

УДК 539.3 : 534.1

© 1992 г. И. В. Дорохов, О. Д. Пряхина, М. Р. Фрейгейт

## О ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ НА СИСТЕМУ, СОСТОЯЩУЮ ИЗ МАССИВНОГО ШТАМПА И СЛОИСТОГО ОСНОВАНИЯ

Рассматривается задача о взаимодействии со слоистой полуограниченной средой жесткого массивного полосового штампа. Контакт осуществляется без трения, нижняя грань слоистого основания жестко закреплена, а на штамп действует вертикальная сила, изменяющаяся в зависимости от времени по заданному закону. Предлагается эффективный метод решения задач такого класса, основанный на сочетании метода фиктивного поглощения, специальной аппроксимации ядра интегрального уравнения и численного обращения преобразования Лапласа. Детально исследуется задача для вязкоупругого пакета из двух слоев для разных видов нагрузки и при различных соотношениях упругих и геометрических параметров. Сделаны замечания о применении упрощенного решения задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о взаимодействии со слоистой полуограниченной средой жесткого полосового штампа массы  $M$  ширины  $2a$ . Предположим, что контакт осуществляется без трения, а на штамп действует вертикальная сила, изменяющаяся в зависимости от времени  $t$  по заданному закону  $P(t)$ .

Воспользуемся дифференциальным уравнением движения твердого тела в безразмерном виде

$$M' \frac{\partial^2 W'}{\partial \tau^2} = P'(\tau) - Q'(\tau), \quad Q'(\tau) = \int_{-1}^1 q'(x, \tau) dx$$

$$M' = \frac{M}{\rho_1 a^2}, \quad \tau = \frac{vt}{a}, \quad v = \left(\frac{\mu_1}{\rho_1}\right)^{1/2}, \quad P' = \frac{P}{\mu_1}, \quad Q' = \frac{Q}{\mu_1}$$

$$q' = \frac{q}{\mu_1}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad z' = \frac{z}{a}, \quad W' = \frac{W}{a}, \quad a' = 1$$

где  $W(\tau)$  — смещение штампа,  $q(x, \tau)$  — контактные напряжения, возникающие в области контакта,  $Q(\tau)$  — реакция основания, далее штрихи над безразмерными величинами опускаем.

Функцию  $q(x, \tau)$  определим, решив динамические уравнения Ламе для среды:

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \text{grad div } \bar{U}^i - \mu_i \text{rot rot } \bar{U}^i = \rho_i \partial^2 \bar{U}^i / \partial \tau^2$$

с граничными условиями смешанного типа и начальными условиями. Здесь  $\bar{U}^i(U_1, U_2)$  — вектор смещений точек среды ( $U_1$  — горизонтальная и  $U_2$  — вертикальная компоненты),  $\lambda_i, \mu_i$  — параметры Ламе,  $\rho_i$  — плотность слоев,  $i$  — номер слоя.

В частности, в случае нестационарного воздействия штампа на упругий пакет из  $N$  слоев с жестко закреплённой нижней гранью ( $0 \leq z \leq h_1 + \dots$

...+ $h_N$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $h_i$  — толщина  $i$ -слоя) граничные условия имеют вид: на поверхности среды при  $z=0$

$$\tau_{xz}^1(x, 0, \tau) = 0, |x| < \infty$$

$$\sigma_{zz}^1(x, 0, \tau) = 0, |x| > 1; U_2^1(x, 0, \tau) = W(\tau), |x| \leq 1$$

условие жесткой заделки при  $z=h_1+\dots+h_N=H$

$$U_1^N(x, H, \tau) = U_2^N(x, H, \tau) = 0$$

условие стыковки слоев при  $z=h_1+\dots+h_i$ , ( $i=1, 2 \dots N-1$ )

$$U_1^i = U_1^{i+1}, \quad U_2^i = U_2^{i+1}, \quad \tau_{xz}^i = \tau_{xz}^{i+1}, \quad \sigma_{zz}^i = \sigma_{zz}^{i+1}$$

В начальный момент времени система находится в покое.

**2. Основные уравнения.** Применим преобразование Лапласа по времени  $\tau$  и преобразование Фурье по координате  $x$ . Указанная задача сводится к системе дифференциального и интегрального уравнений:

$$Mp^2W^*(p) = P^*(p) - Q^*(p) \quad (2.1)$$

$$W^*(p) = \int_{-1}^1 k(x-\xi) q^*(\xi, p) d\xi, \quad |x| \leq 1 \quad (2.2)$$

$$k(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, pe^{-i\gamma/2}) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$p$  — параметр преобразования Лапласа,  $\gamma$  — параметр вязкости среды (коэффициент потерь на внутреннее трение в материале основания, при этом упругие постоянные в уравнениях Ламе согласно [1] являются комплексными величинами вида  $\lambda_i e^{i\gamma}$ ,  $\mu_i e^{i\gamma}$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ ).

