

УДК 539.3:534.1

© 1992 г. Т. И. Белянкова, В. В. Калинин

## О СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ШТАМПА НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

На основании обобщения [1, 2] метода факторизации на интегральные уравнения, ядра которых могут иметь точки ветвления на вещественной оси, развивается метод исследования динамики жесткого штампа, осуществляющего сдвиговые колебания на поверхности предварительно напряженного полупространства. Структура построенного решения позволяет проводить эффективный анализ влияния начальных напряжений на волновой процесс как под штампом, так и вне его. В явном виде показана осцилляция у краев штампа, обусловленная воздействием сдвиговых волн в преднапряженной среде.

Ранее [3–5] в рамках линеаризованной теории распространения упругих волн [6, 7] был развит метод изучения влияния начальных напряжений на волновое поле под штампом и на свободной поверхности среды. В основе метода лежит сведение краевой задачи о колебаниях штампа к интегральному уравнению первого рода, решение которого строилось методом факторизации [8]. Однако предложенный метод не учитывал наличия у ядра интегрального уравнения характерных в контактных задачах для полупространства точек ветвления на вещественной оси. Для низких частот колебаний штампа влиянием точек ветвления можно пренебречь [3–5, 8], но для достаточно высоких частот учет точек ветвления необходим [9].

**1. Краевая задача о возбуждении преднапряженной среды.** Введем лагранжеву систему координат  $x_1, x_2, x_3$ , связанную с натуральным (недеформированным) состоянием тела, занимающего область  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, x_3 \leq 0$ . При исследовании процессов в предварительно напряженном теле различают три его состояния (конфигурации) [6, 7, 10]: натуральное (ненапряженное), начально-деформированное и возмущенное состояние в данный момент времени.

Краевая задача о возбуждении преднапряженной среды осциллирующей нагрузкой, распределенной в области  $\Omega$ , описывается линеаризованными уравнениями движения с граничными условиями [6, 7, 10]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \rho \partial^2 \underline{\underline{\mathbf{u}}} / \partial t^2, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\Sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^\circ + \underline{\underline{\Sigma}}^\circ \cdot \nabla \underline{\underline{\mathbf{u}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{n}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{f}}}(x_1, x_2), & x_3 = 0, x_1, x_2 \in \Omega \\ 0, & x_3 = 0, x_1, x_2 \notin \Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\nabla$  — оператор Гамильтона, определенный в координатах натуральной конфигурации,  $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$  — внешняя нормаль к поверхности  $x_3=0$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$  — заданный вектор напряжений,  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$  — вектор перемещений произвольной точки среды в возмущенной конфигурации,  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^\circ$  — градиент деформации места, характеризующий в данном случае начально-деформированное состояние,  $\underline{\underline{\Sigma}}^*$  — тензор обобщенных напряжений [6, 7] (Лагранжа [7], Кирхгофа [10]), определяющий закон состояния в теле с начальными напряжения-

ми,  $\underline{\Sigma}^\circ$  — тензор начальных напряжений [7, 10]

$$\underline{\Sigma}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W^\circ}{\partial \underline{E}^{\circ 2}} \cdot \cdot [\nabla \underline{u} \cdot \underline{C}^{\circ T} + \underline{C}^\circ \cdot \nabla \underline{u}^T], \quad \underline{\Sigma}^\circ = \frac{\partial W^\circ}{\partial \underline{E}^\circ} \quad (1.2)$$

$$E_{mn}^\circ = 1/2 [u_{m,n}^\circ + u_{n,m}^\circ + u_{i,m}^\circ u_{i,n}^\circ]$$

где  $\underline{E}^\circ$  — тензор деформации Коши — Грина, индексом  $^\circ$  обозначены величины, относящиеся к начально-деформированному состоянию, дифференцирование по лагранжевым координатам обозначено индексом после запятой,  $W^\circ$  — упругий потенциал, который в данном случае предполагается дважды непрерывно-дифференцируемой функцией. Ниже будем рассматривать [6, 7] среды, имеющие упругий потенциал в виде

$$W = W(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5) \quad (1.3)$$

$B_1 = E_{nn}, B_2 = E_{nm} E_{mn}, B_3 = E_{nm} E_{mi} E_{in}; B_4 = E_{33}, B_5 = E_{3n} E_{n3}, n = 1, 2$ , где  $B_1,$

$B_2, B_3$  — алгебраические инварианты тензора деформации.

