ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочина Н. Н.* Об изменении уровня грунтовых вод при поливах // ПМТФ. 1971. № 4. С. 87–94.
2. *Кочина Н. Н.* О некоторых нелинейных задачах уравнения теплопроводности // ПМТФ. 1972. № 3. С. 123–128.
3. *Кочина Н. Н.* О регулировании уровня грунтовых вод при орошении // ПМТФ. 1973. № 5. С. 125–133.
4. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
5. *Кошляков Н. С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1936. 505 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1972. 735 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.II.1991

УДК 532.59:534.1

© 1992 г. **Н. Г. Кузнецов**

ОЦЕНКА СНИЗУ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Предлагается методика оценки снизу для собственных частот плоских свободных колебаний идеальной жидкости в канале постоянного поперечного сечения. Она основана на тождестве [1], применявшемся для доказательства теоремы единственности в задаче об излучении и рассеянии волн полностью погруженным в жидкость телом. В отличие от оценок, полученных ранее [2, 3] [1], здесь не используется явное задание дна канала. Показано, что в ряде случаев оценка может быть существенно улучшена, если применить ее в комбинации с принципом монотонности [4, 5]. Разработанная методика применима и для трехмерной задачи. Рассматриваются примеры, результаты сравниваются с известными точными и приближенными значениями [5, 6], а также с оценками других авторов [7] [1]. Нижняя оценка иного типа была получена в [8]. С библиографией по проблеме собственных частот колебаний идеальной жидкости можно ознакомиться по [5, 9].

1. Постановка задачи. Пусть в положении равновесия идеальная несжимаемая тяжелая жидкость заполняет канал с поперечным сечением W. Односвязная область $W\subset R_-^2=\{(x, y): y<0\}$ имеет кусочно-гладкую границу без точек возврата, причем $\partial W=F\cup B$, $F\cap B=\varnothing$. Здесь $F=\{x\in(-a, +a);\ y=0\}$ – свободная поверхность жидкости ($a>0$), B – дно канала; оно представляет собой кривую, которая за исключением ее концов $(\pm a, 0)$, являющихся угловыми точками ∂W, лежит в R_-^2.

Для описания плоских свободных гармонических по времени колебаний жидкости в канале используется смешанная задача Стеклова [4–6, 9]

$$\nabla^2 u=0 \text{ в } W,\quad u_y=\nu u \text{ на } F,\quad \partial u/\partial n=0 \text{ на } B\cap R_-^2 \qquad (1.1)$$

Это спектральная задача, в которой требуется найти собственные значения параметра ν и соответствующие вещественные собственные функции из пространства Соболева $H^1(W)$, удовлетворяющие условию $\int_F u\,dx=0$. Здесь $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к ∂W; величина νg (g – ускорение свободного падения) равна квадрату частоты

---

[1] См. также: *Федоров А. Л.* Геометрические оценки функционалов типа емкости и собственных чисел для областей сложной формы // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1973. 14 с.

свободных колебаний, а u – потенциал скоростей колебаний с точностью до гармонического по времени множителя.

Известно [4, 5], что задача (1.1) имеет дискретный спектр $0<\nu_1<\nu_2\leqslant\nu_3\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant\nu_n\leqslant\ldots$.

2. Вспомогательное тождество. Непосредственно проверяется тождество [1]

$$
\begin{gathered}
2\nabla\cdot[(\mathbf{V}\cdot\nabla u+Hu)\nabla u]=2(\mathbf{V}\cdot\nabla u+Hu)\nabla^2u-\\
-(Q\nabla u)\cdot\nabla u+\nabla\cdot(|\nabla u|^2\mathbf{V}+u^2\nabla H)-u^2\nabla^2H
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь $\mathbf{V}=(V_1,\ V_2)$ – векторное поле на $\overline{W}$, компоненты которого вещественны и равномерно удовлетворяют условию Липшица на $\overline{W}$; H – вещественная функция на $\overline{W}$ с первыми производными равномерно удовлетворяющими условию Липшица; матрица Q имеет элементы $Q_{ij}=(\nabla\cdot\mathbf{V}-2H)\delta_{ij}-(\partial V_i/\partial x_j+\partial V_j/\partial x_i)$, δ_{ij} – символ Кронекера, $x_1=x$, $x_2=y$.

