

время как при жестком креплении подшипников качения в корпусе виброперегрузки на критических числах оборотов достигали 120 g, что недопустимо.

Во всем диапазоне частот компрессор можно рассматривать как абсолютно твердое тело. Для этого достаточно выбрать податливость упругих опор в 5...10 раз больше, чем податливость двухопорного ротора в его центре масс, рассматриваемого как балка, свободно лежащая на двух жестких опорах.

Вводить искусственные демпферы нет необходимости, так как они не улучшают динамику ротора, а уменьшают КПД. Снижение амплитуд и виброперегрузок при переходе через критические частоты достигается снижением жесткости при установке компрессора в упругие опоры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.
3. *Николаи Е. Л.* Теоретическая механика. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 484 с.
4. *Кельзон А. С., Меллер А. С.* Динамика статически неуравновешенного ротора в подшипниковых опорах. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 1. С. 69–72.
5. *Кельзон А. С.* Самоцентрирование и уравнивание жесткого ротора, вращающегося в двух упругих опорах. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 1. С. 31–33.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
12.I.1991

УДК 532.5

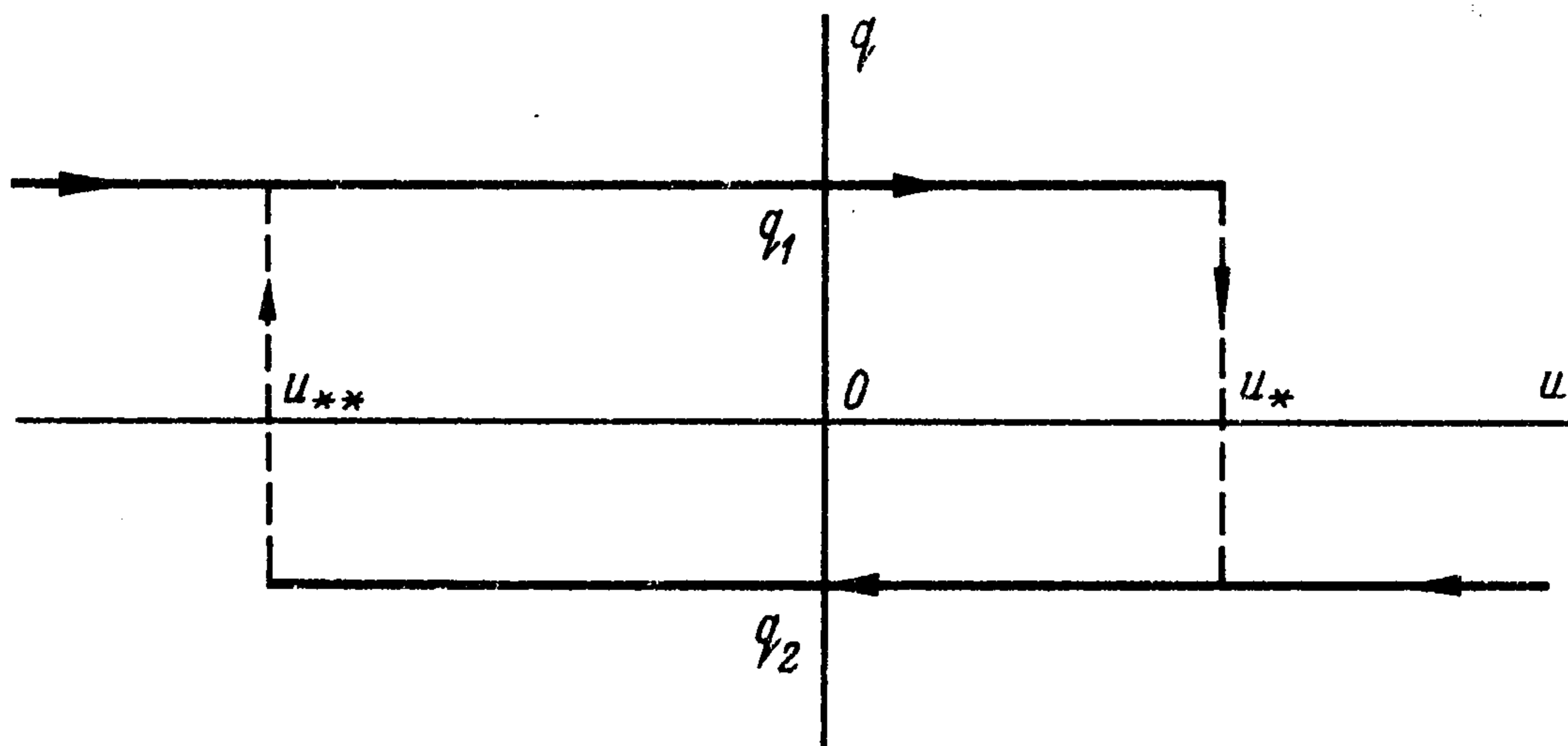
© 1992 г. Н. Н. Кочина

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Найдено решение линеаризованной начально-краевой задачи о неустановившемся движении вязкой жидкости в цилиндрической трубе кругового поперечного сечения с горизонтальной осью в предположении, что на одном конце трубы давление постоянно, а на другом установлен агрегат, изменяющий расход жидкости. Показано, что в зависимости от соотношений между определяющими параметрами задачи это решение асимптотически стремится либо к периодическому решению, либо к одному из двух устойчивых стационарных решений. Эти результаты получены методами, аналогичными развитым в работах автора [1–3], где рассмотрены неустановившиеся движения грунтовых вод при поливах при учете испарения в областях между каналами. Предполагалось, что производимый с постоянной интенсивностью полив включается или выключается в зависимости от уровня грунтовых вод в наблюдательной скважине.

Уравнения неустановившегося движения вязкой жидкости в трубах при учете гидравлических сопротивлений были выведены в [4] как для ламинарных, так и для турбулентных течений. В предположении, что на одном конце трубопровода давление – известная функция времени, а на другом установлен агрегат, изменяющий расход жидкости по заданному закону в зависимости от времени (поршневой насос, задвижка, турбина, компрессор), причем этот агрегат присоединен к трубопроводу или непосредственно или отделен от него камерой, служащей для регулирования расхода или уменьшения колебаний давления (воздушный колпак, уравнительная башня, ресивер), И. А. Чарным, а также Г. Д. Розенбергом и И. Н. Буяновским было решено большое число конкретных задач. При этом либо предполагалось, что при $t \leq 0$ движение отсутствовало или было стационарным, либо рассматривались периодические движения.