Отметим, что подынтегральная функция  $K(\alpha, p)$  определяется типом среды и для слоистых сред имеет тот же вид, что и в соответствующих задачах об установившихся колебаниях при замене безразмерной частоты колебаний  $\omega$  на  $ip$  ( $i$  — мнимая единица). При этом функция  $K(\alpha, p)$  имеет асимптотическое поведение  $K(\alpha, p) = c|\alpha|^{-1}$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Свойства функции  $K(\alpha, p)$  описаны в [2].

**3. Построение решения.** Пусть  $q_0(x, p)$  — решение интегрального уравнения (2.2) с единичной правой частью ( $Kq_0=1$ ), тогда  $q^*(x, p) = W^*(p)q_0(x, p)$ . Решение  $q_0(x, p)$  строилось методом фиктивного поглощения [3], который позволяет аналитически выделить особенность контактных давлений на границе штампа. При этом интеграл Фурье от  $q_0(x, p)$  берется в квадратурах. Вид функций  $q_0(x, p)$  для фиксированных значений  $\omega$  ( $\omega=ip$ ) известен [4].

Очевидно, что реакция основания  $Q^*(p)$  связана с преобразованием Фурье  $Q_0(\alpha, p)$  решения  $q_0(x, p)$  соотношением

$$Q^*(p) = W^*(p)Q_0^*(0, p) \equiv W^*(p)Q_0(p) \quad (3.1)$$

Функция  $Q_0(p)$ , построенная методом фиктивного поглощения, имеет

достаточно простой вид ( $B$  — параметр аппроксимации,  $B \gg 1$ )

$$Q_0(p) = K^{-1}(0, p) \left\{ \frac{2aB + 1}{B} - B^{-1/2} \sum_{k=1}^n C_k(p) [F(0, x_k) + F(0, -x_k)] \right\} \quad (3.2)$$

Коэффициенты  $C_k(p)$  определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n C_k(p) [f_1(\alpha, x_k) + f_1(\alpha, -x_k)] = 2 [f_2(\alpha) + f_2(-\alpha)] \quad (3.3)$$

$$\alpha = z_l, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

$$f_1(\alpha, x_k) = (B + i\alpha)^{1/2} e^{i\alpha x_k} F(\alpha, x_k) + (B - i\alpha)^{1/2} e^{-i\alpha x_k} F(-\alpha, -x_k)$$

$$f_2(\alpha) = (i\alpha)^{-1+i\alpha} (B + i\alpha)^{1/2} B^{1/2} \operatorname{erf}[2(B + i\alpha)]^{1/2}$$

$$F(\alpha, x_k) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} H(p_j, p) e^{ip_j(1-x_k)} (B - ip_j)^{-1/2} (p_j + \alpha)^{-1}$$

$$H(\alpha, p) = c^{-1} K(\alpha, p) (\alpha^2 + B^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

$x_k$  — точки, делящие отрезок  $(0, a)$  на  $n$  равных частей,  $p_j, z_k$  — полюса и нули функции  $H(\alpha, p)$ , расположенные в верхней полуплоскости  $\alpha$ .

После подстановки выражений (3.1), (3.2) в (2.1) имеем

$$W^*(p) = P^*(p) (Mp^2 + Q_0(p))^{-1}$$

Для получения окончательного решения необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа

$$W(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} W^*(p) e^{p\tau} dp$$

Из физических условий задачи следует, что подынтегральная функция не имеет корней в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  и интеграл по прямой, параллельной мнимой оси, можно заменить интегралом по мнимой оси, а затем заменой  $p = -i\omega$  интеграл обращения Лапласа сводится к интегралу Фурье

$$W(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} W^*(i\omega) \cos \omega\tau d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} W^*(i\omega) \sin \omega\tau d\omega \quad (3.5)$$

Для вычисления реакции основания  $Q(\tau)$  и нормальных напряжений в области контакта  $q(x, \tau)$  необходимо в (3.5) заменить подынтегральную функцию  $W^*(p)$  на  $W^*(p)Q^*(p)$  и  $W^*(p)q_0^*(x, p)$  соответственно.

Ниже для вычисления интегралов типа (3.5) применяется метод Файлона [5], преимущество которого перед другими способами заключается в быстром обеспечении высокой точности вычисления интегралов от осциллирующих функций.

