Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Л. М. Зубов, А. Н. Рудев

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ ПРОВЕРКИ УСЛОВИЯ АДАМАРА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Предлагается новый эффективный критерий выполнимости условия Адамара в нелинейно-упругом сжимаемом теле. Проверка условия Адамара сводится к анализу системы неравенств простой структуры, что позволяет исследовать его выполнимость аналитически и по единой методике для всех сжимаемых материалов.

В случае изотропного несжимаемого материала было установлено [1], что условие Адамара, представляющее собой требование вещественности скоростей распространения плоских волн малой амплитуды в однородно напряженной упругой среде [2, 3], эквивалентно системе 9 элементарных неравенств. Для сжимаемой среды был указан [1] лишь способ получения элементарных неравенств, равносильных условию Адамара, но из-за сложной структуры некоторых из них конечная система в явном виде не выписана. Тем не менее, следуя разработанной [1] методике, можно получить 12 элементарных неравенств

$$\alpha_k \geqslant 0, \quad \beta_k \geqslant 0, \quad \gamma_k^{\pm} + \sqrt{\beta_i \beta_j} \geqslant 0 \tag{0.1}$$

в которых параметры α_k, β_k, $\gamma_k^{\pm}$ $(k=1, 2, 3)$ выражаются через упругий потенциал П, и 4 импликации вида

$$\bigwedge_{n=1}^{6} (\delta_{mn} \geqslant 0) \Rightarrow \Delta_m \geqslant 0 \quad (m=0, 1, 2, 3) \tag{0.2}$$

Под i, j, k в (0.1) понимается произвольная перестановка индексов 1, 2, 3.

Символ $\wedge$ означает конъюнкцию высказываний, а δ_{mn}, Δ_m $(m=0, 1, 2, 3;\ n=1, \ldots 6)$ – соответственно алгебраические дополнения и определители матриц

$$a_0 = \begin{Vmatrix} \beta_1 & \gamma_3^+ & \gamma_2^+ \\ \gamma_3^+ & \beta_2 & \gamma_1^+ \\ \gamma_2^+ & \gamma_1^+ & \beta_3 \end{Vmatrix}, \quad a_1 = \begin{Vmatrix} \beta_1 & \gamma_3^- & \gamma_2^- \\ \gamma_3^- & \beta_2 & \gamma_1^+ \\ \gamma_2^- & \gamma_1^+ & \beta_3 \end{Vmatrix}$$

$$a_2 = \begin{Vmatrix} \beta_1 & \gamma_3^- & \gamma_2^+ \\ \gamma_3^- & \beta_3 & \gamma_1^- \\ \gamma_2^+ & \gamma_1^- & \beta_3 \end{Vmatrix}, \quad a_3 = \begin{Vmatrix} \beta_1 & \gamma_3^+ & \gamma_2^- \\ \gamma_3^+ & \beta_2 & \gamma_1^- \\ \gamma_2^- & \gamma_1^- & \beta_3 \end{Vmatrix} \tag{0.3}$$

Неравенства (0.1) по своему строению идентичны соответствующим неравенствам для несжимаемого материала и, вообще говоря, не допускают дальнейших упрощений. Напротив, импликации (0.2) имеют довольно сложную структуру; проверка каждой из них требует вычисления семи определителей, шесть из которых второго, а один – третьего порядка, и связана, как правило, со значительными трудностями.

Предложенный ранее [1] способ вывода элементарных неравенств, эквивалентных условию Адамара, опирается на сформулированный авторами критерий частичной неотрицательной определенности квадратичной формы от N переменных (N – любое натуральное число). Ниже приводится отличная от [1] формулировка указанного критерия для частного случая $N=3$ (теорема 1), позволяющая получить систему элементарных неравенств более простой структуры. Это дает возможность существенно сократить объем вычислений, необходимых для проверки условия Адамара. Доказывается, что при $N=3$ критерий Гурвича – Лурье равносилен полученному в данной работе (теорема 2). Формулируется эффективный достаточный признак справедливости условия Адамара (теорема 3). Дается механическая интерпретация отдельных неравенств системы (0.1). Рассматриваются примеры сжимаемых упругих материалов. Предложенный метод может быть использован для получения эффективных критериев сильной эллиптичности уравнений равновесия нелинейно-упругой среды [2, 4] и положительной продольной упругости изотропного сжимаемого материала [3].

1. Критерий частичной неотрицательной определенности квадратичной формы от трех переменных. Рассмотрим квадратичную форму

$$L(x)=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j \tag{1.1}$$

Под частичной неотрицательной определенностью формы $L(x)$ будем понимать [1] ее неотрицательность при $x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0,\ x_3\geqslant0$.

