueda Y., Akiyoshi M., Katayama K. On the contact heat transfer with melting // Bull. JSME. 1985. V. 28. No. 242. P. 1703-1709.
3. Черный Г. Г. Движение плавящегося твердого тела между двумя упругими полупространствами // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 813-818.
4. Bejan A. The fundamentals of sliding contact and friction // Trans. ASME: J. Heat Transf. 1989. V. 111. No. 1. P. 13-20.
5. Скворцова А. В. Движение горячего клина в плавящейся среде // Изв. АН СССР. МЖТ. 1988. № 5. С. 52-57.
6. Emerman S. H., Turcotte D. L. Stokes (problem with melting) // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1983. V. 26. No. 11. P. 1625-1630.

Москва

Поступила в редакцию
25.IV.1991