**2. Решение краевой задачи о сдвиговых колебаниях преднапряженной гиперупругой среды.** Соотношения (1.1), (1.2) описывают краевую задачу о возбуждении начально-деформированной среды в самом общем случае безотносительно к виду начального напряженного состояния, типа поверхностной нагрузки и формы упругого потенциала.

При однородной начальной деформации вида

$$u_n^\circ = \delta_{in} (\lambda_i - 1) x_i, \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3$$

выражения (1.1), (1.2) значительно упрощаются [6, 7]. В этом случае краевую задачу о возбуждении можно записать в виде [6, 7] ( $\delta_{in}$  — символ Кронекера)

$$A_2 u_{2,11} + A_1 u_{2,33} - \rho u_2'' = 0$$

$$A_1 u_{2,3} = \begin{cases} q(x_1), & x_1 \in [-a, a] \\ 0, & x_1 \notin [-a, a] \end{cases} \quad (2.1)$$

$$A_1 = \lambda_2^2 \mu_{32} + \sigma_{33}^{\circ*}, \quad A_2 = \lambda_2^2 \mu_{12} + \sigma_{11}^{\circ*}$$

$$\mu_{in} = \left[ \frac{\partial}{\partial B_2^\circ} + 3/4 (\tau_i + \tau_n) \frac{\partial}{\partial B_3^\circ} + 1/2 (\delta_{i1} \delta_{n3} + \delta_{i3} \delta_{n1} + \delta_{i2} \delta_{n3} + \delta_{i3} \delta_{n2}) \frac{\partial}{\partial B_4^\circ} \right] W^\circ, \quad \tau_n = \lambda_n^2 - 1 \quad (2.2)$$

$$\sigma_{in}^{\circ*} = \delta_{in} \left[ \frac{\partial}{\partial B_1^\circ} + \tau_n \frac{\partial}{\partial B_2^\circ} + 3/4 \tau_n^2 \frac{\partial}{\partial B_3^\circ} + \delta_{n3} \frac{\partial}{\partial B_4^\circ} \right] W^\circ$$

Используя методы операционного исчисления и принцип предельного поглощения, решение краевой задачи (2.1) можно записать в безразмерном виде

$$u_2'(x_1', x_3') = (2\pi)^{-1} \int_{-1}^1 k(x_1' - \xi', x_3') q'(\xi') d\xi' \quad (2.3)$$

$$k(s', x_3') = \int_{\Gamma} K(\alpha, x_3') \exp(ias') d\alpha, \quad K(\alpha, t) = \frac{c \exp(\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} t)}{\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\rho}{A_2}} \omega a, \quad c = \frac{1}{\sqrt{A_1 A_2}}, \quad x_i' = \frac{x_i}{a}, \quad \xi' = \frac{\xi}{a}$$

$$s' = \frac{s}{a}, \quad u' = \frac{u}{a}, \quad q' = \frac{q}{\mu}, \quad A_i' = \frac{A_i}{\mu}$$

Далее штрихи опускаем. Контур  $\Gamma$  совпадает с вещественной осью и отклоняется от нее лишь обходя точку  $-\kappa$  сверху, а  $\kappa$  — снизу. Тем самым достигается единственность решения задачи [8].