1. Рассмотрим неустановившееся движение вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ в трубе конечной длины l круглого поперечного сечения с горизонтальной осью. На одном конце трубы ($x=0$) давление постоянно (в частности, равно атмосферному), а к другому концу ($x=l$) присоединен вышеупомянутый агрегат, причем в начальный момент времени заданы значения скорости u и давления p в трубе. Предположим, что если имеется камера, то расход q жидкости, вытекающей



Фиг. 1

из агрегата, — функция релейного вида от скорости u , имеющая участок неоднозначности $u.. < u < u.$ (Фиг. 1):

$$q(u) = \begin{cases} q_1 & (u < u_*) \\ q_2 & (u > u_{**}) \end{cases} \quad (1.1)$$

$(q_1 > q_2)$

причем при $u=u.$ и $u=u..$ происходят скачки с одной ветви этой функции на другую, как показано на Фиг. 1; если же камеры нет, то расход q (совпадающий в этом случае со скоростью u при $x=l$) есть функция времени t :

$$q(t) = \begin{cases} q_1 (n\bar{T} < t < \bar{T}_1 + n\bar{T}) \\ q_2 (\bar{T}_1 + n\bar{T} < t < (n+1)\bar{T}) \end{cases} \quad (1.2)$$

$(n=0, 1, 2, \dots)$

(в дальнейшем в некоторых случаях зависимость (1.2) будет принята и при наличии камеры).

Условимся считать для определенности, что если в начальный момент времени $t=0$ имеем $u.. < u < u.$, то $q=q_1$.

Скорость u жидкости будем считать много меньшей скорости c звука в трубе, что естественно для капельной жидкости.

Изучение движения сводится к нахождению в области ($0 < x < l, t > 0$) решения начально — краевой задачи для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, приведенной в [4].

Исключая из этой системы давление p и переходя к безразмерным переменным

$$z=x/l, \quad \tau=ct/l, \quad U=u/c \quad (1.3)$$

сводим задачу к решению в области ($0 < z < 1, \tau > 0$) одного нелинейного уравнения второго порядка с частными производными

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - A \left(U \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) - \sigma(U) \frac{\partial U}{\partial \tau} \quad (1.4)$$

описывающего одномерное движение.

Начальные и граничные условия имеют соответственно вид

$$U(z, 0) = U_0(z), \quad \partial U(z, 0)/\partial \tau = V_0(z) \quad (1.5)$$

$$\partial U(0, \tau)/\partial z = 0, \quad b\partial U(1, \tau)/\partial z + U(1, \tau) = c^{-1}q[U(1, \tau), \tau] \quad (1.6)$$

Функция $q(U, \tau)$ задается формулами (1.1) или (1.2), $b > 0$ – безразмерный параметр, характеризующий тип камеры; если камера отсутствует, $b = 0$.