Теорема 1. Квадратичная форма (1.1) частично неотрицательно определена тогда и только тогда, когда для произвольной перестановки $i,\ j,\ k$ индексов 1, 2, 3 соблюдаются условия

$$a_{kk}\geqslant0,\quad a_{ij}+\sqrt{a_{ii}a_{jj}}\geqslant0 \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}(a_{ki}<0)\wedge(a_{kj}<0)\Rightarrow a_{kk}a_{ij}-a_{ki}a_{kj}+\\ +(a_{kk}a_{ii}-a_{ki}^2)^{1/2}(a_{kk}a_{jj}-a_{kj}^2)^{1/2}\geqslant0\end{gathered} \tag{1.3}$$

Доказательство. Необходимость условий (1.2) очевидна. Достаточно доказать необходимость импликации (1.3). В самом деле, считая $a_{ki}<0$, $a_{kj}<0$, зафиксируем произвольные значения переменных $x_i\geqslant0$, $x_j\geqslant0$ и исследуем поведение формы $L(x)$ как функции от x_k. Заметим, что в силу условий (1.2) и исходного предположения об отрицательности a_{ki}, a_{kj} соблюдается неравенство $a_{kk}>0$. Поэтому $L(x)$ – квадратный трехчлен относительно x_k с положительным старшим коэффициентом, достигающий, как можно проверить, минимума в точке

$$x_k^0=-a_{kk}^{-1}(a_{ki}x_i+a_{kj}x_j)\geqslant0 \tag{1.4}$$

Минимальное значение $L(x)$ получается подстановкой x_k^0 в (1.1) и имеет вид

$$\begin{gathered}\min_{x_k} L(x)=a_{kk}^{-1}[(a_{kk}a_{ii}-a_{ki}^2)x_i^2+(a_{kk}a_{jj}-a_{kj}^2)x_j^2+\\ +2(a_{kk}a_{ij}-a_{ki}a_{kj})x_ix_j]\end{gathered} \tag{1.5}$$

Вследствие частичной неотрицательной определенности $L(x)$ и неравенства $x_k^0\geqslant0$ квадратичная форма в правой части равенства (1.5) должна быть неотрицательной при всех $x_i\geqslant0$, $x_j\geqslant0$, откуда и следует заключение импликации (1.3).

Докажем теперь достаточность условий (1.2), (1.3). Ясно, что неравенства (1.2) гарантируют частичную неотрицательную определенность $L(x)$ на координатных плоскостях $x_m=0$ ($m=1,\ 2,\ 3$). Отбрасывая тривиальный случай, когда среди диагональных элементов a_{11}, a_{22}, a_{33} имеются равные нулю, будем полагать $a_{mm}>0$ ($m=1,\ 2,\ 3$). Возможны два варианта: либо среди коэффициентов a_{12}, a_{23}, a_{31} имеются два неотрицательных, либо среди них найдутся два отрицательных. Первый случай затруднений не вызывает. Во втором случае для некоторой перестановки i, j, k соблюдаются неравенства $a_{ki}<0$, $a_{kj}<0$ и, как можно проверить, форма $L(x)$ достигает минимума в точке x_k^0, определяемой соотношением (1.4). Второе условие (1.2) и (1.3) обеспечивают ввиду (1.5) неотрицательность $\min_{x_k} L(x)$ при $x_i\geqslant 0$, $x_j\geqslant 0$, а тем самым и частичную неотрицательную определенность формы $L(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Критерий Гурвича — Лурье [1] в частном случае формы трех переменных равносилен критерию, сформулированному в теореме 1.

Доказательство. Пусть a — матрица формы $L(x)$, A — присоединенная к a матрица, элементы A_{ij} которой — алгебраические дополнения соответствующих элементов a_{ij}. Согласно критерию Гурвича — Лурье, охватывающему случай произвольного N (N — порядок формы), квадратичная форма $L(x)$ частично неотрицательно определена тогда и только тогда, когда а) она обладает этим свойством на каждой из координатных плоскостей $x_m=0$ ($m=1, \ldots, N$); б) неотрицательность элементов присоединенной матрицы A влечет неотрицательность определителя исходной матрицы a.

