Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 539.374

© 1992 г. С. В. Ермаков

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Для сложного напряженного состояния в качестве определяющего взято трехчленное соотношение [1, 2], означающее копланарность пятимерных векторов напряжений, скорости напряжений и скорости деформации. С использованием гипотезы локальной определенности [3] два коэффициента, входящие в трехчленное соотношение, принимаются функциями трех функционалов процесса – интенсивности напряжений, длины дуги траектории деформации и угла сближения. При ограниченности производных этих двух функций по каждому аргументу выяснены условия, обеспечивающие корректность постановки статической краевой задачи в скоростях в каждый момент упругопластического процесса.

Дается постановка квазистатической глобальной краевой задачи для всего процесса. Доказывается, что оператор глобальной задачи – оператор вариационного исчисления [4], положительно-определенный, сильно монотонный в главной части и обладающий $(S)_+$-свойством [5]. При помощи теоремы Лере – Лионса [4] показывается существование обобщенного решения. Доказывается теорема единственности глобального решения, показывается его непрерывная зависимость от внешних нагрузок. Для пошагового метода, использующего дискретизацию процесса по параметру нагружения, и итерационных методов (типа метода СН-ЭВМ [2]) доказывается сходимость приближенных решений к точному решению глобальной задачи.

1. В качестве определяющего соотношения для упругопластических материалов при сложном напряженном состоянии было предложено [1, 2] трехчленное соотношение между девиаторами напряжений S_{ij} и деформаций e_{ij}:

$$S_{ij}^{\cdot}={}^2/_3 Ne_{ij}^{\cdot}+MS_{ij}s^{\cdot}/\sigma,\quad \sigma=({}^3/_2 S_{ij}S_{ij})^{1/2},\quad s^{\cdot}=({}^2/_3 e_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot})^{1/2} \tag{1.1}$$

Здесь и ниже ведется суммирование по повторяющимся индексам i, j; точка означает правую производную по монотонно возрастающему со временем параметру $t\in[0, T]$; N и M – функционалы кривизн траектории деформации по длине ее дуги s, причем в упругой области при $e_u\equiv({}^2/_3 e_{ij}e_{ij})^{1/2}<e_s$ имеем $s\equiv e_u$, $M\equiv 0$, $N\equiv 3G$ (G – модуль сдвига, e_s – предел текучести).

Соотношение (1.1) (в векторном виде) было выведено [1] при условии выполнения гипотезы локальной определенности [3] и существования мгновенной предельной поверхности, регулярной в точке нагружения. На основании анализа экспериментальных данных соотношение (1.1) было обосновано для произвольного сложного нагружения, причем N – функция двух аргументов: σ и угла сближения $\theta=\arccos(e_{ij}^{\cdot}S_{ij}/\sigma s^{\cdot})$. Рассматривались [7–10] конкретные варианты соотношения (1.1).

Будем полагать, что коэффициенты N и M – функции трех функционалов процесса σ, s и $z=\cos\theta$. Сравнение с экспериментальными данными указывает на приемлемость этой гипотезы [6] [1]. Определяя девиаторы

[1] См. также: *Ермаков С. В.* Анализ соотношений и краевых задач теории упругопластических процессов средней и малой кривизны. Автореферат, М.: МГУ, 1984. 10 с.

$$b_{ij}^*={}^2/_3[M(\sigma, s, z)n_{ij}+N(\sigma, s, z)p_{ij}],\ p_{ij}=e_{ij}^{\cdot}/s^{\cdot},\ n_{ij}={}^3/_2S_{ij}/\sigma,$$

перепишем (1.1) в виде дифференциального уравнения относительно S_{ij}:

$$S_{ij}^{\cdot}=b_{ij}(S_{km},\ s(t),\ e_{km}^{\cdot}(t)),\ S_{ij}(0)=0;\ b_{ij}=b_{ij}^*(S_{km},\ s,\ p_{km})s^{\cdot} \quad (1.2)$$

Наложим на функции N, M и их производные ограничения

$$-3G_p\leqslant P(\Phi(s),\ s,\ -1)\leqslant P(\Phi(s),\ s,\ z)\leqslant P(\Phi(s),\ s,\ 1)= \\ =\Phi'(s)\geqslant\gamma_1>0 \quad (1.3)$$

$$0<N\leqslant N_0,\quad 0\leqslant|M|\leqslant M_0\sigma_0,\quad M_0=N_0-\gamma_1$$

$$|\partial E/\partial\sigma|\leqslant E_1,\quad |\partial E/\partial s|\leqslant E_2,\quad |\partial E/\partial z|\leqslant E_3\sigma$$

γ_1, M_i, N_i=const>0 (i=0, 1, 2, 3), $\sigma_0\equiv\sigma/\Phi(s)$, $P(\sigma,\ s,\ z)\equiv M+Nz=d\sigma/ds$ где $G_p\leqslant G$ — модуль разгрузки, Φ — функция упрочнения при простом нагружении, E означает M или N. Из (1.3) получаем:

$$\sigma_0\leqslant1;\ |b_{ij}^*|\equiv({}^3/_2b_{ij}^*b_{ij}^*)^{1/2}\leqslant b_0\equiv M_0+N_0,\ |b_{ij}|\leqslant b_0s^{\cdot} \quad (1.4)$$

$$|\Delta_1b_{ij}|\leqslant K_1|\Delta S_{ij}|+K_2|\Delta s|,\quad |\Delta_2b_{ij}|\leqslant b_2|\Delta e_{ij}^{\cdot}|$$