Для трубы кругового поперечного сечения и турбулентного движения $A = 2$, $\sigma(U) = \zeta U$, а для ламинарного $A = 8/3$, $\sigma(U) = 2\nu$; ζ и $\nu > 0$ – безразмерные параметры, зависящие от режима течения и свойств трубы [4]; функции $U_0(z)$ и $V_0(z)$ предполагаются удовлетворяющими условиям Дирихле.

Полагая в силу предполагаемой изэнтропичности течения $U = \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2$, где $\varepsilon > 0$ – безразмерный малый параметр (можно принять, например, $\varepsilon = (q_1 + q_2)/(2c)$ или $\varepsilon = q_1/c$) и ограничиваясь первым приближением, получим из (1.4) для функции U_1 линейные уравнения

$$\partial^2 U_1 / \partial \tau^2 = \partial^2 U_1 / \partial z^2 \quad (1.7)$$

$$\partial^2 U_1 / \partial \tau^2 + 2\nu \partial U_1 / \partial \tau = \partial^2 U_1 / \partial z^2 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.7) справедливо для турбулентного, (1.8) – ламинарного течений.

При выполнении неравенства $\nu \geq \pi/2$ И. А. Чарный [4] считал, что вместо телеграфного уравнения (1.8) можно применить уравнение теплопроводности

$$2\nu \partial U_1 / \partial \tau = \partial^2 U_1 / \partial z^2 \quad (1.9)$$

Как обычно, потребуем, чтобы функция U_1 удовлетворяла условиям (1.6)

$$\partial U_1(0, \tau)/\partial z = 0, \quad b\partial U_1(1, \tau)/\partial z + U_1(1, \tau) = Q[U_1(1, \tau), \tau] \quad (1.10)$$

$$(Q = q/(\varepsilon c))$$

Будем считать, что уравнения (1.7)–(1.9) нужно решать с граничными условиями (1.10) и начальными условиями (1.5), где U заменено на U_1 (второе из условий (1.5) для уравнения (1.9) отсутствует).

Таким образом, для функции U_1 (первого приближения) сформулированы три начально-краевые задачи (решением которых ограничимся в последующем).

В дальнейшем будем каждую задачу о решении уравнений (1.7), (1.8) и (1.9) в области $(0 < z < 1, \tau > 0)$ с условиями (1.5) и (1.10) называть соответственно первой, второй и третьей задачей, а с условиями (1.10) – задачей без начальных условий.

Отметим, что после решения каждой из трех задач, определяющих первое приближение U_1 , второе приближение U_2 можно найти как решение некоторой линейной задачи с нулевыми начальными и граничными условиями; затем давление будет получено квадратурой.

Опуская для простоты индекс I в формулах (1.7)–(1.10), выпишем обобщенное решение второй задачи (решение первой задачи получим, полагая в последнем $\nu = 0$).

Используя метод Фурье, решая регулярную задачу Штурма – Лиувилля и полагая

$$U(z, \tau) = \begin{cases} u_1^{(i+1)}(z, \tau) & (S_i \leq \tau \leq S_{i,i+1}) \\ u_2^{(i+1)}(z, \tau) & (S_{i,i+1} \leq \tau \leq S_{i+1}) \end{cases} \quad (1.11)$$

$$S_i = \sum_{j=0}^i T^{(j)}, \quad S_{i,i+1} = S_i + T_i^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, T^{(0)} = 0$$

найдем

$$u_i^{(i+1)} = Q_i + \exp[-\nu(\tau - S_i)] \times \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k}^{(i+1)} \cos \omega_k(\tau - S_i) + C_{2k}^{(i+1)} \sin \omega_k(\tau - S_i)] \cos \mu_k z \\ & u_2^{(i+1)} = Q_2 + \exp[-v(\tau - S_{i,i+1})] \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} [D_{1k}^{(i+1)} \cos \omega_k(\tau - S_{i,i+1}) + D_{2k}^{(i+1)} \sin \omega_k(\tau - S_{i,i+1})] \cos \mu_k z \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь μ_k ($k=1, 2, \dots$) – корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu = b\mu \quad (1.14)$$

$\omega_k = \sqrt{\mu_k^2 - v^2}$ (если $\mu_k > v$; если $\mu_k < v$, то в (1.12) и (1.13) $\cos \omega_k x$ и $\sin \omega_k x$ нужно заменить на $\operatorname{ch} \sigma_k x$ и $\operatorname{sh} \sigma_k x$ соответственно, где $\sigma_k = \sqrt{v^2 - \mu_k^2}$).

В формулах (1.11)–(1.13) примем для определенности, что $Q_i = Q_1$ при $\tau = 0$ (ясно, что это ограничение несущественно).