**3. Интегральное уравнение задачи о сдвиговых колебаниях штампа.** Выражения (2.3) определяют перемещения произвольной точки среды под действием заданной на отрезке  $[-1, 1]$  нагрузки  $q(\xi)$ . В случае задачи о сдвиговых колебаниях штампа на поверхности полупространства эти выражения можно переписать в виде

$$u_2(x_1, 0) = (2\pi)^{-1} \int_{-1}^1 k_0(x_1 - \xi) q(\xi) d\xi, \quad |x_1| \leq 1 \quad (3.1)$$

$$k_0(s) = \int_{\Gamma} K_0(\alpha) \exp(ias) d\alpha, \quad K_0(\alpha) = \frac{c}{\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}} \quad (3.2)$$

Выражение (3.1) представляет собой интегральное уравнение первого рода относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений  $q(\xi)$ . Видно, что функция  $K_0(\alpha)$  — аналитическая в комплексной плоскости с двумя не переходящими один в другой разрезами, проведенными от точек ветвления  $\pm\kappa$  строго в первом и третьем квадрантах. При  $\alpha \rightarrow \infty$  имеем  $|\alpha|K_0(\alpha) \approx c + O(\alpha^{-2})$ .

В силу описанных выше свойств  $K_0(\alpha)$  к решению интегрального уравнения (3.1) можно применить ряд численных и асимптотических методов, позволяющих строить приближенное решение задачи (например, [9, 11, 12]). В соответствии с предложенным ранее [1, 2] подходом представим функцию  $K_0(\alpha)$  в виде

$$K_0(\alpha) = K_+ K_-, \quad K_{\pm}(\alpha) = \frac{c_{\pm}}{\sqrt{\alpha \mp \kappa}}, \quad c_{\pm} = \sqrt{c} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.3)$$

Постоянные  $c_+$  и  $c_-$  выбраны таким образом, чтобы соблюдалось условие

$$K_+(-\alpha) = K_-(\alpha) \quad (3.4)$$

При учете отмеченных выше свойств функции  $K_0(\alpha)$  уравнение (3.1) после ряда преобразований сведем к системе интегральных уравнений второго рода следующего вида (берутся последовательно верхние, затем нижние знаки)

$$X(z, \pm) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} X(\alpha, \pm) P(\alpha, z) d\alpha + \alpha(z, \pm), \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (3.5)$$

$$P(\alpha, z) = K_-(\alpha) e^{-2i\alpha} [K_+(\alpha) (\alpha + z)]^{-1}$$

$$\alpha(z, \pm) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\alpha) \pm F(-\alpha)}{K_+(\alpha)} e^{i\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha + z}$$

$$X(z, \pm) = [\Phi^+(z) \pm \Phi^-(z)] e^{iz} [K_-(z)]^{-1}$$

относительно вспомогательных неизвестных  $X(z, \pm)$ , являющихся комбинациями  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$ , — преобразований Фурье функций, представляющих собой продолжения правой части уравнения (3.1) соответственно в область  $x > 1$  ( $\varphi^+(x)$ ) и  $x < -1$  ( $\varphi^-(x)$ ),  $F(\alpha)$  — преобразование Фурье функции  $f(x)$ .

Контур  $\Gamma_1$  лежит строго выше  $\Gamma$ , но не выходит из полосы регулярности, являющейся некоторой окрестностью контура  $\Gamma$ . При этом решение интегрального уравнения (3.1) определяется формулой [1, 2, 8]

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [F(u) + \Phi^+(u) + \Phi^-(u)] e^{-iux} [K(u)]^{-1} du, \quad x \leq 1 \quad (3.6)$$

$$\Phi^\pm(u) = \frac{1}{2} [X(\mp u, +) \pm X(\mp u, -)] K_\pm(u) e^{\pm iu}$$

Поведение свободной поверхности вне штампа определяется выражением

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \Phi^\pm(u) e^{-iux} du, \quad \pm x > 1 \quad (3.7)$$

Для построения решения системы (3.5) продеформируем контур  $\Gamma_1$  в нижней полуплоскости (в области регулярности функций  $K_-(\alpha)$ ,  $X(\alpha, \pm)$ ) так, чтобы он обходил разрез от точки ветвления  $-x$  до бесконечно удаленной точки параллельно мнимой оси (от  $-x - i\infty$  до  $-x$  слева от разреза и от  $-x$  до  $-x - i\infty$  — справа от разреза). Представляя интегралы по левому и правому берегам разреза в виде суммы и учитывая связь между значениями  $K_+(\alpha)$  на этих берегах, систему (3.5) представим в виде

$$X(z, \pm) = \pm \sum_{k=1}^N X(z_k, \pm) \frac{r_k}{z - z_k} + \alpha(z, \pm) + O(\exp(2iz_N)), \quad \text{Im } z \leq 0 \quad (3.8)$$

$$r_k = \frac{1}{\pi i} \frac{K_-(-z_k)}{K_+(-z_k)} \exp(2iz_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_{k-1} - z_k$$

