УДК 532.536

© 1992 г. М. А. Брутян, П. Л. Крапивский

ВНУТРЕННИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается вопрос существования и несуществования решений для некоторых моделей несжимаемой вязкоупругой жидкости. Найдено, что для течений Тейлора – Куэтта и Хагена – Пуазейля стандартные азимутальные и одномерные решения не существуют в рамках ряда моделей Олдройда вязкоупругой жидкости. Обнаружено, что в критическом случае, т. е. на границе существования и несуществования решений, некоторые характеристики течений Куэтта и Пуазейля становятся универсальными и не зависят от параметров моделей.

1. Течение Тейлора – Куэтта. Рассмотрим течение несжимаемой вязкоупругой жидкости между двумя концентрическими цилиндрами радиусов R_1 и R_2, вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Течение жидкости описывается уравнениями

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \operatorname{div} \sigma - \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

Тензор напряжения σ связан с тензором скоростей деформации D соотношением

$$\sigma + \lambda F_{abc}(\sigma) = 2\eta[D + \bar{\lambda} F_{\alpha\beta}(D)] \tag{1.2}$$

$$F_{abc}(\sigma) = d\sigma/dt - \Omega\sigma + \sigma\Omega - a(D\sigma + \sigma D) + b(\sigma : D)I + c(Tr\sigma)D$$

$$F_{\alpha\beta}(D) = dD/dt - \Omega D + D\Omega - 2\alpha D^2 + \beta(D : D)I$$

$$D = {}^1/_2[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T], \quad \Omega = {}^1/_2[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T]$$

которое определяет обобщенную 8-параметрическую модель Олдройда [1]. Здесь λ – время релаксации, $\bar{\lambda}$ – время запаздывания, η – коэффициент вязкости, I – единичный тензор, a, b, c, α, β – безразмерные параметры модели, D и Ω – симметричная и антисимметричная части тензора $\nabla\mathbf{v}$.

В частном случае $\bar{\lambda}=0$ модель Олдройда переходит в модель Максвелла (случай $b=c=0$ и $a=1$ соответствует верхнеконвективной модели Максвелла, а случай $b=c=0$ и $a=-1$ – нижнеконвективной модели Максвелла). Упомянем также, что при $a=\alpha=1$ и $b=c=\beta=0$, 8-параметрическая модель Олдройда редуцируется к B-модели Олдройда.

Будем искать азимутальное решение, которое в цилиндрической системе координат r, θ, z имеет вид

$$\mathbf{v} = (0,\ v(r),\ 0), \quad p = p(r), \quad \sigma = \sigma(r) \tag{1.3}$$

В этом случае получаем

$$D = \frac{1}{2} U \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Omega = \frac{1}{2}\omega \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \quad U = r\frac{d}{dr}\left(\frac{v}{r}\right), \quad \omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(vr)$$

Подставляя выражения (1.3) в уравнения движения (1.1), имеем

$$\frac{d}{dr}(r^2\sigma_{r\theta}) = 0, \quad \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta}\right] = \frac{dp}{rd} - \frac{\rho v^2}{r} \tag{1.4}$$

Из первого уравнения (1.4) находим $\sigma_{r\theta} = -2m/r^2$, где m – произвольная постоянная. Из уравнений (1.2) при учете предыдущего получаем

$$\sigma_{rr} = \lambda 2m/r^{-2} U(1-a+b) + \bar{\lambda}\eta U^2(1-\alpha+\beta)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\lambda 2m/r^{-2} U(1+a-b) - \bar{\lambda}\eta U^2(1+\alpha-\beta) \tag{1.5}$$

$$\eta U = -2m/r^{-2} + {}^1/_2 \lambda U [\sigma_{\theta\theta}(1-a+c) - \sigma_{rr}(1+a-c)]$$