Пусть u – собственная функция задачи (1.1), отвечающая наименьшему собственному числу ν_1. Проинтегрируем тождество (2.1) по области W и воспользуемся уравнением Лапласа и теоремой Гаусса – Остроградского. В результате получим

$$
\begin{gathered}
\int\limits_W[(Q\nabla u)\cdot\nabla u+u^2\nabla^2H]\,dx\,dy=\\
=\int\limits_{\partial W}[2(\mathbf{V}\cdot\nabla u+Hu)\partial u/\partial n-\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}|\nabla u|^2-u^2\partial H/\partial n]\,ds
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Рассмотрим последний интеграл на подмножестве $F\subset\partial W$. Если принять во внимание краевое условие на F в (1.1), то он равен

$$
\int\limits_F[V_2u_x^2-(\nu_1^2V_2+2\nu_1H-H_y)u^2]\,dx-2\nu_1\int\limits_F V_1u_xu\,dx
$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле, подставляя результат в равенство (2.2) и учитывая краевое условие на B в (1.1), приходим к тождеству

$$
\begin{gathered}
\int\limits_W[(Q\nabla u)\cdot\nabla u+u^2\nabla^2H]\,dx\,dy+\\
+\int\limits_B(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}|\nabla u|^2+u^2\partial H/\partial n)\,ds+\\
+\int\limits_F[\nu_1^2V_2+\nu_1(2H-\partial V_1/\partial x)-H_y]u^2\,dx-\\
-\int\limits_F V_2u_x^2\,dx=-\nu_1[V_1(x,0)u^2(x,0)]_{x=-a}^{x=+0}
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

3. Вывод оценки. Положим $H=-{}^1/_2$ в (2.3), и потребуем, чтобы поле $\mathbf{V}$ удовлетворяло условию

$$
V_1=-x,\quad V_2=0\ \text{на}\ F
\tag{3.1}
$$

Тогда тождество (2.3) примет вид

$$
\int\limits_W(Q\nabla u)\cdot\nabla u\,dx\,dy+\int\limits_B|\nabla u|^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,ds=\nu_1a\sum_{\pm}u^2(\pm a,0)
$$

Далее, пусть матрица Q неотрицательна в области W и

$$
\inf\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}:\ (x,\ y)\in B\}=m>0
\tag{3.2}
$$

При этом из последнего равенства следует, что

$$m\int\limits_B (\partial u/\partial s)^2\,ds\leqslant\nu_1 a\sum_{\pm} u^2(\pm a,0) \tag{3.3}$$

Здесь учтено также краевое условие на B в (1.1).

Было показано [10], что функция u имеет ровно одну узловую линию, концы которой лежат на свободной поверхности F и на дне B. Последний конец разбивает дно на две части B_+ и B_-, причем точка $(\pm a,\ 0)$ служит вторым концом кривой $B_\pm$. Согласно формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$|u(\pm a,0)|=\left|\int\limits_{B_\pm}(\partial u/\partial s)\,ds\right|$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши – Буняковского, получаем

$$u^2(\pm a,0)\leqslant|B_\pm|\int\limits_{B_\pm}(\partial u/\partial s)^2\,ds \tag{3.4}$$

а значит,

$$\sum_{\pm}u^2(\pm a,0)\leqslant|B|\int\limits_B(\partial u/\partial s)^2\,ds$$

Здесь $|B|$ – длина кривой B (аналогично $|B_\pm|$).

Объединяя последнее неравенство с (3.3), приходим к следующему результату.

Теорема. Пусть векторное поле $\mathbf{V}$ таково, что матрица Q при $H=-{}^1/_2$ неотрицательна в области W и выполнены условия (3.1) и (3.2). Тогда справедливо неравенство

$$m|B|^{-1}\leqslant\nu_1 a \tag{3.5}$$

Следствие. Для областей, симметричных относительно оси ординат, оценка (3.5) может быть заменена на

$$2m|B|^{-1}\leqslant\nu_1 a \tag{3.6}$$

Доказательство. Ввиду симметрии лежащий на дне конце узловой линии функции u разбивает B пополам, т. е. $|B_+|=|B_-|=|B|/2$ в (3.4). Тогда из (3.3) и (3.4) вытекает (3.6).

Замечания. 1°. Следствие подсказывает, что в некоторых случаях для оценки снизу первого собственного значения ν_1 в несимметричной области W вместо использования неравенства (3.5) может быть выгоднее поступить следующим образом. Построим вспомогательную симметричную область W' так, чтобы $W'\subset W$, а свободные поверхности этих двух областей совпадали. Далее, при помощи неравенства (3.6) оценим снизу первое собственное значение ν_1' в области W'. Так как $\nu_1'\leqslant\nu_1$ в силу принципа монотонности (см., например, [4, 5]), то полученная оценка будет годна и для значения ν_1. При этом она может оказаться лучше оценки, которую дает непосредственное использование неравенства (3.5) (см. пример 4 разд. 4).