где  $-z_k = -x - it_k$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) — точки, располагающиеся на берегах разреза  $[-x, -x - i\infty]$ . Тем самым систему (3.5) свели к конечной системе алгебраических уравнений (3.8), решение которой представляется следующим образом:

$$X(z, \pm) = \pm \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{z - z_k} \left[ \sum_{l=1}^N B_{kl} \pm \alpha(z_l, \pm) \right] + \alpha(z, \pm) \quad (3.9)$$

где  $B_{kl}$  — элементы матрицы, обратной матрице вида

$$A = (\delta_{lk} - r_k / (z_l + z_k))$$

При помощи формул (3.6), (3.7) функции  $q(x)$  и  $\varphi^+(x)$ ,  $\varphi^-(x)$  легко восстанавливаются.

Рассмотрим случай

$$f(x) = e^{i\eta x}, \quad |x| \leq 1 \quad (3.10)$$

Следуя [8], продолжим эту функцию на интервалы  $x > 1$  и  $x < -1$ . Тем самым перейдем к новым функциям

$$\varphi_1^+(x) = \varphi^+(x) - e^{i\eta x}, \quad x > 1, \quad \varphi_1^-(x) = \varphi^-(x) - e^{i\eta x}, \quad x < -1 \quad (3.11)$$

Тогда участвующие в правых частях уравнений (3.5) функции  $\alpha(z, \pm)$  представляются в виде

$$\alpha(z, \pm) = i \left[ \frac{e^{i\eta}}{K_-(\eta)(z - \eta)} \pm \frac{e^{-i\eta}}{K_+(\eta)(z + \eta)} \right] \quad (3.12)$$

При учете соотношений (3.9), (3.12), применяя к равенствам (3.6), (3.7) формулы операционного исчисления [13], получим

$$q(x) = -\frac{e^{i\eta x}}{K_0(\eta)} + S^+(\eta, 1 - x) + S^-(\eta, 1 + x), \quad |x| \leq 1 \quad (3.13)$$

$$S^\pm(\eta, t) = \frac{e^{\pm i\eta(1-t)}}{K_0(\eta)} \operatorname{erf} \sqrt{-i(x \pm \eta)t} + \frac{e^{ixt}}{\sqrt{\pi t}} R^\pm + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N \frac{e^{-iz_k t}}{K_+(z_k)} P_k^\pm(t) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi^\pm(x) = & e^{i\eta x} [1 - \operatorname{erf} \sqrt{-i(x - \eta)(x \mp 1)}] + \\ & + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N K_-(z_k) e^{iz_k(x \mp 1)} S_k^\pm(x \mp 1), \quad \pm x > 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$R^\pm = \frac{e^{i\eta}}{K_+(\eta)} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N b_k^\pm$$

$$P_k^\pm(t) = b_k^\pm (1 - \operatorname{erf} \sqrt{-i(x + z_k)t}) \quad (3.16)$$

$$S_k^\pm(t) = b_k^\pm \operatorname{erf} \sqrt{-i(x + z_k)t}$$

$$b_k^\pm = r_k \sum_{l=1}^N [B_{kl}^+ \alpha(-z_l, +) \mp B_{kl}^- \alpha(-z_l, -)]$$

Из формул (3.13), (3.14) видно, что начальные напряжения влияют на особенность, которая имеет осциллирующий характер. Если учесть множитель  $\exp(-i\omega t)$  (рассматривается установившийся процесс), то видно, что под штампом от его краев движутся быстро затухающие волны, скорость которых равна скорости сдвиговых волн в преднапряженной среде, определяемой начальными напряжениями. Аналогично на свободной поверхности (выражения (3.15)) обнаруживаются быстро затухающие волны, также имеющие скорость сдвиговых волн.