Последнее из уравнений (1.5) при помощи двух первых может быть преобразовано к виду

$$\eta\lambda\bar{\lambda} B U^3 + 2mr^{-2}\lambda^2 A U^2 + \eta U + 2mr^{-2} = 0 \tag{1.6}$$

$$A = 1-(a-b)(a-c), \quad B = 1-(a-c)(\alpha-\beta)$$

Перейдем к исследованию частных случаев. Для модели Джеффри ($\lambda=0$) азимутальная скорость совпадает с классическим выражением для ньютоновской жидкости. Для модели Максвелла ($\bar{\lambda}=0$) уравнение (1.6) становится квадратным и из его решения можно получить окончательное выражение для азимутальной скорости течения

$$v = r\left(\omega_1 + \int_{R_1}^{r} U(x)\frac{dx}{x}\right), \quad U(r) = \frac{-\eta r^2 + \sqrt{\eta^2 r^4 - 16 m^2 \lambda^2 A}}{4m\lambda^2 A} \tag{1.7}$$

Отметим, что граничное условие прилипания на внутреннем цилиндре выполнено; выполнение граничного условия на внешнем цилиндре определяет постоянную m.

Решение (1.7) существует лишь в случае, когда выражение под корнем неотрицательно. Более подробно рассмотрим случай изолированного вращающегося цилиндра, $R_2 \to \infty$. Интегрируя соотношение (1.7), получаем (De – число Деборы)

$$\begin{gathered} v = r\omega_1\left[1 + \frac{f(R_1) - f(r)}{\mathrm{De}\sqrt{A}}\right]; \qquad f(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \Phi(r) + \operatorname{arctg}\Phi(r) \\ \Phi(r) = \sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^4 - 1}, \quad R = \left(\frac{4m\lambda}{\eta}\right)^{1/2} A^{1/4}, \quad \mathrm{De} = 2\omega_1\lambda \end{gathered} \tag{1.8}$$

Из очевидного граничного условия $v=0$ при $r=\infty$ получаем соотношение

$$\mathrm{De}\sqrt{A} = \pi/2 - f(R_1) \tag{1.9}$$

которое неявно определяет постоянную m как функцию числа Деборы, числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho\omega_1 R_1^2/\eta$ и параметра A. Отметим, что функция $f(r)$ определена при $r \geqslant R$ и возрастает от 1 до $\pi/2$ при увеличении r от R до бесконечности. Таким образом, из (1.9) получаем, что стандартное решение типа (1.3) существует для жидкости Максвелла в диапазоне чисел Деборы

$$0 \leqslant \mathrm{De} \leqslant (\pi/2 - 1)A^{-1/2} \tag{1.10}$$

Момент, действующий на цилиндр, при малых числах Деборы дается выражением

$$M = -2\pi r^2 \sigma_{r\theta} = 4\pi m = 4\pi\eta\omega_1 R_1^2\left[1 - \frac{1}{3}A\,\mathrm{De}^2 + \frac{7}{30}(A\,\mathrm{De}^2)^2 + \ldots\right] \tag{1.11}$$

Отметим, что при увеличении числа De безразмерный момент $\mu = M/4\pi\eta\omega_1 R_1^2$ уменьшается от единицы (для ньютоновской жидкости) до $(\pi-2)^{-1} \approx 0{,}876$ на верхней границе области существования. Уменьшение крутящего момента непосредственно видно из асимптотического разложения (1.11) при малых числах Деборы; при произвольных числах Деборы это следует из элементарного анализа условия разрешимости (1.9).

В предшествующих результатах неявно предполагалось, что параметр A неотрицателен, как это и имеет место в наиболее распространенных реологических моделях [1]. Для полноты аналогичный анализ был проведен и в случае $A<0$. Оказалось, что в этом случае решение существует всегда и крутящий момент возрастает с возрастанием числа Деборы.

Таким образом, показано, что азимутальное течение Куэтта существует в ограниченной области чисел Деборы в случае, если $A>0$.