2°. Предложенный здесь метод оценки снизу для собственных значений применим и в трехмерном случае. Соответствующие векторные поля можно получить вращением плоских полей вокруг оси ординат (см. [1]).

4. Примеры. Положим

$$\mathbf{V}=(-x,\ -ky),\quad 0\leqslant k\leqslant 2 \tag{4.1}$$

Тогда при $H=-{}^1/_2$ матрица

$$Q=\begin{Vmatrix}2-k & 0\\ 0 & k\end{Vmatrix}$$

неотрицательна. Условие (3.1) также выполнено. Рассмотрим несколько конкретных областей, удовлетворяющих неравенству (3.2) с полем (4.1) при каком-либо $k\in[0,2]$.

Оценки, получающиеся для этих областей по формулам (3.5) и (3.6), сравним с известными точными результатами и оценками других авторов. Для сравнения будем пользоваться безразмерной величиной $\nu_1 a$.

Пример 1. Для прямоугольной области W ширины $2a$ и глубины d возьмем $k=2$ в формуле (4.1). Тогда

$$\min\{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\colon (x, y)\in \bar{B}\}=\min\{a, 2d\}$$

и по неравенству (3.6) получаем, что

$$\nu_1 a \geqslant \min\{a, 2d\}/(a+d) \tag{4.2}$$

Методом разделения переменных найдем [6], что для прямоугольника

$$\nu_1 a = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi d}{2a} \tag{4.3}$$

Таким образом, оценка (4.2) неплохо работает при малых значениях d. При больших значениях d формула (4.2) дает весьма заниженную оценку величины $\nu_1 a$. В таблице приведены численные результаты для некоторых конкретных значений

Вид сечения канала	Точное значение	Оценка, полученная автором	Оценка, полученная в [7] [1]
Прямоугольник $d/a={}^1/_4$	0,58	$^2/_5$	—
То же $d/a={}^1/_2$	1,04	$^2/_3$	0,09
То же $d/a=1$	1,44	$^1/_2$	—
То же $d/a=2$	1,57	$^1/_3$	0,14
Полукруг	1,36 [5]	$2/\pi$	0,08
Прямоугольный равнобедренный треугольник, $\alpha=\pi/4$	1 [6]	$^1/_2$	0,59
Равнобедренный треугольник, $\alpha=\pi/6$	—	$^3/_6$	0,33

[1] Последние два значения взяты из упомянутого выше автореферата диссертации А. Л. Федорова.

отношения d/a, позволяющие сравнить оценку (4.2) с точным значением (4.3) и оценкой, которая получена в [7].

Пример 2. Для области W, представляющей собой полукруг радиуса a, возьмем $k=1$ в (4.1). Тогда $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=a$ на B, и по неравенству (3.6) находим, что $\nu_1 a\geqslant 2/\pi$ (ср. с точным значением в таблице).

Пример 3. Пусть область W – равнобедренный треугольник, основание которого длины $2a$ служит свободной поверхностью; угол при основании обозначим α. Если $k=1$ в (4.1), то получаем, что $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=a\sin\alpha$ на B. Тогда неравенство (3.6) принимает вид

$$\nu_1 a\geqslant {}^1/_2\sin 2\alpha \tag{4.4}$$

(ср. с точным значением для $\alpha=\pi/4$ в таблице).

Для равнобедренных треугольников была получена оценка (см. упомянутый выше автореферат диссертации А. Л. Федорова)

$$\nu_1 a\geqslant\frac{\pi}{2}\,\frac{(1+4\,\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}-1}{(1+4\,\mathrm{tg}^2\alpha)^{1/2}+1}$$