4. Случай плоского штампа. В качестве примера рассмотрим задачу о сдвиговых колебаниях плоского штампа (в (3.10) полагаем  $\eta=0$ ). Из формул (3.12)–(3.15) следует

$$q(x) = q_0(x) + q_1(x) + q_2(x), \quad |x| \leq 1$$

$$\varphi^\pm(x) = R(x \mp 1), \quad \pm x > 1$$

$$q_0(x) = -i\kappa [-1 + L(1-x) + L(1+x)]$$

(4.1)

$$q_m(x) = M_m(1-x) + M_m(1+x), \quad m=1, 2$$

$$R(t) = 1 - \operatorname{erf} \sqrt{-i\kappa t} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N K_-(z_k) S_k^+(t) e^{iz_k t}$$

$$L(t) = \operatorname{erf} \sqrt{-i\kappa t} + \frac{1}{\sqrt{-i\kappa}} \frac{e^{i\kappa t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$M_1(t) = -\frac{i}{2} \sum_{k=1}^N b_k \frac{e^{i\kappa t}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$M_2(t) = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N b_k \sqrt{-i(z_k - \kappa)} e^{-iz_k t} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{-i(\kappa + z_k)t})$$

$$b_k = r_k \sum_{l=1}^N B_{kl}^+(-z_l, +)$$

Формулы (4.1) достаточно наглядно представляют структуру волнового поля как под штампом, так и на свободной поверхности.

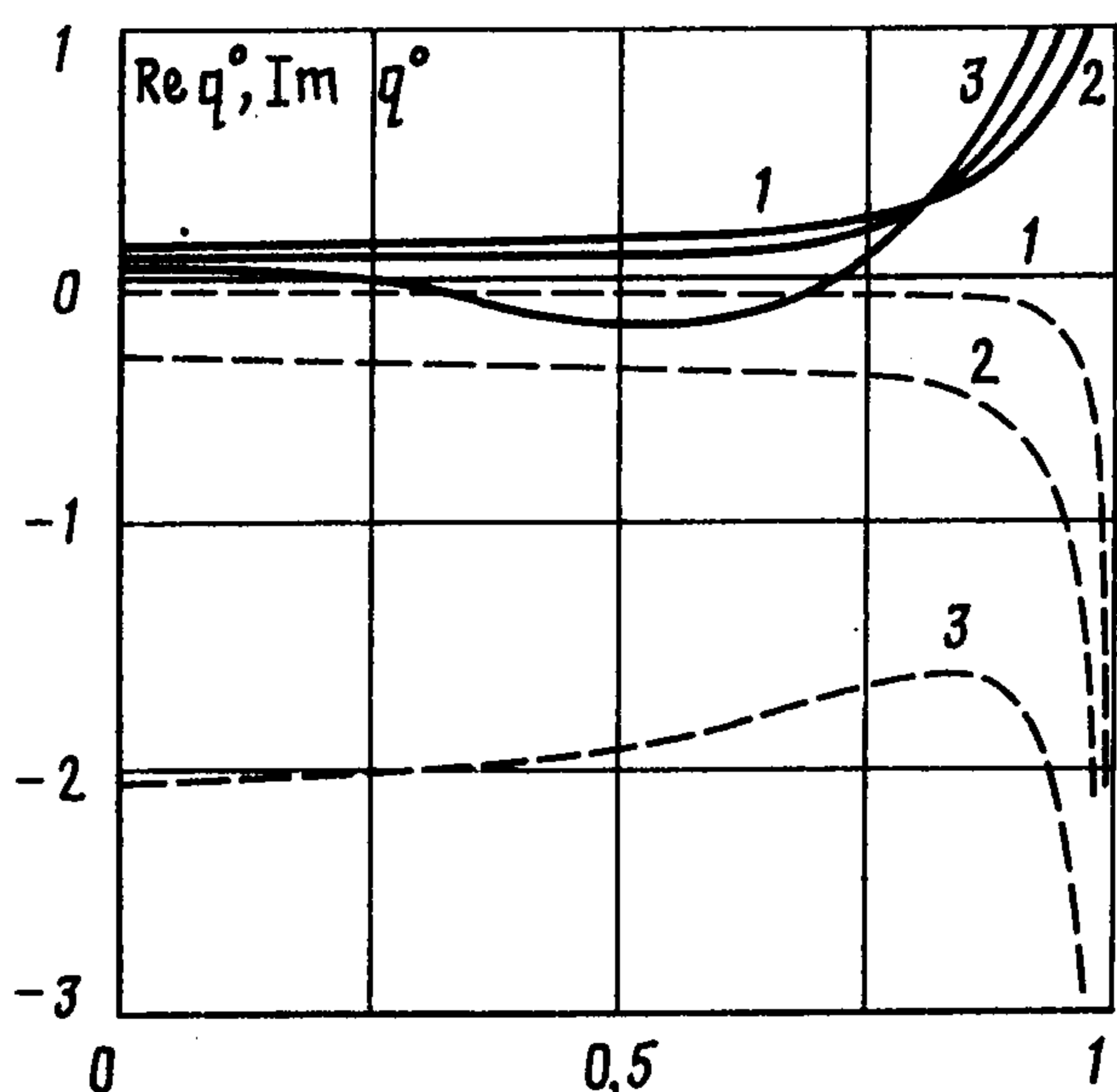
Амплитудное значение реактивной силы, действующей на штамп со стороны полупространства, имеет вид