Коэффициенты $C_{1k}^{(1)}$ и $C_{2k}^{(1)}$ находятся из начальных условий (1.5), остальные постоянные $-D_{jk}^{(i+1)}$ ($i=0, 1, 2, \dots$), $C_{jk}^{(i+1)}$ ($i=1, 2, \dots$), $j=1, 2$ определяются последовательно из условий склейки функций и их производных по τ в некоторые моменты времени, а именно

$$\begin{aligned} u_2^{(i+1)}(z, S_{i,i+1}) &= u_1^{(i+1)}(z, S_{i,i+1}); \quad \frac{\partial u_2^{(i+1)}(z, S_{i,i+1})}{\partial \tau} = \frac{\partial u_1^{(i+1)}(z, S_{i,i+1})}{\partial \tau} \\ u_1^{(i+2)}(z, S_{i+1}) &= u_2^{(i+1)}(z, S_{i+1}); \quad \frac{\partial u_1^{(i+2)}(z, S_{i+1})}{\partial \tau} = \frac{\partial u_2^{(i+1)}(z, S_{i+1})}{\partial \tau} \end{aligned}$$

При $b=0$ в силу (1.2) в формулах (1.11)

$$T^{(j)} = T, \quad T_1^{(i)} = T_1 \quad (i, j=1, 2, \dots), \quad T = c\bar{T}/l, \quad T_1 = c\bar{T}_1/l$$

Если $b > 0$, постоянные $T_1^{(i+1)}$ и $T_2^{(i+1)} = T^{(i+1)} - T_1^{(i+1)}$ находятся последовательно из условий (фиг. 1, 2)

$$u_1^{(i+1)}(1, S_{i,i+1}) = U_., \quad u_2^{(i+1)}(1, S_{i+1}) = U_{..} \quad (U_ = u_./\epsilon c, \quad U_{..} = u_{..}/\epsilon c)$$

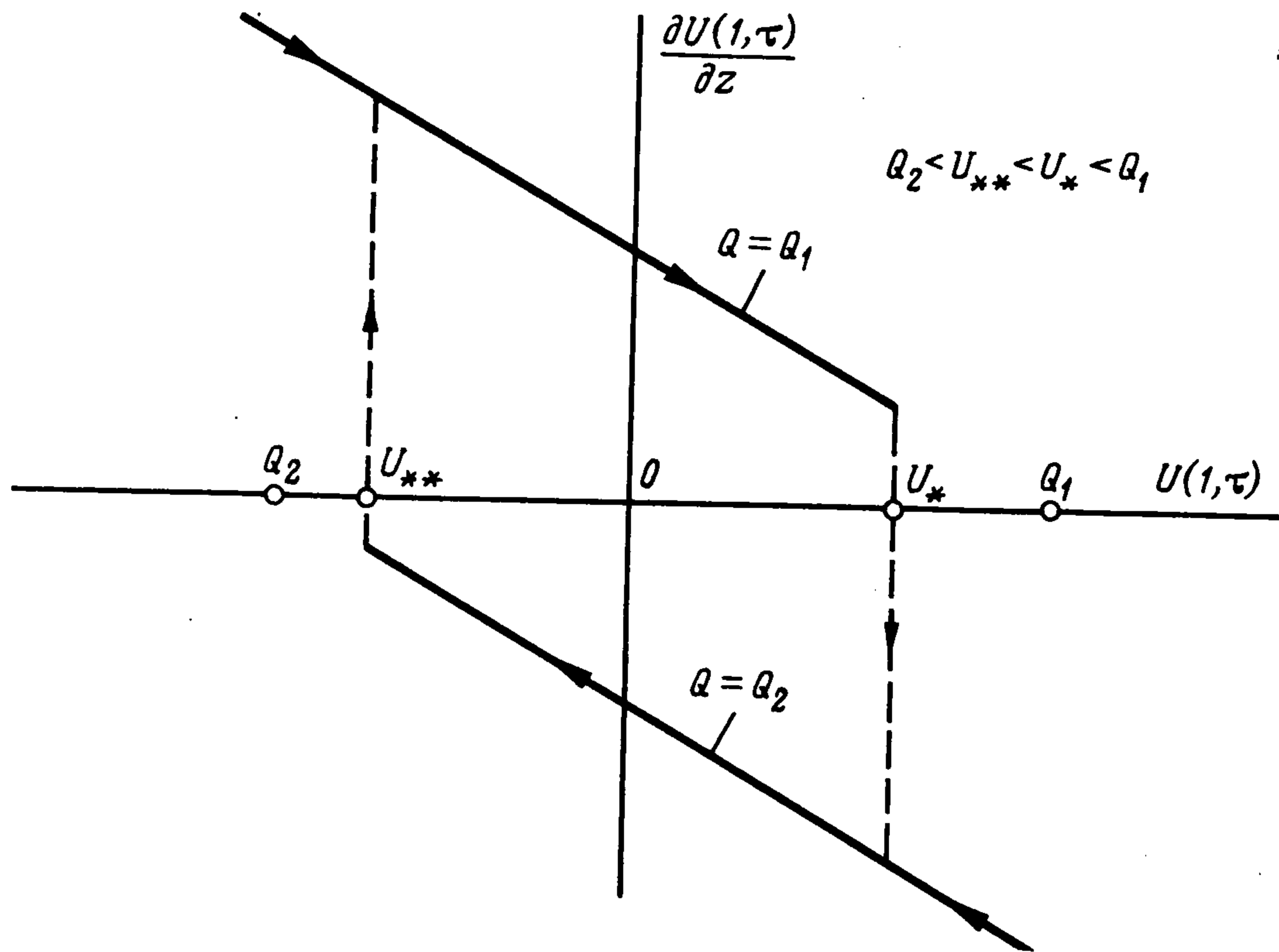
как наименьшие корни этих уравнений.