**4. Специальная аппроксимация ядра.** Согласно методу фиктивного поглощения при построении решения задачи (3.2), (3.3), используется пред-

ставление

$$H(\alpha, p) = \prod_{k=1}^n (\alpha^2 - z_k^2(p)) (\alpha^2 - p_k^2(p))^{-1} \quad (4.1)$$

С этой целью в выражении (3.4) сделаем замену  $t = \alpha^2 / (\alpha^2 + A^2)$ , переводящую отрезок  $[0, \infty]$  в  $[0, 1]$ , где  $A$  — параметр аппроксимации. Согласно теореме Веерштрасса, функцию  $H(A(t/(1-t))^{1/2}, p)$  можно равномерно приблизить многочленом степени  $n$ . В предыдущих работах [3, 4] функция  $H(\alpha, p)$  аппроксимировалась в случае гармонических колебаний для конкретных значений частот полиномами Бернштейна

$$R_n = \sum_{k=0}^n b_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) (1-t)^{n-k} t^k, \quad b_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4.2)$$

которые сохраняют поведение функции  $K(\alpha, p)$  на бесконечности и в нуле. Повышая степень полинома Бернштейна, можно получить точность любого порядка.

Функция  $H(\alpha, p)$  может иметь значительный рост амплитуды в области низких значений  $\alpha$  и монотонно стремится к единице при больших  $\alpha$ . В то же время полиномы Бернштейна имеют коэффициенты, зависящие от аппроксимируемой функции, представленной в  $n+1$  точках на равномерной сетке в  $[0, 1]$ . Переводя сетку разбиения  $[0, 1]$  на  $[0, \infty]$ , может оказаться, что эти точки не учитывают резкий рост амплитуды функции  $H(\alpha, p)$  на некотором отрезке  $[0, \alpha_*]$ . В этом случае полином Бернштейна может давать заметную погрешность. Избавиться от нее можно, увеличивая степень полинома и подбирая произвольный параметр  $A$ . Это ведет к увеличению корней функции в представлении (4.1), что в свою очередь существенно увеличивает время счета при решении системы (3.3) уравнений для определения  $C_k$ .

В данной работе предлагается следующая процедура: функция  $H(\alpha, p)$  аппроксимируется полиномом вида (4.2) с произвольными коэффициентами

$$R_n = \sum_{k=0}^n b_{nk} (1-t)^{n-k} t^k$$

Коэффициенты  $b_{nk}$  определяем методом минимизации функционала

$$J = \sum_{i=1}^m (R_n(t_i) - H(t_i, p))^2$$

в соответствии с которым необходимо выполнение следующих условий:

$$\partial J / \partial b_{nk} = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, n$$

где  $t_i$  — неравномерное разбиение отрезка  $[0, 1]$  на  $m$  точек таким образом, чтобы учесть сложный характер поведения функции  $H$ . В итоге получим систему линейных алгебраических уравнений  $(n+1)$ -го порядка относительно  $b_{nk}$ .

Такой подход позволяет добиться большей точности за счет увеличения числа точек разбиения  $m$ , не изменяя степени аппроксимирующего многочлена  $R_n$ .

**5. Численный анализ.** Численный анализ проводился для полосового штампа, контактирующего без трения с пакетом из двух слоев, жестко сцепленным с недеформируемым основанием.

Поведение системы исследовалось в зависимости от вязкости среды, массы штампа, геометрических и упругих параметров системы. Варьировались толщины слоев, их жесткости и плотности. Исследовалось влияние типа нагрузки на смещения штампа.

Отметим, что для слоистых полуограниченных сред существует критическая безразмерная частота отпирания волновода  $\omega_*$ , начиная с которой в системе происходит распространение незатухающих колебаний, уносящих энергию на бесконечность. При этом  $\omega_* \neq 0$  в случае жесткого сцепления среды с недеформируемым основанием.

Для пакета из двух слоев  $\omega_*$  — наименьший корень трансцендентного уравнения

$$(GR)^{1/2} \operatorname{tg}(h_1 \omega \varepsilon_1^{1/2}) \operatorname{tg}(h_2 \omega (\varepsilon_2 G/R)^{1/2}) - 1 = 0$$

$$\varepsilon_k = (1 - 2\nu_k)/(2 - 2\nu_k), \quad G = \mu_1/\mu_2, \quad R = \rho_1/\rho_2$$

$\nu_k$  — коэффициент Пуассона  $k$ -слоя,  $k=1, 2$ .

Для слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием  $\omega_* = \pi/(2h)$ . Можно убедиться в том, что чем тоньше волновод и шире штамп, тем больше значение  $\omega_*$  и больше интервал  $(0, \omega_*)$ , где функция  $Q_0$  вещественна.

Известно [6], что при гармонических колебаниях системы массивный штамп — волновод начиная с некоторого значения массы  $M > M_*$  имеет место на интервале  $(0, \omega_*)$  изолированный В-резонанс, на котором функция  $V = (-M\omega^2 + Q_0(i\omega))^{-1}$  обращается в бесконечность.