$$P = \int_{-1}^1 q(x) dx = P_0 + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{z_k} [-\sqrt{-i\kappa} \operatorname{erf} \sqrt{-2i\kappa} + \sqrt{-i(z_k + \kappa)} (1 - e^{-2iz_k} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{-2i(\kappa + z_k)}))] \quad (4.2)$$

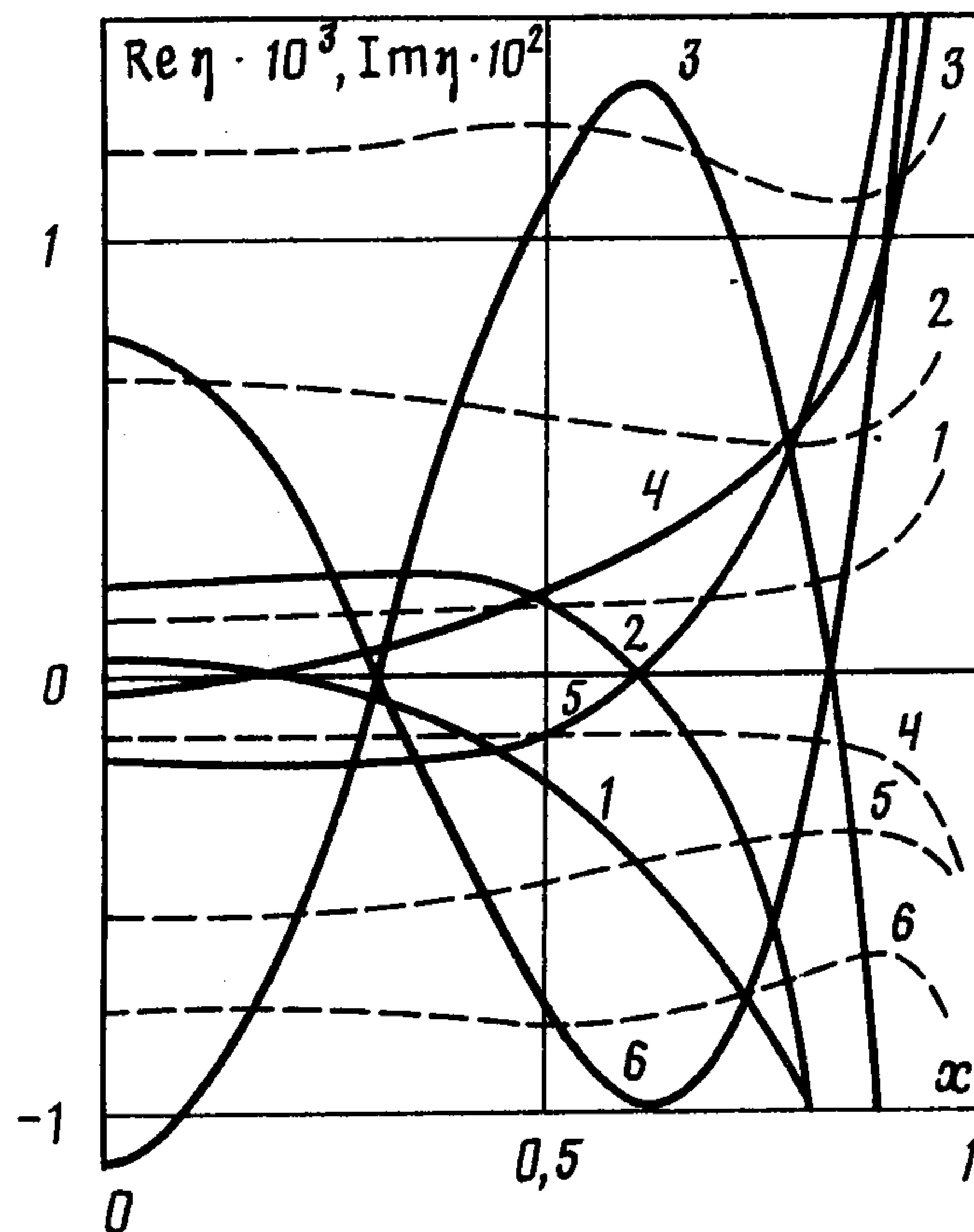
$$P_0 = 2i\kappa + (1 - 4i\kappa) \operatorname{erf} \sqrt{-2i\kappa} + 2\sqrt{-2i\kappa/\pi} \exp(2i\kappa)$$