$$K_1=M_1+N_1+(M_0+M_3+N_3)/(Ge_s),\ K_2=M_2+N_2,\ b_2=b_0+2(M_3+N_3)$$

$$\Delta_1b_{ij}=b_{ij}(S_{km}^{(1)}, s^{(1)}, \dot e_{km}^{(1)})-b_{ij}(S_{km}^{(1)}, s^{(2)}, \dot e_{km}^{(1)})$$

$$\Delta_2b_{ij}=b_{ij}(S_{km}^{(2)}, s^{(2)}, \dot e_{km}^{(1)})-b_{ij}(S_{km}^{(2)}, S^{(2)}, \dot e_{km}^{(2)})$$

$$\Delta s=s^{(1)}-s^{(2)},\quad \Delta S_{ij}=S_{ij}^{(1)}-S_{ij}^{(2)},\quad \Delta e_{ij}^{\cdot}=\dot e_{ij}^{(1)}-\dot e_{ij}^{(2)},$$

$$|\Delta e_{ij}^{\cdot}|=({}^2/_3\Delta e_{ij}^{\cdot}\Delta e_{ij}^{\cdot})^{1/2}$$

Из (1.4) с использованием леммы Гронуолла ([5], с. 191) следует

$$|\Delta_1b_{ij}(t)|\leqslant b(t)s^{\cdot(1)}(t),\quad b(t)=\min\left\{\rho(s^{(1)}(t))\int_0^t|\Delta e_{ij}(\tau)|d\tau,b_1\right\} \quad (1.5)$$

$$\rho(s)=K_1\exp(K_1s)(K_2s+b_2)+K_2,\ b_1=2M_0+N_0$$

Выясним условия 1) положительной определенности, 2) монотонности и 3) L-непрерывности связи $S_{ij}^{\cdot}\sim e_{ij}^{\cdot}$ (1.2) для всех $s>e_s$, $\sigma_0\leqslant1$.

1) Если $F(\sigma,\ s,\ z)\equiv Mz+N\geqslant\gamma_1$ для всех $z\in[-1,\ 1]$, то

$$S_{ij}^{\cdot}e_{ij}^{\cdot}\geqslant\gamma_1s^{\cdot2} \quad (1.6)$$

2) С использованием критерия Сильвестра получаем, что если для $\Delta\theta=\theta^{(1)}-\theta^{(2)}\neq0$ выполняется условие $F(\sigma,\ s,\ z)>0$ и неравенство

$$4F^{(1)}F^{(2)}-[M^{(1)}z^{(2)}+M^{(2)}z^{(1)}+(N^{(1)}+N^{(2)})\cos\Delta\theta]^2>0 \quad (1.7)$$

$$M^{(k)}=M(\sigma, s, z^{(k)}),\quad N^{(k)}=N(\sigma, s, z^{(k)}),$$

$$z^{(k)}=\cos\theta^{(k)}=\dot e_{ij}^{(k)}S_{ij}/(\sigma s^{\cdot(k)}),\quad k=1,2$$

то $I\equiv[b_{ij}(S_{km}, s, \dot e_{km}^{(1)})-b_{ij}(S_{km}, s, \dot e_{km}^{(2)})]\Delta e_{ij}^{\cdot}>0$ при $\Delta e_{ij}^{\cdot}\neq0$. Частные случаи условия (1.7) рассмотрены ранее [8—11]. С использованием дифференцируемости N и M по z, аналогично рассмотренному ранее [9], имеем, что если для $z\in[-1, 1]$ выполнены неравенства

$$N_z'\equiv\partial N/\partial z\leqslant 0,\ M_z'\leqslant 0,\ L(\sigma, s, z)\equiv M-M_z'z+N_z'z\leqslant 0,\ z\in[-1, 1] \quad (1.8)$$

$$N-N_z'z+M_z'+L\geqslant\gamma_2>0,\ z\in[-1, 0] \quad (1.9)$$

а для $z\in]0, 1]$ выполняются одновременно или неравенства (1.9) и $\Psi(\sigma, s, z)\equiv L-2N_z'\,z\leqslant 0$, или неравенства $\Psi(\sigma, s, z)>0$, $N+M_z'+L^2/(4N_z'z)\geqslant\gamma_2$, то

$$I\geqslant\gamma_2{}^{\circ 2}/_3\Delta e_{ij}{}^{\bullet}\Delta e_{ij}{}^{\bullet},\ \gamma_2=\text{const}>0 \quad (1.10)$$

3) Из L-непрерывности b_{ij} по S_{km} для кусочно-непрерывных по t функций $e_{km}{}^{\bullet}(t)$ следует существование единственного решения уравнения (1.2). Введем множество кусочно-непрерывных по t тензор-функций $S_{ij}{}^{\bullet}$ (или $e_{ij}{}^{\bullet}$):

$$Z(\chi)=\{S_{ij}{}^{\bullet}:\ |S_{ij}{}^{\bullet}(t)|\leqslant\chi<\infty,\ \forall t\in[0, T]\},\ \chi=\text{const}$$

Утверждение 1.1. При выполнении неравенств (1.3), (1.6), (1.10) определяемый соотношением (1.2) оператор $D\in(e_{ij}{}^{\bullet}\in Z(\chi)\to S_{ij}{}^{\bullet}\in Z(b_0\chi))$ L-непрерывен и имеет обратный L-непрерывный оператор

$$D^{-1}\in(S_{ij}{}^{\bullet}\in Z(b_0\chi)\to e_{ij}{}^{\bullet}\in Z(b_0\chi/\gamma_1))$$

в смысле норм $\left(\int\limits_0^T|e_{ij}{}^{\bullet}(t)|^2\,dt\right)^{1/2},\ \left(\int\limits_0^T|S_{ij}{}^{\bullet}(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$