При введении вязкости  $\gamma$  в среду волновода особенность на вещественной оси исчезает, останется лишь ограниченный рост амплитуды  $V$  при частоте, близкой к резонансной. Увеличение массы штампа ведет к уменьшению значения  $\omega_p$  и увеличению амплитуды функции  $V$ .

Все вышеописанное нужно учитывать при численной реализации задачи.

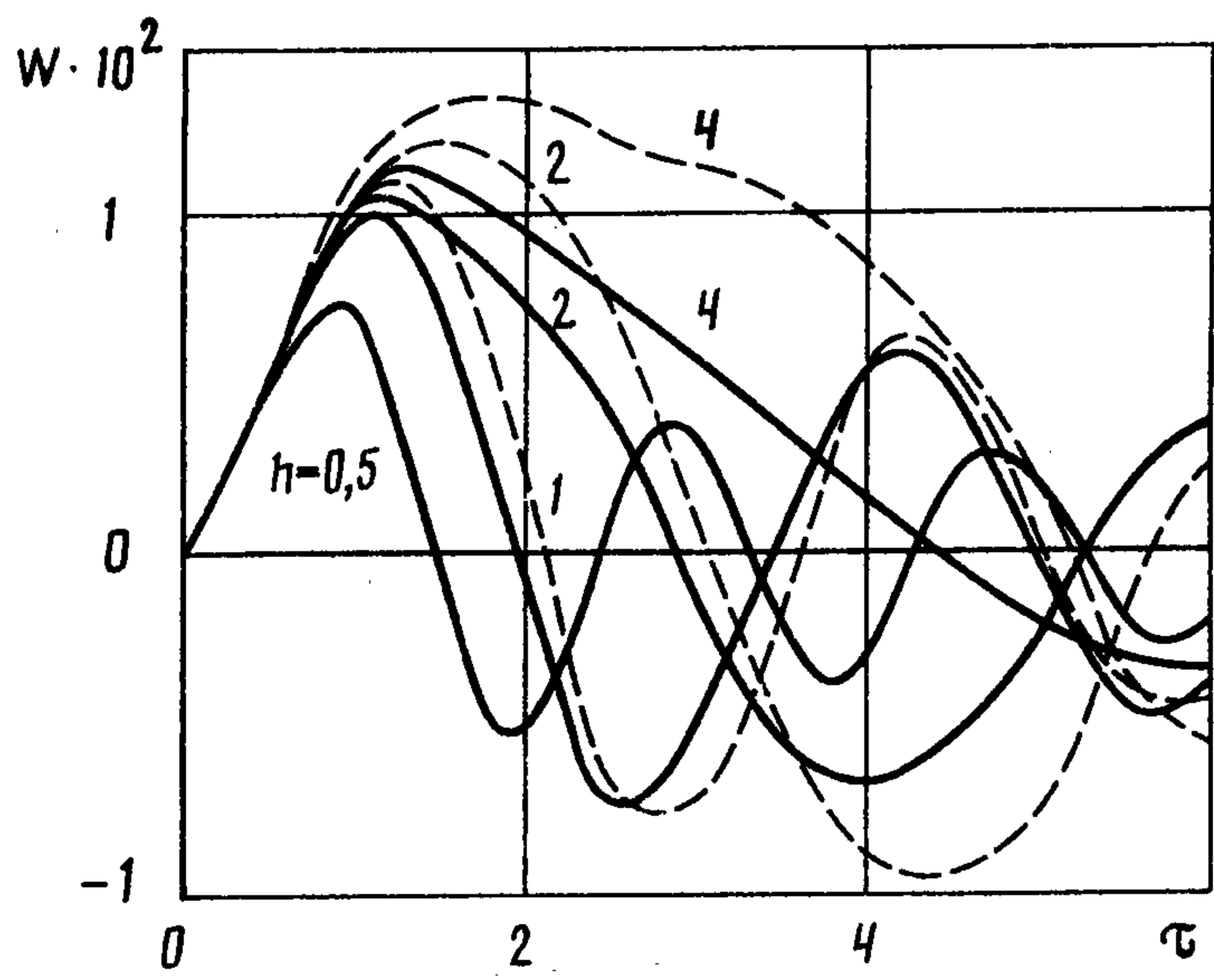
Представляет интерес поведение штампа при увеличении толщины пакета при одинаковых упругих параметрах ( $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ ), т. е. для одного слоя. Толщина  $h$  изменялась в пределах от 0,2 до 12. Расчеты проводились как с учетом, так и без учета второго слагаемого в формуле (3.2). Установлено, что при толщинах, меньших ширины штампа ( $h < 1$ ), влияние второго слагаемого в (3.2) на перемещение штампа незначительно. Следовательно, расчет можно производить без учета второго слагаемого, что существенно сокращает время счета. На фиг. 1 представлены зависимости  $W(\tau)$  при нагрузке  $P(\tau) = \tau e^{-\tau}$ ,  $M=1$ ,  $\gamma/2=0,2$  при различных значениях  $h$ . Штриховые линии соответствуют расчетам без учета второго слагаемого в (3.2).