2. Течение Пуазейля. Рассмотрим стационарное однонаправленное течение вязкоупругой жидкости в трубе произвольного сечения, индуцированное градиентом давления. Для такого течения

$$\mathbf{v}=(0,0,w(x,y)),\quad D=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&0&w_x\\0&0&w_y\\w_x&w_y&0\end{Vmatrix},\quad \Omega=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}0&0&-w_x\\0&0&-w_y\\w_x&w_y&0\end{Vmatrix}\tag{2.1}$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты (z направлена вдоль оси трубы), $w_x=\partial w/\partial x$ и $w_y=\partial w/\partial y$. Выражения (2.1) подсказывают, что тензор напряжений следует искать в аналогичном виде

$$\sigma=\begin{Vmatrix}0&0&\sigma_1\\0&0&\sigma_2\\\sigma_1&\sigma_2&\sigma_3\end{Vmatrix}$$

После подстановки этих выражений в два последних соотношения из (1.2) видно, что «производные» $F_{abc}(\sigma)$ и $F_{\alpha\beta}(D)$ имеют требуемую форму при выполнении условий

$$a=1,\quad b=0,\quad \alpha=1,\quad \beta=0\tag{2.2}$$

Отметим, что модель Олдройда с ограничениями (2.2) является однопараметрическим обобщением B-модели Олдройда (последняя соответствует случаю $c=0$).

В дальнейшем будем рассматривать именно модель Олдройда с ограничениями (2.2). В этом случае из уравнений состояния находим

$$\sigma_{1,2}=\eta j w_{x,y},\quad \sigma_3=2\eta(\lambda-\bar{\lambda})(\nabla w)^2/[1+c\lambda^2(\nabla w)^2]$$
$$j=[1+c\lambda\bar{\lambda}(\nabla w)^2]/[1+c\lambda^2(\nabla w)^2]\tag{2.3}$$

Подставляя выражения (2.3) в уравнение движения (1.1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(jw_x)+\frac{\partial}{\partial y}(jw_y)=\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz}\tag{2.4}$$

Отметим, что (2.4) можно интерпретировать как уравнение неразрывности для потенциальных течений идеального сжимаемого фиктивного газа с источниками. При этом j играет роль плотности фиктивного газа; продольная скорость $w(x,y)$ течения вязкоупругой жидкости играет роль потенциала, так что $\mathbf{q}=\nabla w=(w_x,w_y)$ – скорость фиктивного газа; постоянный градиент давления играет роль интенсивности источников. Это любопытная математическая аналогия между однонаправленными вязкоупругими несжимаемыми течениями и сжимаемыми течениями фиктивного газа полезна для качественного анализа свойств вязкоупругой жидкости.

Перейдем к анализу вопроса о существовании решений уравнения (2.4). Для B-модели Олдройда параметр $c=0$, так что плотность фиктивного газа постоянна и уравнение (2.4) редуцируется к уравнению Пуассона. Таким образом, однонаправленные вязкоупругие течения B-жидкости Олдройда описываются тем же самым уравнением, что и однонаправленные течения классической жидкости. Несуществование решения возможно лишь при $c\neq0$, точнее при $c>0$. В этом случае уравнение (2.4) для максвелловской жидкости ($\bar{\lambda}=0$) приобретает вид

$$\nabla\cdot(\mathbf{q}/(1+c\lambda^2q^2))=\eta^{-1}dp/dz\tag{2.5}$$

Интегрируя уравнение (2.5) по площади сечения трубы S, получаем

$$\oint\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{1+c\lambda^2q^2}\,dl=\frac{S}{\eta}\frac{dp}{dz}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали. Используя неравенство

$$q/(1+c\lambda^2q^2)\leqslant 1/(2\sqrt{c\lambda^2})$$

и обозначая через L периметр сечения трубы, приходим к необходимому условию существования решения

$$0 \leqslant \mathrm{De} \leqslant 1/\sqrt{c}, \quad \mathrm{De} = 2SL^{-1}\lambda(-\eta^{-1}dp/dz) \tag{2.6}$$

Отметим, что условие существования однонаправленного течения Пуазейля (2.6) напоминает условие существования течения Куэтта (1.10). Заметим также, что при учете ограничения (2.2) на параметры модели Олдройда постоянные A и c тождественны.