Доказательство. L-непрерывность оператора D с константой $T\chi\rho(T\chi)+b_2$ следует из (1.4), (1.5). Согласно (1.6), (1.10) уравнение (1.2) определяет неявную функцию $e_{ij}{}^{\bullet}=\psi_{ij}(S_{km}{}^{\bullet}, S_{km}, s)$, L-непрерывную по $S_{km}{}^{\bullet}$ с константой $V_1=\gamma_2{}^{-1}$. Если $S_{ij}{}^{\bullet}\in Z(b_0\chi)$, то из (1.6) вытекает, что $e_{ij}{}^{\bullet}\in Z(b_0\chi/\gamma_1)$, и согласно (1.4), (1.10) функция $|\psi_{ij}|$ L-непрерывна по S_{km} и s с константами $V_i=K_{i-1}\chi/\gamma_2$ $(i=2, 3)$. Тогда уравнение $s^{\bullet}=|\psi_{ij}(S_{km}{}^{\bullet}(t), S_{km}(t), s)|$ при начальном условии $s(0)=0$ имеет единственное решение, т. е. определен оператор D^{-1}, L-непрерывность которого с константой $\exp(V_3T)(V_1+TV_2)$ следует из леммы Гронуолла.

В качестве иллюстрации рассмотрим выражения для N и M в виде [9]

$$M=[\Phi'-(\alpha+\alpha_1 z)\Phi/\lambda]\sigma_0,\ N=(r+r_1 z\sigma_0)\Phi/\lambda;\ r_1=1-r,\ \alpha_1=1-\alpha; \quad (1.11)$$

где λ, α, r – функции s, определяемые из экспериментов на плоских траекториях деформации, причем в упругой области r, α, $\Phi/(3G\lambda)=1$. При $s>e_s$ для некоторых сталей и латуней (см. ссылку на с. 342)

$$0{,}3\leqslant\alpha\leqslant 1;\quad 1\leqslant r\leqslant 1+\alpha;\quad G\leqslant\Phi/\lambda\leqslant 3G \quad (1.12)$$

При ограниченности производных λ', α', r', Φ', Φ'' и выполнении условий

$$\gamma_1\leqslant\Phi/\lambda,\quad \Phi'\lambda/\Phi\leqslant\alpha\leqslant 1+r-\Phi'\lambda/\Phi,\quad 1\leqslant r\leqslant 1+\alpha \quad (1.13)$$

все введенные выше ограничения на функции N, M и свойства 1–3 связи (1.2) выполняются, причем $\gamma_2=\gamma_1/2$ [9].

2. Уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнения связи (1.2) (при заданных величинах S_{km} и s) вместе с линейной зависимостью между шаровыми тензорами $\sigma_{ii}=3K\varepsilon_{ii}$ и граничные условия определяют статическую краевую задачу для любого $t\in[0, T]$ относительно вектора скорости $u^{\cdot}\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ (уравнение Лагранжа):

$$\int\limits_{\Omega}\sigma_{ij}^{\cdot}(\mathbf{u}^{\cdot})\zeta_{ij}^{\cdot}\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}F_i^{\cdot}\zeta_i^{\cdot}\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma_\sigma}P_i^{\cdot}\zeta_i^{\cdot}\,d\Gamma,\quad\forall\zeta^{\cdot}\in C^1(\Omega)\tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}^{\cdot}(\dot{\mathbf{u}})=S_{ij}^{\cdot}(\dot{\mathbf{u}})+\delta_{ij}3K\varepsilon^{\cdot},\quad\varepsilon_{ij}^{\cdot}=e_{ij}^{\cdot}+\delta_{ij}\varepsilon^{\cdot}=(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})/2,$$
$$\zeta_{ij}^{\cdot}=(\dot{\zeta}_{i,j}+\dot{\zeta}_{j,i})/2$$

$S_{ij}(\mathbf{u}^{\cdot})$ определяется соотношениями (1.2); Γ_u и Γ_σ — части поверхности, ограничивающей конечную область Ω, занятую телом; F_i и P_i — компоненты объемных и поверхностных сил; $\zeta^{\cdot}$ — виртуальная скорость; $\zeta^{\cdot}=0$ на Γ_u.

Рассмотрим функции $\mathbf{u}^{\cdot}\in H$, $H(\Omega)$ — гильбертово пространство [12]. Левая часть (2.1) определяет линейный функционал на $\zeta^{\cdot}\in H$. Из (1.4) следует непрерывность этого функционала и ограниченность оператора

$$\mathbf{A}\in(H\to H^*):\langle\mathbf{A}u^{\cdot},\zeta^{\cdot}\rangle=\int\limits_{\Omega}\sigma_{ij}^{\cdot}(\mathbf{u}^{\cdot})\zeta_{ij}^{\cdot}\,d\Omega,\qquad\|\mathbf{A}\|\leqslant C_1<\infty$$

H^* — сопряженное пространство. Из условий (1.4), (1.6), (1.10) следует, что оператор $\mathbf{A}$ — положительно-определенный, L-непрерывный и сильно монотонный [9] с постоянными C_2, C_3, C_4, не зависящими от S_{km}, s. Пусть внешние нагрузки удовлетворяют условиям

$$F_i^{\cdot}(t)\in L_{q_1}(\Omega),\ q_1>{}^6/_5;\quad P_i^{\cdot}(t)\in L_{q_2}(\Gamma_\sigma),\ q_2>{}^4/_3\tag{2.2}$$

тогда уравнение (2.1) можно представить [12] в виде уравнения в H^*:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{\cdot}=f,\quad f\in H^*\tag{2.3}$$

Согласно теореме Минти — Браудера ([5], с. 96) верно

Утверждение 2.1. Пусть выполняются условия (2.3), (1.3), (1.6), (1.10), тогда уравнение (2.3) имеет единственное решение $\mathbf{u}^{\cdot}\in H$, причем обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}\in(H^*\to H)$ L-непрерывен и сильномонотонен.