Начиная с толщины штампа  $h \geq 1$  учет второго слагаемого необходим. В этих случаях сначала появляются количественные, а затем и качественные изменения в поведении штампа.

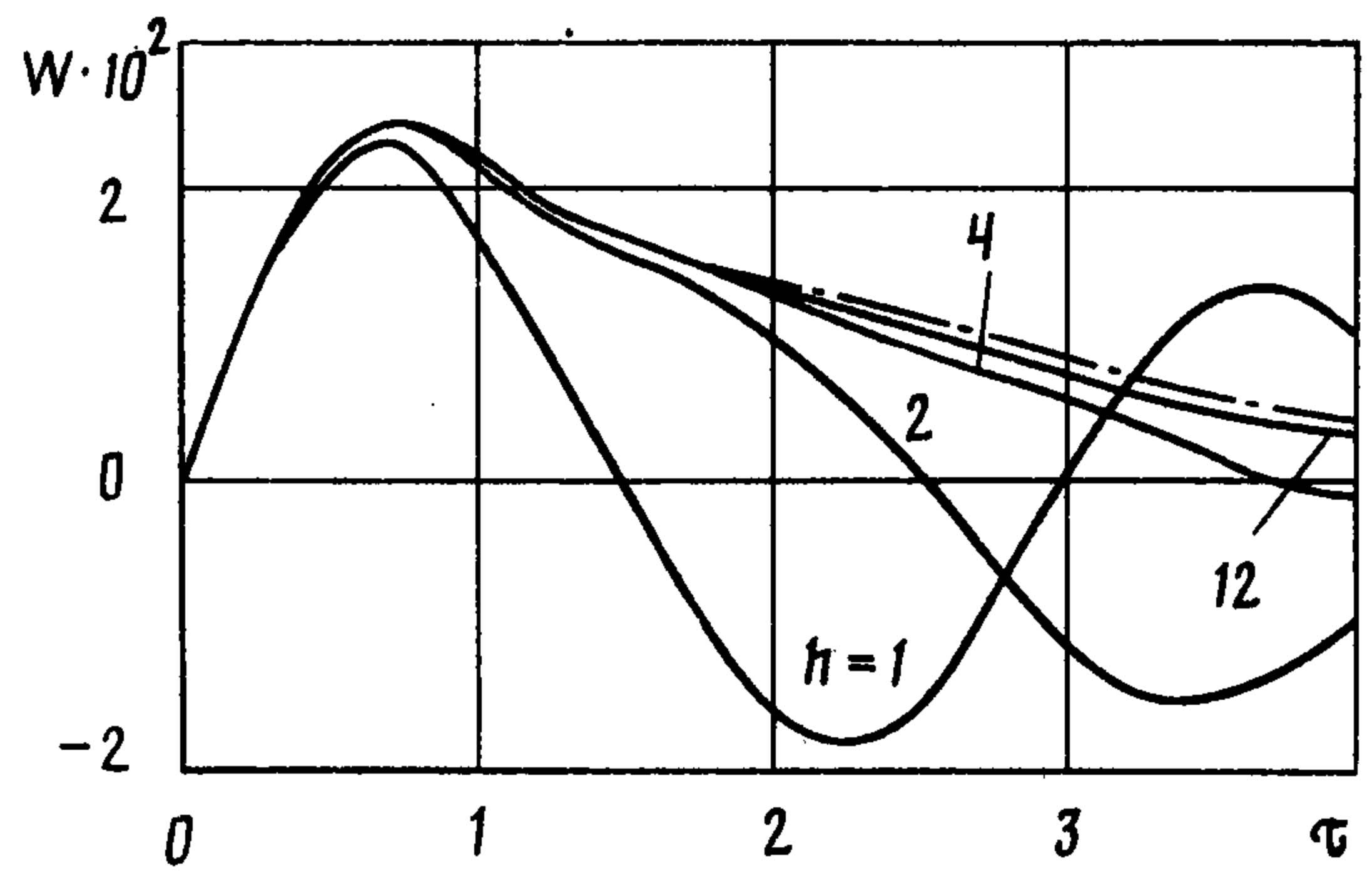
При увеличении толщины слоя увеличиваются также максимальные перемещения штампа и период его колебаний. Последнее связано с увеличением времени прихода волны, отраженной от жесткого основания. Для слоев разной толщины, перемещения массивных штампов будут иметь одинаковые значения (при равном нагружении) до момента прихода отраженной волны в более тонком слое. Следует особо отметить, что для «толстых» слоев перемещения штампа можно рассчитывать по более простой модели среды — модели полупространства.