Считая выполненными неравенства (1.2), докажем эквивалентность следующих утверждений:

1) для всякой перестановки i, j, k чисел 1, 2, 3 справедлива импликация (1.3);

2) если все элементы присоединенной матрицы A неотрицательны, то $\det a\geqslant 0$, т. е.

$$\bigwedge_{m,\, n=1}^{3} (A_{mn}\geqslant 0) \Rightarrow \det a \geqslant 0 \tag{1.6}$$

Для этого достаточно установить, что высказывания *1* и *2* являются ложными только одновременно. Пусть, например, ложно утверждение *1*. Это означает, что существует такая перестановка i, j, k индексов 1, 2, 3, для которой соблюдаются неравенства

$$a_{ki}<0, \quad a_{kj}<0 \tag{1.7}$$

$$a_{kk}a_{ij}-a_{ki}a_{kj}+(a_{kk}a_{ii}-a_{ki}^2)^{1/2}(a_{kk}a_{jj}-a_{kj}^2)^{1/2}\geqslant 0 \tag{1.8}$$

Из (1.2), (1.7) при этом следует, что $a_{kk}>0$.

Можно показать, что все элементы A_{mn} (m, $n=1$, 2, 3) присоединенной матрицы A неотрицательны.

В самом деле, можно проверить, что для A_{ii}, A_{jj} — это следует из (1.7) и второго неравенства (1.2), а для A_{ij} — из (1.8), так как неравенство (1.8) можно записать в виде

$$A_{ij}>\sqrt{A_{ii}A_{jj}} \tag{1.9}$$

Прежде чем рассматривать три оставшихся элемента A_{ki}, A_{kj}, A_{kk}, выясним знак $\det a$. Воспользуемся для этого тождеством

$$\det a=a_{kk}^{-1}(A_{ii}A_{jj}-A_{ij}^2) \tag{1.10}$$

Поскольку $a_{kk}>0$, то, принимая во внимание (1.9), видим, что

$$\det a<0 \tag{1.11}$$

Выписывая явные выражения для A_{ki}, A_{kj}, A_{kk}, можно убедиться в том, что при $a_{ij}<0$ эти величины неотрицательны ввиду (1.2) и (1.7). Если же $a_{ij}\geqslant 0$, то из разложения

$$\det a=a_{ii}A_{ii}+a_{ij}A_{ij}+a_{ik}A_{ik} \tag{1.12}$$

и неравенства (1.11) опять-таки следует $A_{ik}\geqslant 0$ (аналогично для A_{jk}). Далее, используя неравенство $A_{ij}\geqslant 0$, можно получить для a_{ij} оценку сверху; применяя последнюю совместно с (1.7), (1.2), и в этом случае получим $A_{kk}\geqslant 0$.

В связи с тем, что все элементы A_{mn} (m, $n=1$, 2, 3) неотрицательны и в то же время имеет место неравенство (1.11), нарушена импликация (1.6), что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что ложно утверждение *2*. Это означает, что выполняются неравенства $A_{mn}\geqslant 0$ (m, $n=1$, 2, 3) и (1.11). Покажем, что при этом существует такая перестановка i, j, k индексов 1, 2, 3, для которой соблюдаются условия (1.7), (1.8), т. е. утверждение *1* тоже ложно. Действительно, из представлений типа (1.12) и сделанных допущений можно заметить, что в каждой строке матрицы a имеется хотя бы один отрицательный недиагональный элемент. Но тогда обязательно найдется такая строка, в которой оба недиагональных элемента отрицательны. Обозначим ее номер через k. Тем самым выполняются условия (1.7), где i, j произвольным образом дополняют k до перестановки i, j, k чисел 1, 2, 3. Что касается условия (1.8), то оно равносильно неравенству (1.9) и соблюдается ввиду (1.10), (1.11).

Итак, теорема доказана. Вместе с тем найдено довольно простое обоснование критерия Гурвича – Лурье при $N=3$.

2. Система элементарных неравенств, эквивалентных условию Адамара. Введем обозначения (i, j, k – произвольная перестановка индексов 1, 2, 3)

$$\alpha_k=\frac{\Pi_i v_i-\Pi_j v_j}{v_i^2-v_j^2},\quad \beta_k=\Pi_{kk},\quad \gamma_k^{\pm}=\pm\Pi_{ij}+\frac{\Pi_i\mp\Pi_j}{v_i\mp v_j},$$

$$\Pi_i\equiv\frac{\partial\Pi}{\partial v_i},\quad \Pi_{ij}\equiv\frac{\partial^2\Pi}{\partial v_i\partial v_j} \tag{2.1}$$