Замечание 2.1. Из теоремы 3.3 ([5], с. 103) следует сильная сходимость решений Галеркина к решению (2.3), а из теоремы 3.4 ([5], с. 104) точное решение является сильным пределом линейных итераций.

3. Сформулируем глобальную квазистатическую краевую задачу. Требуется найти вектор $\mathbf{u}(x)\in C^1(0,T;C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega}))$ $(\mathbf{x}=\{t,\bar{x}\}\in Q=[0,T]\times\times\Omega)$, удовлетворяющий уравнениям (2.1), в которых $S_{ij}^{\cdot}(\mathbf{u}^{\cdot})(\mathbf{x})$ понимается как отображение векторов $\mathbf{u}^{\cdot}(\mathbf{x})$ на девиаторы над Q, определяемое соотношениями Коши и уравнением (1.2).

Интегрируя уравнение (2.1) по t, получаем уравнение виртуальных работ

$$\int\limits_{Q}\sigma_{ij}^{\cdot}(\mathbf{u})(\mathbf{x})\zeta_{ij}^{\cdot}(\mathbf{x})\,dQ=\int\limits_{Q}F_i^{\cdot}(\mathbf{x})\zeta_i^{\cdot}(\mathbf{x})\,dQ+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_\sigma}P_i^{\cdot}(\mathbf{x})\zeta_i^{\cdot}(\mathbf{x})\,d\Gamma\,dt,\qquad\forall\zeta^{\cdot}\in C^1(Q)\tag{3.1}$$

Обозначим через $X=L_2(0,T;H)$ гильбертово ([5], с. 159) пространство (классов) функций $t\to\mathbf{u}(t)$: $]0,T[\to H(\Omega)$, измеримых, принимающих значения из H, и таких, что

$$\left(\int_0^T \|\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2} \equiv \|\mathbf{u}\|_X < \infty, \qquad (u^1, u^2)_X = \int_0^T (\mathbf{u}^1(t), \mathbf{u}^2(t))_H\,dt$$

Аналогично определим пространство Y:

$$\sigma_{ij} \in Y = L_2(0, T; (L_2(\Omega))^9), \qquad \|\sigma_{ij}\|_Y = \left(\int_Q |\sigma_{ij}(\mathbf{x})|^2\,dQ\right)^{1/2}$$

Обозначим через X_1 множество $u \in X$: $s^{\boldsymbol\cdot}(\mathbf{x}) \in L_\infty(Q)$.

Левая часть равенства (3.1) определяет линейный непрерывный функционал на $\zeta \in X$. Для нелинейного оператора $\mathbf{U} \in (X \to X^*)$ ($X^* = L_2(0; T; H^*)$ — сопряженное пространство ([5], с. 159)), определяемого тензором $\sigma_{ij}^{\boldsymbol\cdot}(\mathbf{u})(\mathbf{x})$ имеем

$$\langle \mathbf{U}\mathbf{u}, \zeta\rangle_T = \int_0^T \mathbf{A}_{s_{km}(t),\, s(t)}\mathbf{u}^{\boldsymbol\cdot}(t), \zeta^{\boldsymbol\cdot}(t) > dt \tag{3.2}$$

где явно указана зависимость $\mathbf{A}$ от S_{km}, s. Используя неравенство Гёльдера и свойства оператора $\mathbf{A}$, получаем, что $\mathbf{U}$ — ограниченный и положительно-определенный с теми же константами, что и оператор A:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{u}\|_{X^*} \leqslant C_1\|\mathbf{u}\|_X, \quad \langle \mathbf{U}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_T \geqslant C_2\|\mathbf{u}\|_X^2 \tag{3.3}$$

Представим оператор $\mathbf{U}\mathbf{u}$ в виде $\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, где оператор $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \to \mathbf{B}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ (как оператор из $X \times X$ в X^*) определяется выражением

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2), \zeta\rangle_T = \textstyle\int_Q [b_{ij}(S_{km}^1(\mathbf{x}), s^1(\mathbf{x}), e_{km}^{\boldsymbol\cdot 2}(\mathbf{x})) +\\ +\delta_{ij}3K\varepsilon^{\boldsymbol\cdot 2}(\mathbf{x})]\zeta_{ij}^{\boldsymbol\cdot}(\mathbf{x})\,dQ\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$s^1(t) = \int_0^t |e_{ij}^{\boldsymbol\cdot 1}(\tau)|\,d\tau$$

S_{ij}^1 — решение задачи (1.2) при $\dot e_{km} = \dot e_{km}^1$, $s = s^1$.

Соотношение (3.4) определяет два оператора:

1) для $\forall \mathbf{u} \in X$ $\mathbf{B}_1 \in (X \to X^*)$: $\mathbf{B}_1\mathbf{u}^* = \mathbf{B}(\mathbf{u}^*, \mathbf{u})$;

2) для $\forall \mathbf{u} \in X$ $\mathbf{B}_2 \in (X \to X^*)$: $\mathbf{B}_2\mathbf{u}^* = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)$.