На фиг. 2 показана зависимость  $W(\tau)$  при нагружении штампа единичной массой силой

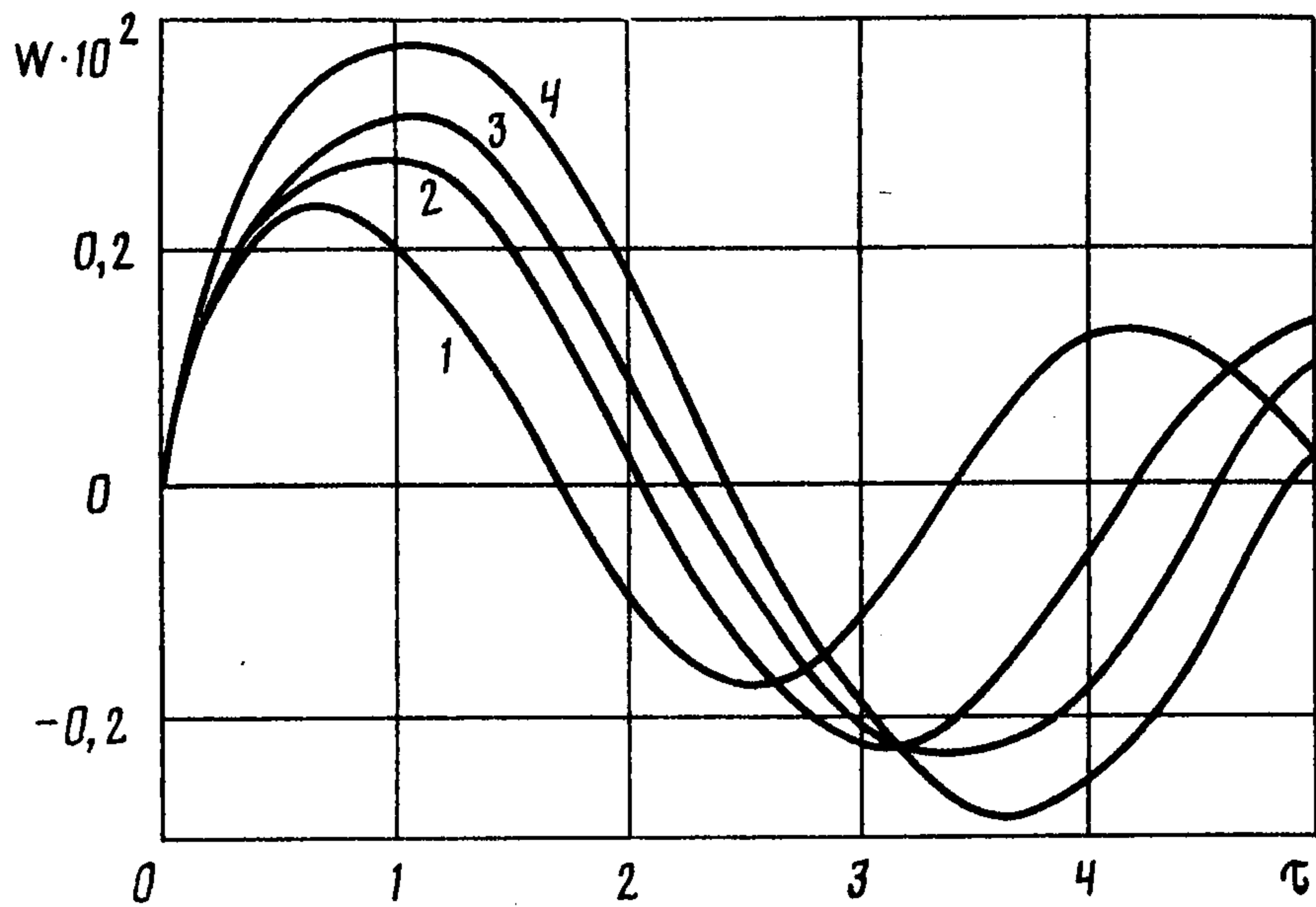
$$P(\tau) = H(\tau) - H(\tau - 0,1) \quad (5.1)$$