Из приведенных условий видно, что возможны случаи, когда за конечный промежуток времени значение $U_.$ или $U_{..}$ не будет достигнуто (или за бесконечно большой промежуток времени эти значения будут достигнуты только конечное число раз).

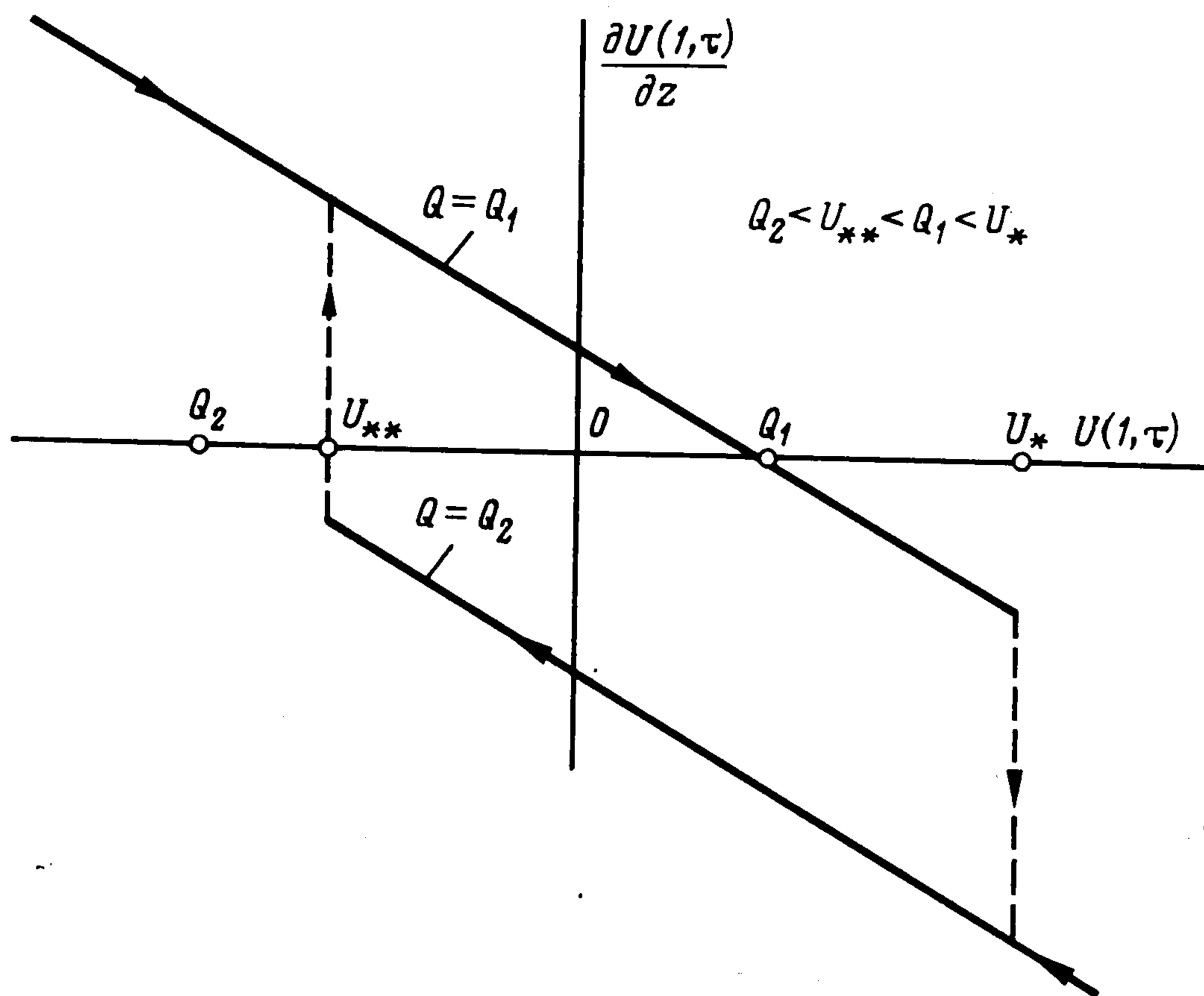
2. Пользуясь соотношениями (1.12)–(1.14) и аналогичным решением третьей задачи (которое здесь не выписываем), можно видеть, что все три задачи без начальных условий имеют устойчивые в смысле Ляпунова (а вторая и третья – также и асимптотически устойчивые) стационарные решения