Замечание 3.1. Оператор $\mathbf{B}_2$ определен на $\forall \mathbf{u} \in X$, операторы $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{U}_1$ (пока) только на $\mathbf{u} \in X$, для которых решение уравнения (1.2) существует.

Из (3.2) следует L-непрерывность и сильная монотонность оператора $\mathbf{B}_2$ с теми же константами, что и для оператора $\mathbf{A}$ ($\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in X$):

$$\forall \mathbf{u} \in X \|\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^1) - \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^2)\|_{X^*} \leqslant C_3\|\Delta\mathbf{u}\|_X,$$

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^1) - \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^2), \Delta\mathbf{u}\rangle_T \geqslant C_4\|\Delta\mathbf{u}\|_X^2 \tag{3.5}$$

Замечание 3.2. Оператор $\mathbf{U}$, вообще говоря, не монотонный.

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ в X при $n \to \infty$, тогда

$$w_n \equiv \langle \mathbf{B}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}_n - \mathbf{u}\rangle_T \to 0, \quad \forall \mathbf{u}^* \in X$$

Доказательство. Обозначая $u^{(n)}=u_n-u$, имеем $s^{\cdot(n)}$, $\varepsilon^{(n)}\to 0$ в $L_2(Q)$. Тогда из (1.4), (3.4)

$$w_n \leqslant \int\limits_Q [b_0 s^{\cdot *}(x) s^{\cdot(n)}(x)+9K\varepsilon^{\cdot *}(x)\varepsilon^{\cdot(n)}(x)]dQ\to 0$$

Лемма 3.2. Пусть $a\in(\Omega\to R^1)$ почти всюду конечна в Ω, $v\in L_p(\Omega)$, $1\leqslant \leqslant p<\infty$, $C=\mathrm{const}>0$, $g_n\in R^1$: $g_n\to 0$ при $n\to\infty$; тогда $w_n=\min\{|g_n a|, C\}v\to \to 0$ в $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Из условия леммы имеем $w_n\in L_p(\Omega)$, $w_n{}^p\leqslant C^p|v|^p\in L_1(\Omega)$ и $w_n(x)\to 0$ для почти всех $\bar{x}\in\Omega$, тогда из теоремы Лебега [5] $\|w_n\|\to 0$.

Лемма 3.3. Пусть при $n\to 0$ $u_n\to u$ в X, тогда

$$\Delta_1 S_{ij}{}^{\cdot}\equiv b_{ij}(S_{km}^{(u_n)}, s^{(u_n)}, \dot{e}_{km}^{*})-b_{ij}(S_{km}^{(u)}, s^{(u)}, \dot{e}_{km}^{*})\rightharpoonup 0,\quad \forall u^*\in X \text{ в } Y$$

Доказательство. Обозначая

$$u^{(n)}=u_n-u,\quad g_n(x)=\int\limits_0^t s^{\cdot(n)}(\tau,\bar{x})\,d\tau,\quad \varkappa_n(x)=\min\{g_n(x)\rho(s^*(x)), b_1\}s^{\cdot *}(x)$$

из (1.5) для любого $\zeta_{ij}\in Y$ получаем

$$\int\limits_Q \Delta_1 S_{ij}{}^{\cdot}\zeta_{ij}dQ\leqslant\int\limits_Q \varkappa_n(x)|\zeta_{ij}(x)|dQ$$

Из неравенства Гёльдера следует, что $g^n\to 0$ в $L_2(Q)$, тогда, используя абсолютную непрерывность интеграла Лебега, из любой слабо сходящейся последовательности, являющейся подпоследовательностью $\{\varkappa_n\}$, можно выбрать подпоследовательность, сильно сходящуюся к нулю, тогда из леммы 5.4 ([5], с. 20) $\varkappa_n\to 0$ в $L_2(Q)$.

Следствие 1. Оператор B_1 (а значит и U) — деминепрерывный.

Следствие 2. Если кроме сходимости $u_n\to u$ выполняется условие $g_n(x)\to 0$ для почти всех $x\in Q$, то согласно лемме 3.2 $\Delta_1 S_{ij}{}^{\cdot}\to 0$ в Y.

Непосредственной проверкой, используя леммы, убеждаемся, что при выполнении условий (1.3), (1.6), (1.10) U на всем X множество является положительно-определенным оператором вариационного исчисления, сильно монотонным в главной части, обладающим (S)-свойством (см. [4], с. 192).

При условиях на внешние нагрузки

$$F_i^{\cdot}\in L_2(0, T; L_{q_1}(\Omega)),\ q_1>{}^6/_5;\ P_i^{\cdot}\in L_2(0, T; L_{q_2}(\Gamma_\sigma)),\ q_2>{}^4/_3 \tag{3.6}$$

правая часть равенства (3.1) представляет собой линейный непрерывный функционал на $\zeta\in X$: $\langle f, \zeta\rangle_T$, $f\in X^*$. Тогда из теоремы Лере — Лионса [4] следует.

Утверждение 3.1 (теорема существования). При выполнении условий (3.6), (1.3), (1.6), (1.10) уравнение

$$Uu=f \tag{3.7}$$

имеет (по крайней мере одно) решение $u\in X$.