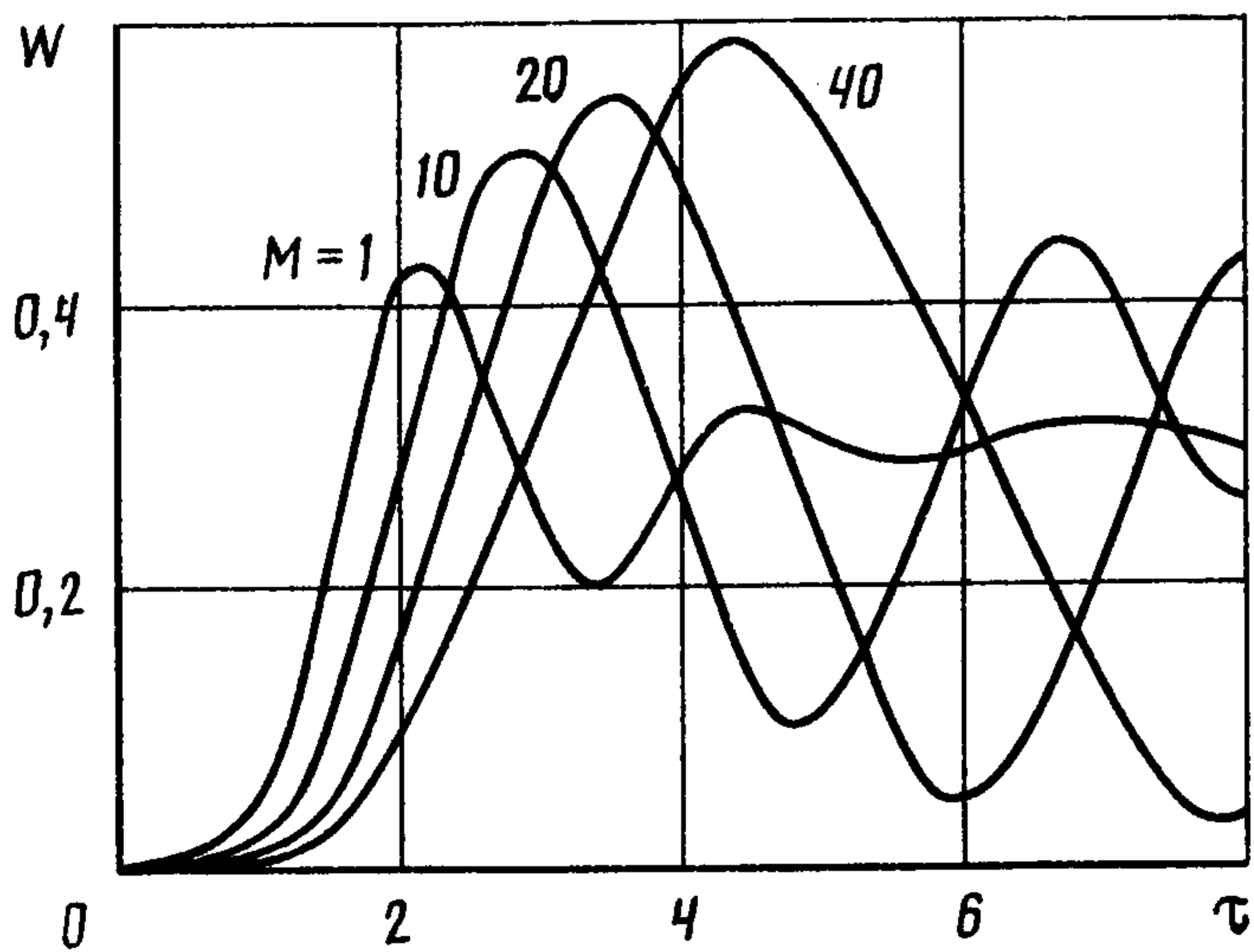
Фиг. 1



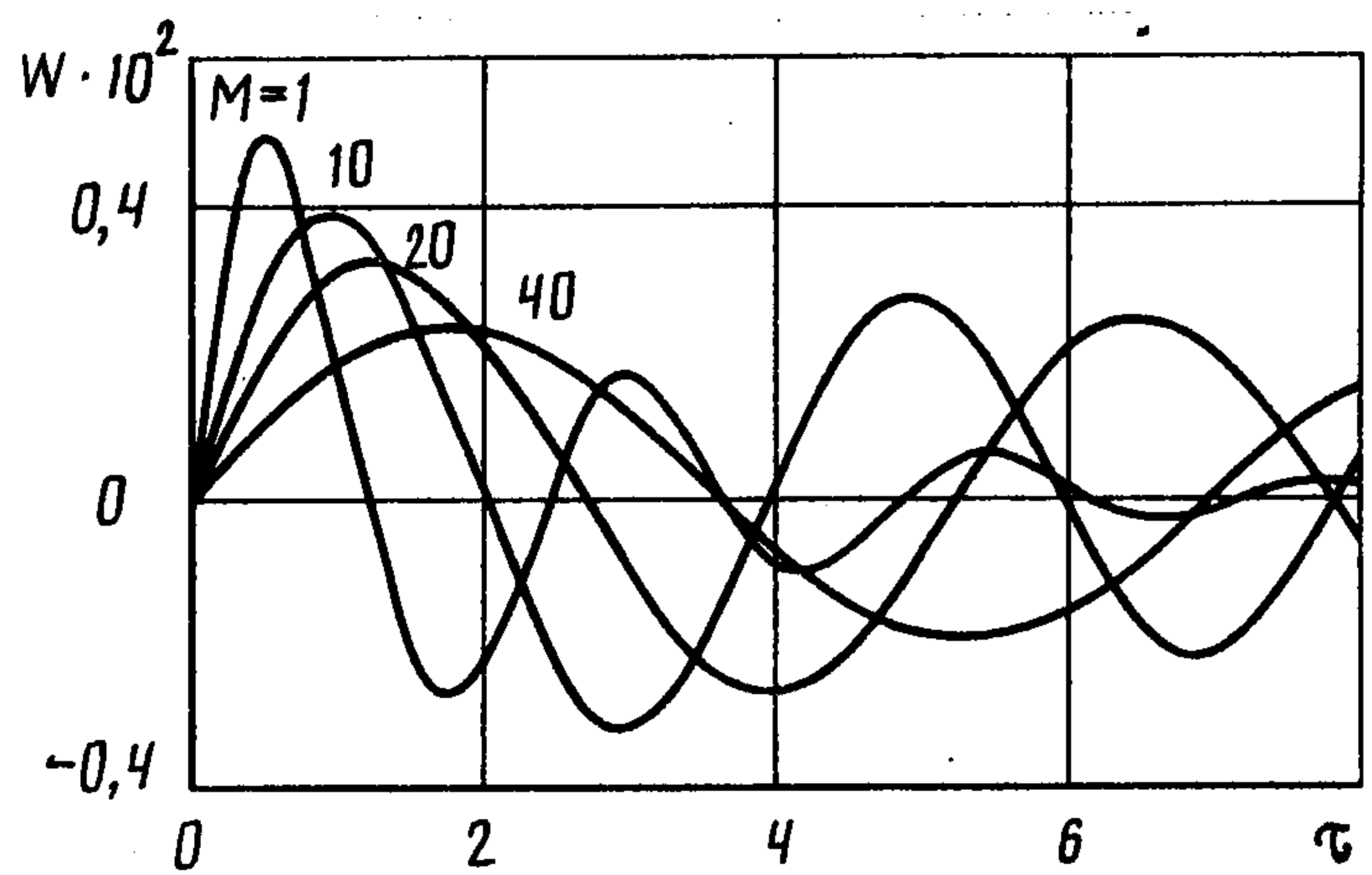
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Штрихпунктирная кривая соответствует случаю полупространства.

Наряду с изучением влияния толщины пакета слоев на перемещения штампа исследовалось влияние упругих характеристик. Рассматривался пакет из мягкого слоя на жестком и жесткого на мягком слое. Расчеты показали, что в первом случае задача близка к уже рассмотренной задаче о слое с параметрами мягкого слоя. Качественная картина существенно изменяется во втором случае (жесткий слой на мягком). Это связано с тем, что волна, отраженная от границы слоев, возвращается

к штампу в фазе, вызывая увеличение перемещений штампа. Этот эффект тем ярче выражен, чем толще мягкий подстилающий слой. Фиг. 3 иллюстрирует поведение штампа единичной массы на пакете из двух слоев с параметрами:  $R=1,09$ ,  $G=2,72$ , силой  $P(\tau)=H(\tau)-H(\tau-0,01)$ . Кривые 1-4 соответствуют следующим парам значений  $(h_1; h_2)$ : (0,05; 0,45), (0,2; 0,3), (0,3; 0,2), (0,45; 0,05).

Изменение величины затухания  $\gamma$  в среде не влияет на период колебания штампа, при заметной разнице в амплитудных характеристиках.

Увеличение массы штампа ведет к увеличению периода колебаний. Амплитуда в этом случае зависит от продолжительности действия нагрузки. На фиг. 4 изображены перемещения штампа при  $a=5$  на слое единичной толщины (все длины отнесены к  $h$ ). Нагрузка  $P(\tau)=H(\tau-1)$ . Фиг. 5 иллюстрирует поведение штампов таких же масс при нагрузке (5.1).

Авторы благодарят И. И. Воровича за обсуждение работы и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 253 с.
4. Бабешко В. А., Прякина О. Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477-484.
5. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
6. Ворович Е. И., Прякина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 128-133.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
16.VII.1991