Для круглой трубы необходимое условие существования решения (2.6) оказывается достаточным. Это следует из явного решения исходного уравнения (2.4)

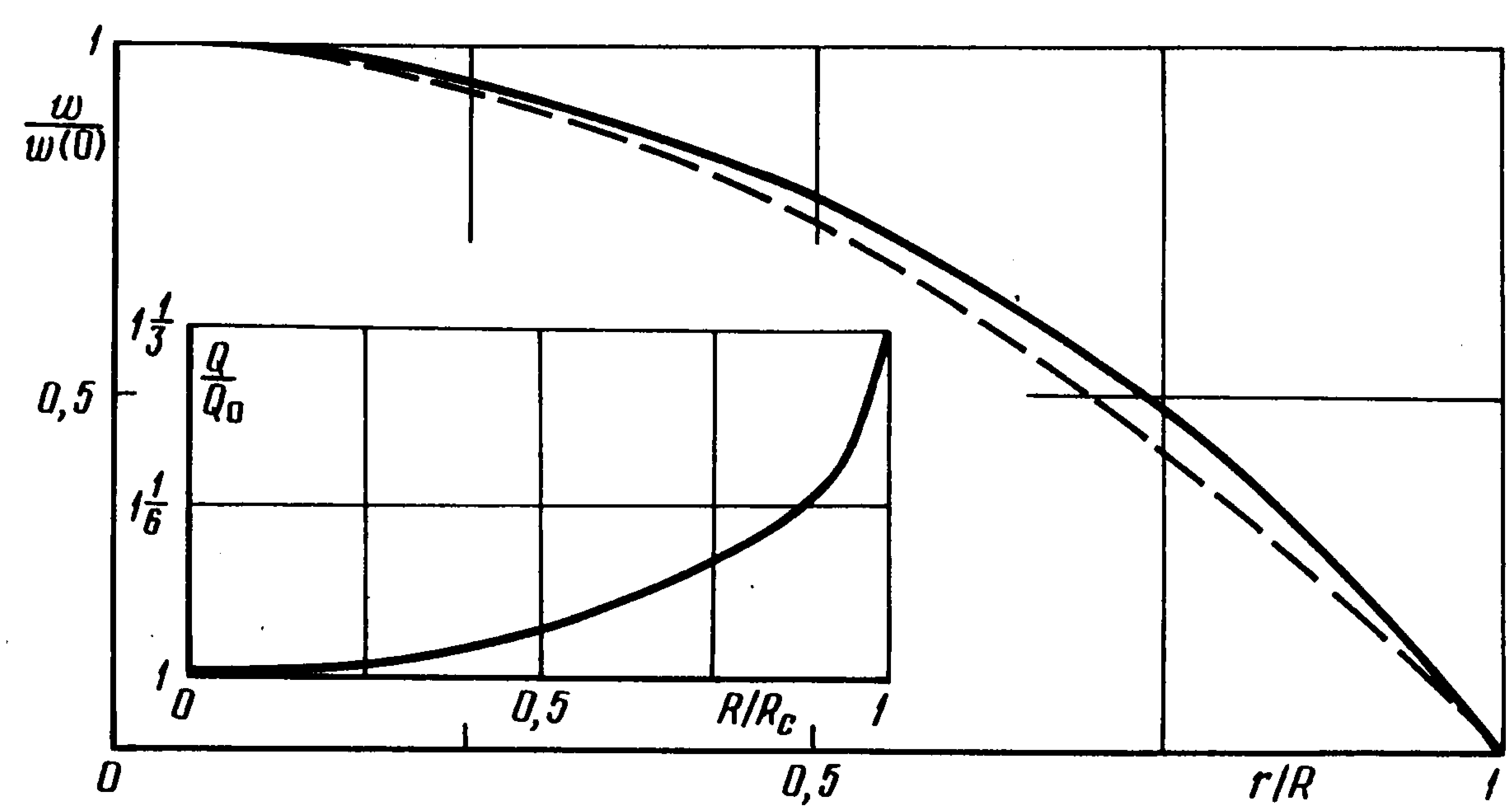
$$q = \frac{1}{\sqrt{c\lambda^2}}\frac{R_c}{r}[F(r)-1], \quad R_c = \left(-\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz}\sqrt{c\lambda^2}\right)^{-1}, \quad F(r) = \sqrt{1-\left(\frac{r}{R_c}\right)^2} \tag{2.7}$$