Утверждение 3.2. Если $\mathbf{f} \in C(0, T; H^*)$, то для решения (3.7) $\mathbf{u}^{\cdot} \in C(0, T; H)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{u}_n^{\cdot}(\bar{x}) \equiv \mathbf{u}^{\cdot}(t_n, \bar{x}) - \mathbf{u}^{\cdot}(t, \bar{x})$, $f_n \equiv \mathbf{f}(t_n) - \mathbf{f}(t)$; по условию $f_n \to 0$ в H^* при $t_n \to t$. Из (1.4) и свойства А имеем для $n > n^*$:

$$C_4 \| \mathbf{u}_n^{\cdot} \|_H^2 \leqslant \int_\Omega | b_{ij}(S_{km}(t), s(t), \dot{e}_{km}(t)) - b_{ij}(S_{km}(t_n), s(t_n), \dot{e}_{km}((t)) | s_n^{\cdot}\, \Omega +$$

$$+ \langle f_n, \mathbf{u}_n^{\cdot} \rangle \leqslant (\| w_n \|_{L_2(\Omega)} + \| f_n \|_{H^*}) \| \mathbf{u}_n^{\cdot} \|, \quad w_n(\bar{x}) \leqslant \min \{ | t - t_n |^{1/2} K_3 \Phi(\bar{x}), b_1) s^{\cdot}$$

$$K_3 = K_1 b_0 + K_2, \; \Phi(\bar{x}) = \Big(\int_{t_{n^*}}^{t} s^{\cdot 2}(\tau, \bar{x})\, d\tau \Big)^{1/2} \in L_2(\Omega)$$

Из леммы 3.2 $\| w_n \|_{L_2(\Omega)} \to 0$, значит $\| \mathbf{u}_n^{\cdot} \|_H \to 0$ при $t_n \to t$.

Лемма 3.4. Если $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ в X, $\mathrm{U}\mathbf{u}_n \to \mathbf{f}$ в X^* при $n \to \infty$; то 1) $\mathrm{U}\mathbf{u} = \mathbf{f}$; 2) $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ в X.

Доказательство. 1) По условию леммы $\langle U\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \rangle_T \to \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_T$, тогда так как U – оператор типа (M) ([4], с. 192, 191, 184), то $U\mathbf{u} = \mathbf{f}$. 2) Согласно 1 $\langle \mathrm{U}\mathbf{u}_n - \mathrm{U}\mathbf{u}, \mathbf{u}_n - \mathbf{u} \rangle_T \to 0$, тогда из (S)-свойства $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ в X.

Утверждение 3.3. Если решение уравнения (3.7) единственно, то обратный оператор $\mathrm{U}^{-1} \in (X^* \to X)$ непрерывен.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}_n \to \mathbf{f}$ в X^* и $\mathbf{u}_n = \mathrm{U}^{-1}\mathbf{f}_n$, $\mathbf{u} = \mathrm{U}^{-1}\mathbf{f}$. Из $(3.3)_2$ следует, что последовательность $\{\mathbf{u}_n\}$ ограниченна. Тогда из рефлексивности X, леммы 3.4 и леммы 5.4 ([5], с. 20) получаем $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ в X.

Утверждение 3.4. (Теорема единственности.) Если уравнение (3.7) имеет решение $\mathbf{u} \in X_1 \subset X$, то $\mathbf{u}$ – единственное решение в X.

Доказательство. При $t \in [0, t_1]$, где $t_1 \geqslant e_s/V$ ($V = \mathrm{vrai}\ \max\ c^{\cdot}(\mathrm{x}) < \infty$), по всей области Ω деформации только упругие, поэтому решение единственно. Пусть при $t \leqslant t_2$ решение единственно, а при $t > t_2 \geqslant t_1$ существует решение $\mathbf{v} \in X$: $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$. Обозначая $\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, получаем из (1.5), (3.5) для $t \geqslant t_2$

$$C_4 \int_{t_2}^{t} \| \mathbf{u}^{\cdot *}(\tau) \|_H^2\, d\tau \leqslant \int_{t_2} \int_\Omega \min \Big\{ \rho(s(\tau, \bar{x})) \int_{t_2}^{\tau} s^{\cdot *}(y, \bar{x})\, dy,\; b_1 \Big\} s^{\cdot}(\tau, \bar{x})\, d\Omega\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (6G)^{-1} \rho(TV) V(t - t_2) \int_{t_2}^{t} \| \mathbf{u}^{\cdot *}(\tau) \|_H^2 d\tau$$

что неверно при малом $t - t_2$.

4. Разобьем отрезок $[0, T]$ на ν равных частей точками $t_n = \Delta \times n$, $\Delta = T/\nu$; $n = 0, \ldots, \nu$. На n-шаге ($n = 1, 2, \ldots, \nu$) будем искать решение $u^{\cdot(n)} \in H$ уравнения

$$\mathrm{A}^{(n)}\mathbf{u}^{\cdot} = f^{(n)}, \quad \mathrm{A}^{(n)}\mathbf{u}^{\cdot} \equiv \mathrm{A}_{S_{km}^{(n-1)},\, s^{(n-1)}} \mathbf{u}^{\cdot}, \quad f^{(n)} \equiv f(t_n) \in H^* \qquad (4.1)$$

где $S_{km}^{(n-1)}(\bar{x})$, $s^{(n-1)}(\bar{x})$ определены на $(n-1)$-м шаге, причем $S^{(0)}$, $s^{(0)} = 0$.