$$U(z, \tau) = Q_1, \quad U(z, \tau) = Q_2 \quad (2.1)$$

Из соотношений (1.12)–(1.14) и из фиг. 2 убеждаемся в том, что при $b=0$, а также при $b > 0$ и удовлетворении условия (1.2), решение каждой из трех задач асимптотически стремится к некоторому предельному решению. Для второй и третьей задач это предельное решение – периодическое, а для первой – сумма решения (1.12), где положено $i=Q_1=v=0$, и периодического, которое мы сейчас выпишем, считая его период равным T , используя два его представления: 1) аналогичное (1.12)–(1.14), где положено $v=0$; 2) полученное непосредственно в виде ряда Фурье при помощи



Фиг. 2



Фиг. 3

(1.7), (1.10) и (1.2), где $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; эти же результаты верны для второй и третьей задач при выполнении неравенства $b > 0$, если имеет место условие (1.1), причем

$$Q_2 < U_{**} < U_* < Q_1 \quad (2.2)$$

Первое из этих представлений имеет вид:

$$u_1(z, \tau) = Q_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} \cos \mu_k \tau + C_{2k} \sin \mu_k \tau) \cos \mu_k z \quad (0 \leq \tau \leq T_1) \quad (2.3)$$

$$u_2(z, \tau) = Q_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [D_{1k} \cos \mu_k(\tau - T_1) + D_{2k} \sin \mu_k(\tau - T_1)] \cos \mu_k z$$

$$(T_1 \leq \tau \leq T)$$

$$C_{1k} = -a_k g_k \cos^{(1/2)} \mu_k T_1, \quad C_{2k} = -a_k g_k \sin^{(1/2)} \mu_k T_1$$

$$D_{1k} = a_k + C_{1k}, \quad D_{2k} = -C_{2k}$$

$$g_k = \frac{\sin^{(1/2)} \mu_k (T - T_1)}{\sin^{(1/2)} \mu_k T}, \quad a_k = \frac{2(Q_1 - Q_2) \sin \mu_k}{\mu_k [1 + \sin 2\mu_k / (2\mu_k)]}$$

Второе дается зависимостью

$$U(z, \tau) = \bar{U}(z, \tau) = \frac{Q_1 T_1 + Q_2 (T - T_1)}{T} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c_n \cos \alpha_n \tau + d_n \sin \alpha_n \tau)}{(\cos \alpha_n - b \alpha_n \sin \alpha_n)} \cos \alpha_n z, \quad \alpha_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (2.4)$$

$$c_n = \frac{(Q_1 - Q_2)}{\pi} \frac{(1 - \cos \alpha_n T_1)}{n}, \quad d_n = \frac{(Q_1 - Q_2)}{\pi} \frac{\sin \alpha_n T_1}{n}$$

(При этом считаем, что $b \geq 0$ и использовано граничное условие (1.2).)

В случае резонанса формулы (2.3) и (2.4) должны быть видоизменены.

Пусть при $n=s$ выполнено равенство $\operatorname{ctg} \alpha_s = b \alpha_s$, тогда для какого-либо $k=m$ имеем $\alpha_s = \mu_m$ или $T = 2\pi s / \mu_m$, причем $\sin^{(1/2)} \mu_m T = 0$ и в правых частях формул (2.3) и (2.4) члены с $k=m$ и $n=s$ обращаются в бесконечность. (Можно убедиться в том, что если $T_1 = T/2$, $s = 2r$, то эта особенность устраняется.)

Будем пока считать для простоты, что в формулы (2.3) и (2.4) входит только по одному члену с $k=m$ и $n=s$ (в силу линейности задачи это ограничение несущественно).