Видно, что решение существует только для труб сравнительно малого радиуса R ($R \leqslant R_c$) в соответствии с условием (2.6). Интересно отметить, что вязкоупругое течение Пуазейля в круглой трубе критического радиуса $R = R_c$ соответствует течению фиктивного газа, скорость которого на стенках трубы оказывается звуковой, $q = -(c\lambda^2)^{-1/2}$. Несуществование решения в рассматриваемой задаче в терминах фиктивного газа напоминает известный в газовой динамике эффект запирания трубы.

Продольная скорость течения вязкоупругой максвелловской жидкости непосредственно находится из (2.7)

$$w(r) = \frac{R_c}{\sqrt{c\lambda^2}}\left[F(r) - F(R) - \ln\frac{1+F(r)}{1+F(R)}\right]$$

График зависимости $w = w(r)$ при $R/R_c = 0{,}25$ (сплошная линия) и $R/R_c = 1$ (штриховая линия) приведен на фигуре.



Расход жидкости через сечение трубы дается выражением

$$Q = \int_0^R w 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{6}\frac{R_c^3}{\sqrt{c\lambda^2}}[1-F(R)]^2[1+2F(R)]$$

Представлена также зависимость отношения Q/Q_0 от безразмерного радиуса трубы R/R_c

$$Q/Q_0 = {}^4/_3[1+2F(R)]/[1+F(R)]^2$$

где Q_0 – расход в случае ньютоновской жидкости. Видно, что расход максвелловской жидкости всегда выше, чем ньютоновской. При $R = R_c$ отношение Q/Q_0 не зависит от параметров модели и равно $^4/_3$.

Заметим, что при $c<0$ решение задачи Пуазейля существует всегда и имеет вид

$$w(r)=\frac{R_c}{\sqrt{-c\lambda^2}}\ln\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\ln\left[\frac{G(R)+1}{G(R)-1}\,\frac{G(r)-1}{G(r)+1}\right],\quad G(r)=\sqrt{1+\left(\frac{r}{R_c}\right)}$$

Таким образом, существование и несуществование решения задачи Пуазейля решающим образом зависит от знака параметра c, подобно зависимости от знака параметра A в задаче Куэтта. Отметим также, что сходные результаты могут быть получены и для течения Пуазейля в плоской трубе. В частности, необходимое условие существования решения вновь имеет вид (2.6) с числом Деборы, определенным соотношением

$$\mathrm{De}=H\lambda(-\eta^{-1}dp/dz)$$

(H – ширина канала). Оказывается, что расход Q в этом случае также превышает классическое значение Q для ньютоновской жидкости. Для канала критической ширины $H=R_c$ отношение Q/Q_0 также оказывается универсальные и равно $6(1-\pi/4)=$ $=1{,}288$.

В заключение отметим, что вопросы существования решений уравнений вязкоупругой жидкости для различных течений интенсивно исследуются в последнее время (см., например, [2–5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O., Curtiss C. F.* Dynamics of Polymeric Liquids. Vols. 1, 2. Wiley. 1977. V. 1. 470 p.; V. 2. 256 p.; (471–727 p.).
2. *Renardy M.* Mathematical analysis of viscoelastic flows. // Annu. Rev. Fluid Mech. Palo Alto. Calif., 1989. V. 21. P. 21–36.
3. *Joseph D. D., Saut J. C.* Short-wave instabilities and ill-posed initial-value problems. // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1990. V. 1. P. 191–227.
4. *El-Kareh A. W., Leal L. G.* Existence of solutions for all Deborah numbers for a non-Newtonian model modified to include diffusion. // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1989. V. 33. № 3. P. 257–287.
5. *Brutyan M. A., Krapivsky P. L.* Collapse of spherical bubbles in viscoelastic liquids. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991. V. 44. № 4. P. 573–581.

Жуковский

Поступила в редакцию
23.VII.1991