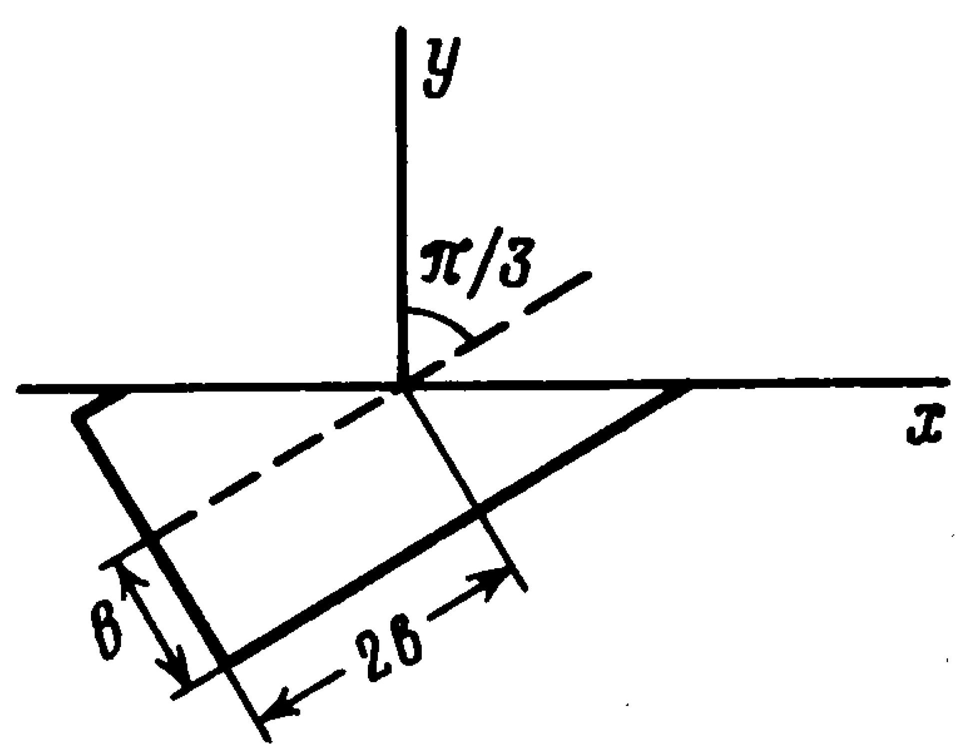
которая хуже, чем (4.4), при малых значениях α и лучше – при α, близких к $\pi/2$ (см. таблицу).

Пример 4. Пусть область W – прямоугольный равнобедренный треугольник, катет которого служит свободной поверхностью. Если $k=1$ в (4.1), то $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=a$ на вертикальной части дна и $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=a/\sqrt{2}$ на наклонной части дна. Тогда неравенство (3.5) принимает вид

$$\nu_1 a\geqslant(4+2\sqrt{2})^{-1} \tag{4.5}$$

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник W', для которого та же свободная поверхность является основанием. Согласно неравенству (4.4) и замечанию 1°, имеем $\nu_1 a \geqslant \nu_1' a \geqslant {}^1/_2$. Последняя оценка существенно лучше, чем (4.5).

Пример 5. Те же соображения позволяют элементарными средствами получать неплохие оценки для достаточно сложных областей. Рассмотрим область W, изображенную на фигуре. Впишем в нее равнобедренный треугольник с углом при осно-



вании, равным $\pi/6$, для которого воспользуемся неравенством (4.4). По принципу монотонности для области W справедлива оценка $\nu_1 a \geqslant \sqrt{3}/4$. Вычисленное [5] значение $\nu_1 a$ для приведенной на фигуре области равно 0,86.

Сравнивая первые два столбца таблицы, видим, что полученные здесь величины, оценивающие снизу $\nu_1 a$, колеблются в промежутке 21–69% от точного значения. В среднем значение во втором столбце составляет 43% от значения в первом столбце.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В. Г.* К стационарной задаче о малых колебаниях жидкости в присутствии погруженного тела // Дифференц. ур-ния с частными производными. Тр. семинара С. Л. Соболева. 1977. Вып. 2. С. 57–79.
2. *Kuttler J. R., Sigillito V. G.* Lower bounds for sloshing frequencies // Quart. Appl. Math. 1969. V. 27. № 3. P. 405–408.
3. *Федоров А. Л.* Двусторонние оценки основной частоты собственных колебаний жидкости в бесконечном канале // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. 1973. Вып. 80. С. 105–108.
4. *Moisseev N. N.* Introduction to the theory of oscillations of liquid-containing bodies // Advances in Applied Mechanics. N. Y.; L.: Acad. Press, 1964. V. 8. P. 233–289.
5. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук. думка, 1984. 228 с.
6. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. *Тараканов В. И.* Оценки снизу собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в каналах произвольного сечения // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 165–170.
8. *Кузнецов Н. Г.* О вариационном методе определения собственных частот колебаний жидкости в канале // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 553–561.
9. *Fox D. W., Kuttler J. R.* Sloshing frequencies // Z. angew. Math. Phys. 1983. V. 34. № 5. P. 668–696.
10. *Kuttler J. R.* A nodal line theorem for the sloshing problem // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 6. P. 1234–1237.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.IV.1991