Пользуясь первой из формул (2.3), а также (1.14), найдем

$$L[u_1(1, \tau)] = b \partial u_1(1, \tau) / \partial z + u_1(1, \tau) =$$

$$= Q_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} \cos \mu_k \tau + C_{2k} \sin \mu_k \tau) (\cos \mu_k - b \mu_k \sin \mu_k) =$$

$$= Q_1 - a_m A_m \sin^{(1/2)} \mu_m (T - T_1) \cos^{(1/2)} \mu_m (\tau - T_1)$$

$$A_m = (\cos \mu_m - b \mu_m \sin \mu_m) / \sin^{(1/2)} \mu_m T \quad (2.5)$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, убедимся, что при всех $b \geq 0$ величина A_m конечна и отлична от нуля. Можно показать, что $L[u_2(1, \tau)] = L[u_1(1, \tau)] + Q_2 - Q_1$, и из (2.5) вытекает равенство

$$b \partial U(1, \tau) / \partial z + U(1, \tau) =$$

$$= Q[U(\tau), \tau] - a_m A_m \sin^{(1/2)} \mu_m (T - T_1) \cos^{(1/2)} \mu_m [\tau - (1/2) T_1] \quad (2.6)$$

Второй член в правой части (2.6), взятый со знаком минус, представляет собой s -й член разложения величины $b \partial \bar{U}(1, \tau) / \partial z + \bar{U}(1, \tau)$, где функция $\bar{U}(z, \tau)$ дана формулой (2.4), т. е. $b \partial \bar{u}_s(1, \tau) / \partial z + \bar{u}_s(1, \tau)$.

Таким образом, из (2.6) и (1.10) следует, что найдено периодическое решение другой задачи — с граничными условиями (1.10), из которых изъят член, соответствующий резонансному члену с $k=m$ в формуле (2.3) и $n=s$ в формуле (2.4); следовательно, для того чтобы найти решение искомой задачи, нужно в (2.3) и (2.4) изменить этот член на $w(z, \tau) = \bar{u}_s(z, \tau)$, т. е. на решение первой задачи без начальных условий с граничными условиями

$$\partial w(0, \tau) / \partial z = 0, \quad b \partial w(1, \tau) / \partial z + w(1, \tau) = B_s(\tau)$$

$$(B_s(\tau) = b \partial \bar{u}_s(1, \tau) / \partial z + \bar{u}_s(1, \tau) = c_s \cos \mu_m \tau + d_s \sin \mu_m \tau) \quad (2.7)$$

В силу первого условия (2.7) находим, что $w(z, \tau) = f(\tau+z) + f(\tau-z)$, где $f(x)$ — искомая функция, и из второго условия (2.7) получаем для нее дифференциально-функциональное уравнение

$$b\{f'(\tau+1) - f'(\tau-1)\} + f(\tau+1) + f(\tau-1) = B_S(\tau) \quad (2.8)$$

решение которого в силу второго условия (2.7) имеет вид

$$f(\tau) = -\left(\frac{1}{2}\right)\tau B_S'(\tau) \{\mu_m [(b+1)\sin \mu_m + b\mu_m \cos \mu_m]\}^{-1}$$

Таким образом, периодическое решение в случае резонанса заменяется решением, содержащим вековые члены.

Подобные результаты известны и для других задач (см., например, [5]).

Можно убедиться, что в решении второй задачи без начальных условий резонанс не возникает.

Формулы, аналогичные (2.3) и (2.4), описывающие решения второй и третьей задач без начальных условий при отсутствии камеры ($b=0$), определяют также вынужденные колебания (при этом влияние начальных условий исчезает). При решении же первой задачи без начальных условий в случае $b \geq 0$, а также и для нахождения вынужденных колебаний, как упоминалось выше, к решению (2.3) нужно добавить решение (1.12) $u_1^{(1)}(z, \tau)$ первой задачи (где положено $\nu = Q_1 = 0$).

Сравнивая решения первой и второй задач, видим, что при $\nu \rightarrow 0$ выполняется условие «исчезающего трения», введенное для других задач [6].

При наличии камеры ($b > 0$) формулы, аналогичные (2.3) — (2.4) для второй задачи, описывают автоколебания, возникающие при условиях (2.2), а формулы (1.11) — (1.14) — течение при заданных начальных условиях для любого момента времени, т. е. процесс возникновения этих автоколебаний.

Если условия (2.2) не выполнены (например, если $Q_2 < U_* < Q_1 < U_*$, как показано на фиг. 3), то возможны случаи, когда автоколебания не возникают. Например, если $\nu > 0$, то при некоторых значениях функций $U_0(z)$ и $V_0(z)$ ($0 < z < 1$), входящих в начальные условия (1.5), движение асимптотически стремится к стационарному состоянию, определяемому первым соотношением (2.1).