Параметр  $\kappa$  связан с начальной деформацией ( $\kappa = \omega a (\rho/A_2)^{1/2}$ ), поэтому начальные напряжения непосредственно влияют как на характер волнового поля, так и на равнодействующую контактных напряжений. Зная, например, поведение коэффициента  $A_2$ , при помощи выражений (4.1), (4.2) можно достаточно просто анализировать особенности взаимодействия штампа с преднапряженной средой. В частности, как показали вычисления, для большинства материалов [10] положительная начальная деформация (растяжение) приводит к уменьшению  $A_2$ , отрицательная начальная деформация — к увеличению  $A_2$ . Тем самым начальное сжатие среды приводит к увеличению осцилляций, растяжение — к уменьшению. Отметим, что в отсутствие начальных напряжений ( $A_2 = 1$ ) вырожденная составляющая контактных напряжений  $q_0(x)$ , а также составляющая  $P_0$  реакции среды совпадает с асимптотическим решением, полученным в [12] для больших частот колебаний.

5. Численный анализ. Формулы (4.1), (4.2) построены безотносительно к виду начального напряженного состояния, а также к свойствам и форме закона состояния материала среды. Для проведения дальнейших исследований необходимо конкрети-



Фиг. 1



Фиг. 2

зировать свойства среды. С этой целью будем полагать, что материал среды является сжимаемым, первоначально изотропным, имеющим упругий потенциал. В качестве последнего используем, например, потенциал в форме Мурнагана [6, 7]

$$W^0 = \frac{1}{2}\lambda B_1^0 + \mu B_2^0 + \frac{1}{3}a B_1^0 + b B_1^0 B_2^0 + \frac{1}{3}c B_3^0 \quad (5.1)$$

$\lambda, \mu$  — постоянные Ламе,  $a, b, c$  — постоянные третьего порядка. Полагая начальную деформацию однородной ( $\lambda_i = \text{const}$ ) из (2.2) при учете (5.1) получаем

$$\begin{aligned} \mu_{ik} &= \mu + b B_1^0 + \frac{1}{4}c(r_i + r_k) \\ \sigma_{ii}^0 &= \lambda B_1^0 + a B_1^0 + b B_2^0 + r_i(\mu + b B_1^0) + \frac{1}{4}c r_i^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$B_1^0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 r_n, \quad B_2^0 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 r_n^2, \quad B_3^0 = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^3 r_n^3, \quad r_n = \lambda_n^2 - 1$$

Положим, что в рассматриваемой задаче начальное напряженное состояние определяется условием

$$\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = 0 \quad (5.3)$$

Как показал численный анализ, распределение контактных напряжений и поведение свободной поверхности, просчитанное по формулам (4.1), (4.2) при отсутствии начальной деформации носит обычный характер.