Уравнение (4.1) согласно утверждению 2.1 имеет единственное решение. Для $t \in [t_{n-1}, t_n]$ сначала вычисляем

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot}(t) = (u_{i,j}^{\cdot(n-1)} + u_{j,i}^{\cdot(n-1)})/2, \qquad s(t) = s^{(n-1)} + (t - t_{n-1})\, s^{\cdot(n-1)}$$

потом при известных $e_{ij}^{\cdot}(t)$, $s(t)$ находим $S_{ij}(t)$ как решение уравнения (1.2) при начальном условии $S_{ij}(t_{n-1})=S_{ij}^{(n-1)}$. Полагая затем $S_{km}^{(n)}=S_{km}(t_n)$, $s^{(n)}=s(t_n)$, переходим к решению уравнения (4.1) на $(n+1)$-м шаге. В результате пошагового метода получаем кусочно-постоянное по t решение $\mathbf{u}_\Delta^{\cdot}(t,\bar{x})=\mathbf{u}^{\cdot(n)}(\bar{x})$ при $t\in]t_{n-1},t_n]$, при этом функция $s(\mathbf{u}_\Delta)(t,\bar{x})$ — кусочно-линейная по t, а девиатор $S_{ij}(\mathbf{u}_\Delta)(t,\bar{x})$ — кусочно-гладкий, непрерывный по t.

Определяя оператор $\mathbf{U}_\Delta$ и функционал $\mathbf{f}_\Delta$, соответствующие постоянным по t на каждом шаге тензору $\sigma_{ij}^{\cdot\Delta}$ и нагрузкам $F_i^{\cdot\Delta}$, $P_i^{\cdot\Delta}$:

$$\langle \mathbf{U}_\Delta\mathbf{u}_\Delta,\zeta\rangle_T=\sum_{n=1}^{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\langle \mathbf{A}^{(n)}\mathbf{u}^{\cdot(n)},\zeta^{\cdot}(t)\rangle\,dt,\qquad \langle \mathbf{f}_\Delta,\zeta\rangle_T=\sum_{n=1}^{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\langle f^{(n)},\zeta^{\cdot}(t)\rangle\,dt$$

с использованием теоремы 1.8 ([5], с. 153) получаем равенство в X^*

$$\mathbf{U}_\Delta\mathbf{u}_\Delta=\mathbf{f}_\Delta \tag{4.2}$$

Будем полагать, что внешние нагрузки удовлетворяют условию

$$\mathbf{f}_\Delta\to\mathbf{f}\ \text{в}\ X^*\ \text{при}\ \Delta\to0 \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. Пусть при $\Delta\to0$ для любого Δ

$s^{\cdot(n)}(\bar{x})\leqslant\xi(\bar{x})\in L_2(\Omega)$ для почти всех $x\in\bar{\Omega}$ и всех $n=1,\ldots,T/\Delta$ (4.4)

Тогда $w_n\equiv\|\sigma_{ij}^{\cdot\Delta}(\mathbf{u}_\Delta)-\sigma_{ij}^{\cdot\Delta}(\mathbf{u}_\Delta)\|_Y\to0$.

Доказательство. Из (1.5) и леммы 3.2 получаем

$$w_\Delta^2=\sum_{n=1}^{\nu}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\int_\Omega|b_{ij}(S_{km}^{(n-1)},s^{(n-1)},e_{km}^{\cdot(n)})-b_{ij}(S_{km}(\tau),s(\tau),e_{km}^{\cdot(n)})|^2\,d\Omega\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant T\int_\Omega\min\{\Delta^2\rho^2(T\xi(\bar{x}))\xi^2(\bar{x}),b_1^2\}\xi^2(\bar{x})\,d\Omega\to0\quad\text{при}\quad\Delta\to0.$$

Следствие. При выполнении условия (4.4) $\|\mathbf{U}_\Delta\mathbf{u}-\mathbf{U}\mathbf{u}_\Delta\|_{X^*}\to0$ при $\Delta\to0$.

Утверждение 4.1 (теорема сходимости пошагового метода.) Пусть при $\Delta\to0$ для функционала внешних нагрузок и кусочно-постоянного по t решения уравнения (4.2) $\mathbf{u}_\Delta^{\cdot}(\mathbf{x})$ выполняются условия (4.3) и (4.4); тогда каждая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{\mathbf{u}_\Delta\}$ сходится (сильно) в X к точному решению уравнения (3.7); если в (4.4) $\xi\in L_\infty(\Omega)$, то $\mathbf{u}_\Delta\to\mathbf{u}$ в X ($\mathbf{u}$ — единственное решение (3.7)) и $\sigma_{ij}^{\cdot\Delta}(\mathbf{u}_\Delta)\to\sigma_{ij}^{\cdot}(\mathbf{u})$ в Y.

Доказательство. Из следствия леммы 4.1 следует, что $\mathbf{U}\mathbf{u}_\Delta\to\mathbf{f}$ в X^*; аналогично доказательству утверждения 3.4 и учитывая, что при $\xi\in L_\infty$ решение (3.7) — единственно в X, получаем требуемый результат.

Замечание 4.1. Условие сильной сходимости последовательности тензоров $\{\sigma_{ij}^{\cdot\Delta}(\mathbf{u}_\Delta)\}$ к точному решению дано в следствии 2 леммы 3.3.

5. Рассмотрим два правила задания итераций:

$$1)\ \mathbf{J}\mathbf{u}_n=\mathbf{J}\mathbf{u}_{n-1}-\tau(\mathbf{U}\mathbf{u}_{n-1}-\mathbf{f});\quad 2)\ \mathbf{B}(\mathbf{u}_{n-1},\mathbf{u}_n)=\mathbf{U}\mathbf{u}_{n-1}-\tau(\mathbf{U}\mathbf{u}_{n-1}-\mathbf{f});\quad n\geqslant1 \tag{5.1}$$

где $\mathbf{J}$ — оператор линейной теории упругости, так что $\langle \mathbf{Ju}, \mathbf{u}\rangle_T = \|\mathbf{u}\|_X^2$.