Пример. Пусть $U_0(z) = C = \text{const}$, $V_0(z) = 0$. Тогда формула (1.12), где положено $i=0$, примет вид

$$u_1^{(1)}(z, \tau) = Q_1 + P e^{-\nu \tau} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\cos \omega_k \tau + \frac{\nu}{\omega_k} \sin \omega_k \tau \right) \frac{\cos \mu_k z}{\cos \mu_k} \quad (2.9)$$

$$(P = 2b^{-1}(C - Q_1), \quad p_k = \cos^2 \mu_k (b\mu_k^2 + \cos^2 \mu_k)^{-1})$$

Если выполнено неравенство

$$C < Q_1 + \frac{b}{2}(U_* - Q_1) \left[\sum_{k=1}^{\infty} p_k + \nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{\omega_k} \right]^{-1}$$

то из (2.9) видно, что значение U_* функцией $u_1^{(1)}(1, \tau)$ никогда не будет достигнуто.

Числовые значения для входящих в (2.9) семи первых параметров μ_k и ω_k при $b = 3,3446605 \cdot 10^{-2}$, $\nu = 1,4$ представлены ниже

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| μ_k | 1,52 | 4,561 | 7,605 | 10,653 | 13,707 | 16,769 | 19,833 |
| ω_k | 0,552 | 4,341 | 7,475 | 10,561 | 13,636 | 16,710 | 19,784 |

Применяя развитые ранее методы [2, 3], можно убедиться, что для третьей задачи получаются результаты, вполне аналогичные найденным выше для первой и второй задач; в частности, резонанс не возникает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина Н. Н. Об изменении уровня грунтовых вод при поливах // ПМТФ. 1971. № 4. С. 87–94.
2. Кочина Н. Н. О некоторых нелинейных задачах уравнения теплопроводности // ПМТФ. 1972. № 3. С. 123–128.
3. Кочина Н. Н. О регулировании уровня грунтовых вод при орошении // ПМТФ. 1973. № 5. С. 125–133.
4. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
5. Кошляков Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1936. 505 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1972. 735 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.II.1991

УДК 532.59:534.1

© 1992 г. Н. Г. Кузнецов

ОЦЕНКА СНИЗУ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Предлагается методика оценки снизу для собственных частот плоских свободных колебаний идеальной жидкости в канале постоянного поперечного сечения. Она основана на тождестве [1], применявшемся для доказательства теоремы единственности в задаче об излучении и рассеянии воли полностью погруженным в жидкость телом. В отличие от оценок, полученных ранее [2, 3]¹, здесь не используется явное задание дна канала. Показано, что в ряде случаев оценка может быть существенно улучшена, если применить ее в комбинации с принципом монотонности [4, 5]. Разработанная методика применима и для трехмерной задачи. Рассматриваются примеры, результаты сравниваются с известными точными и приближенными значениями [5, 6], а также с оценками других авторов [7]¹. Нижняя оценка иного типа была получена в [8]. С библиографией по проблеме собственных частот колебаний идеальной жидкости можно ознакомиться по [5, 9].

1. **Постановка задачи.** Пусть в положении равновесия идеальная несжимаемая тяжелая жидкость заполняет канал с поперечным сечением W . Односвязная область $W \subset R_-^2 = \{(x, y) : y < 0\}$ имеет кусочно-гладкую границу без точек возврата, причем $\partial W = F \cup B$, $F \cap B = \emptyset$. Здесь $F = \{x \in (-a, +a); y = 0\}$ – свободная поверхность жидкости ($a > 0$), B – дно канала; оно представляет собой кривую, которая за исключением ее концов $(\pm a, 0)$, являющихся угловыми точками ∂W , лежит в R_-^2 .

Для описания плоских свободных гармонических по времени колебаний жидкости в канале используется смешанная задача Стеклова [4–6, 9]

$$\nabla^2 u = 0 \text{ в } W, \quad u_\nu = \nu u \text{ на } F, \quad \partial u / \partial n = 0 \text{ на } B \cap R_-^2 \quad (1.1)$$

Это спектральная задача, в которой требуется найти собственные значения параметра ν и соответствующие вещественные собственные функции из пространства Соболева $H^1(W)$, удовлетворяющие условию $\int_F u \, dx = 0$. Здесь n – внутренняя нормаль к ∂W ; величина νg (g – ускорение свободного падения) равна квадрату частоты

¹ См. также: Федоров А. Л. Геометрические оценки функционалов типа емкости и собственных чисел для областей сложной формы // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1973. 14 с.