Для численных расчетов был использован материал (сталь 35ХГСА [7, 10]) со следующими параметрами:  $\rho = 7,748 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 1,1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 0,804 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $a = -7,09 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $b = 0,77 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c = -8,04 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>.

На фиг. 1 приведены графики функций ( $q^0(x) = q(x)$  в отсутствие начальной деформации среды)  $\text{Re } q^0(x)$  (сплошные линии) и  $\text{Im } q^0(x)$  (штриховые линии), для различных значений частоты колебаний штампа (кривые 1–3 соответствуют значениям параметра  $\chi = 0,03; 0,3; 1,55$ ). Видно, что на малой частоте ( $\chi = 0,03$ ) распределение контактных напряжений близко к статическому ( $\text{Re } q^0(x)$  — знакопостоянна и значительно превышает  $\text{Im } q^0(x)$ ). На средней частоте ( $\chi = 0,3$ ) качественный характер решения сохраняется, но  $\text{Im } q^0(x)$  резко возрастает и становится больше  $\text{Re } q^0(x)$ . На большой ( $\chi = 1,55$ ) частоте распределение напряжений под штампом приобретает осциллирующий характер за счет того, что длина возбуждаемой краями штампа сдвиговой волны становится меньше его размера. Наложение

на проникающую (постоянную на фиксированной частоте) составляющую  $q_0(x)$  (4.1) осциллирующих членов трансформирует  $\text{Im } q^\circ(x)$  к седлообразному виду.

На фиг. 2 приведены графики функций ( $\eta(x) = q^\circ(x) - q(x)$  — изменение контактных напряжений)  $\text{Re } \eta(x)$  (сплошные кривые) и  $\text{Im } \eta(x)$  (штриховые кривые) в зависимости от величины начальной деформации и частоты (кривые 1–3 соответствуют  $\lambda_1 = 1,005$  (растяжение) для значений  $x = 0,03; 0,3; 1,55$ , кривые 4–6 соответствуют  $\lambda_1 = 0,995$  (сжатие) при тех же частотах). Графики наглядно иллюстрируют особенности влияния начальной деформации на распределение контактных напряжений под штампом при малых, средних и больших значениях частоты. Особый интерес представляют точки (пересечение сплошных кривых 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6), в которых  $\text{Re } q^\circ(x)$  не зависит от начальной деформации. Видно, что их местонахождение и количество существенно зависит от частоты и обусловлено наличием осциллирующих составляющих в  $q(x)$  (4.1). Различие в поведении  $\text{Re } \eta(x)$  и  $\text{Im } \eta(x)$  обусловлено преобладающим влиянием начальной деформации на проникающую (постоянную на фиксированной частоте) составляющую  $q(x)$  (4.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А. К теории пространственных контактных задач для анизотропных сред // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 324–328.
2. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
3. Калинин В. В., Полякова И. Б. О вибрации штампа на поверхности предварительно напряженного полупространства // Прикл. механика. 1982. Т. 18. Вып. 6. С. 22–27.
4. Ананьев И. В., Калинин В. В., Полякова И. Б. О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
5. Калинин В. В., Лысенко И. В., Полякова И. Б. Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 301–308.
6. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 274 с.
7. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. 376 с.; Т. 2. 536 с.
8. Борович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
9. Боев С. И., Сумбаган М. А. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости при высоких частотах колебания // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1039–1043.
10. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
11. Александров В. М., Буряк В. Г. Динамическая смешанная задача деформации чистого сдвига для упругого полупространства // Прикл. механика. 1971. Т. 7. Вып. 4. С. 16–22.
12. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
13. Градштейн И. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1108 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
10.I.1991