Лемма 5.1. Пусть 1) итерации $\mathbf{u}_n$, задаваемые вторым правилом (5.1), принадлежат $X_c \subset X$; 2) существуют числа $0<p<1$, $0<\tau^*\leqslant 1$, такие, что в окрестности $\mathbf{u}_0$ радиуса $r = \|\mathbf{U}\mathbf{u}_0 - \mathbf{f}\|_{X^*}/[(1-p)C_4]$

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{U}\mathbf{v}\|_{X^*} \leqslant p\|\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{U}\mathbf{u}\|_{X^*}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X_c: \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_X \leqslant \tau^*(1-p)r \quad (5.2)$$

Тогда для любого $\tau \in]0, \tau^*[$ $\mathbf{u}_n$ сильно сходятся к решению (3.7) $\mathbf{u}$:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{u}_n - \mathbf{f}\|_{X^*} \leqslant k^n \|\mathbf{U}\mathbf{u}_0 - \mathbf{f}\|, \quad \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_X \leqslant k^n r, \quad k = 1 - \tau(1-p) < 1 \quad (5.3)$$

Доказательство. При $n=1$ из сильной монотонности $\mathbf{B}_2\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\| \leqslant \tau^*(1-p)r$, тогда из (5.2) получаем $W_1 \leqslant kW_0$, $W_n = \|Uu_n - f\|_{X^*}$, $n \geqslant 0$. По индукции для $n \geqslant 2$: $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}\|_X \leqslant \tau W_{n-1} C_4^{-1}$, $W_n \leqslant kW_{n-1}$, тогда $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0\|_X < r$ и верны неравенства (5.3).

Пусть область тела и внешние нагрузки таковы, что итерации (5.1) $\mathbf{u}_n \in X_1 \subset X$. Из (1.5) для $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in X$, различающихся только при $t \in [t_1, t_2]$:

$$|\Delta_1 b_{ij}(t)| \leqslant V\rho(\Delta V) \int_{t_1}^{t_2} |\Delta e_{ij}^{\cdot}(y)|\,dy, \quad \Delta \equiv t_2 - t_1, \quad \Delta e_{ij}^{\cdot} \equiv e_{ij}^{\cdot 1} - e_{ij}^{\cdot 2}, \quad V = \mathrm{const} \quad (5.4)$$

С использованием неравенства Гёльдера из (5.4) получаем оценку

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) - \mathbf{U}\mathbf{u}^2\|_{X^*} \leqslant \mu(\Delta)\|\Delta \mathbf{u}\|_X, \quad \Delta\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2, \quad \mu(\Delta) \equiv \Delta V \rho(\Delta V)/3G \quad (5.5)$$

Из нее следует, что оператор $\mathbf{U}$ удовлетворяет для таких $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ условию L-непрерывности с константой $C_3^{\cdot} = C_3 + \mu(\Delta)$. Кроме того, из (5.5) и сильной монотонности $\mathbf{B}_2$ следует, что существуют Δ' и Δ''

$$\mu(\Delta') = p \inf_{\substack{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in X_1 \\ \mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2 \text{ при } t \notin [t_1, t_2]}} \{\|\mathbf{B}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}^2) - \mathbf{U}\mathbf{u}^1\|_{X^*}/\|\Delta\mathbf{u}\|_X\}, \quad \mu(\Delta'') = 2C_4, \quad p<1$$

такие, что при $\Delta < \Delta'$ выполняется неравенство (5.2), а при $\Delta < \Delta''$ оператор $\mathbf{U}$ сильно монотонен с постоянной $C_4^{\cdot} = C_4 - \mu(\Delta)/2 > 0$.

Тогда из теоремы 3.4 ([5], с. 104) и леммы 5.1 следует.

Утверждение 5.1. Итерации, определяемые первым (или вторым) правилом (5.1) при $\tau \in]0, 2C_4^*(C_3^*)^{-2}[$ (или при $\tau \in]0, 1]$) сходятся к точному решению $\mathbf{u}$ уравнения (3.7), причем имеет место оценка погрешности

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_X < \beta^n n^{\nu-1} C, \ C \equiv \tau_0 \|\mathbf{U}\mathbf{u}_0 - \mathbf{f}\|_{X^*} (1 + \tau_0 \mu(\Delta_0)/\beta)^{\nu-1} (1-\beta)^{-\nu}, \ \nu = T/\Delta_0$$

$$\beta \equiv [1 - 2C_4^*\tau + (C_3^*\tau)^2]^{1/2} < 1, \ \tau_0 = \tau, \ \Delta_0 = \Delta'' \ (\text{или } \beta = k < 1, \ \tau_0 = \tau/C_4, \ \Delta_0 = \Delta')$$

Автор благодарит В. С. Ленского за постановку задачи, внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. *Ленский В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 154–158.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
5. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
6. *Ленский В. С., Ленский Э. В.* Трехчленное соотношение общей теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 111–115.

7. *Малый В. И.* Об упрощении функционалов теории упругопластических процессов // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 2. С. 48–53.
8. *Дао Зуй Бик.* О теореме единственности краевой задачи теории пластичности с использованием гипотезы локальной определенности // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 119–124.
9. *Ермаков С. В.* Исследование постановки краевой задачи теории упругопластических процессов средней кривизны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 2. С. 88–92.
10. *Пелешко В. А.* Условия корректности постановки краевой задачи теории пластичности, основанной на трехчленном соотношении // Механика эластомеров. Краснодар: Кубан. ун-т, 1987. С. 18–28.
11. *Неджеску-Клежа С.* О теореме единственности для двухзвенных упругопластических процессов // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 377–383.
12. *Ворович И. И., Красовский Ю. П.* О методе упругих решений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 4. С. 740–743.

Москва

Поступила в редакцию
11.VI.1991