Удельная потенциальная энергия деформации Π считается дважды непрерывно-дифференцируемой функцией главных растяжений v_1, v_2, v_3 [2, 3], называемых также главными кратностями удлинений. Для сжимаемого материала условие Адамара равносильно [1] требованию частичной неотрицательной определенности четырех квадратичных форм от трех переменных с матрицами a_0, a_1, a_2, a_3 соответственно (см. (0.3)). Поэтому на основании теоремы 1 приходим к следующей системе элементарных неравенств:

$$\alpha_k\geqslant 0,\ \beta_k\geqslant 0 \tag{2.2}$$

$$\gamma_k^{\pm}+\sqrt{\beta_i\beta_j}\geqslant 0 \tag{2.3}$$

$$(\gamma_i^m<0)\wedge(\gamma_j^n<0)\Rightarrow\beta_k\gamma_k^{mn}-\gamma_i^m\gamma_j^n+$$
$$+[\beta_k\beta_j-(\gamma_i^m)^2]^{1/2}[\beta_k\beta_i-(\gamma_j^n)^2]^{1/2}\geqslant 0 \tag{2.4}$$

Здесь i, j, k – произвольная перестановка индексов 1, 2, 3. Символы m, n в (2.4) принимают значения плюс и минус, а их произведение mn определяется по правилу перемножения чисел $+1$, -1, т. е. mn представляет собой плюс для одноименных и минус для разноименных m, n. Условие (2.4) должно выполняться при любом выборе знаков m, n.

Очевидно, что импликация (2.4) значительно проще, чем (0.2). Как показывают конкретные примеры, проверка ее во многих случаях вполне осуществима аналитически. Уместно также подчеркнуть, что из 12 импликаций (2.4), отвечающих всевозможным перестановкам i, j, k индексов 1, 2, 3 и всевозможным комбинациям m, n символов плюс, минус, по крайней мере 9 заведомо выполняются, если справедливы неравенства (2.2), (2.3).

В самом деле, вследствие равенств (2.1) параметры γ_k^+, γ_k^- и α_k связаны соотношением

$$\gamma_k^+ + \gamma_k^- = 2\alpha_k \tag{2.5}$$

которое показывает, что величины γ_k^+, γ_k^- не могут быть одновременно отрицательными, если соблюдаются условия $\alpha_k \geqslant 0$.

Таким образом, из шести величин $\gamma_k^\pm$ $(k=1, 2, 3)$ отрицательных максимум три, а это значит, что в «худшем» случае необходима проверка лишь трех импликаций (2.4). Девять других при этом справедливы, так как посылки у них ложны. Можно также показать, что «худшим» случаем является наличие трех отрицательных коэффициентов вида γ_i^+, γ_j^+, γ_k^- или вида γ_i^-, γ_j^-, γ_k^-, а для всех остальных вариантов либо необходима проверка лишь одной импликации (2.4) (не меньше двух отрицательных коэффициентов), либо все они заведомо выполнены (один отрицательный коэффициент или ни одного). Следовательно, критерий, доказанный в теореме 1, позволяет не только существенно упростить структуру импликаций (0.2), но и сократить их количество.

Итак, для сжимаемого материала система элементарных неравенств, равносильных условию Адамара, в общем случае состоит из 12 безусловных неравенств (2.2), (2.3) и трех условных типа (2.4), т. е. всего содержит 15 неравенств (против 9 для несжимаемого материала). Правда, с использованием (2.5) можно показать, что пару неравенств (2.3) можно заменить их произведением

$$(\gamma_k^+ + \sqrt{\beta_i\beta_j})(\gamma_k^- + \sqrt{\beta_i\beta_j}) \geqslant 0 \tag{2.6}$$

или

$$\beta_i\beta_j + 2\alpha_k\sqrt{\beta_i\beta_j} + \gamma_k^+\gamma_k^- \geqslant 0 \tag{2.7}$$

но неравенства (2.7), согласно принятому [1] соглашению, нельзя считать элементарными, так как каждое из них распадается на два более простых.

Известно [2, 3], что неравенства (2.2) допускают простую физическую интерпретацию (как статическую, так и акустическую). В частности, условия $\alpha_k \geqslant 0$ представляют собой ослабленный вариант неравенств Бейкера — Эриксена [5, 3] и означают, что при сравнении двух главных растяжений в данной частице материала большему из них соответствует не меньшее главное напряжение.

Оказывается, неравенства (2.3) тоже имеют отчетливый механический смысл. В самом деле, считая справедливыми неравенства (2.2) и используя известные представления для компонент акустического тензора [2, 3] в главных осях меры деформации Фингера, можно показать, что в однородно напряженной упругой среде квадраты скоростей распространения плоских волн, поляризованных в главной плоскости $x_k=0$ и перемещающихся в направлении нормали $\mathbf{n}$ с компонентами

$$n_i^2=\sqrt{\beta_j}v_j^2\theta,\quad n_j^2=\sqrt{\beta_i}v_i^2\theta,\quad n_k^2=0 \tag{2.8}$$
$$\theta=(\sqrt{\beta_i}v_i^2+\sqrt{\beta_j}v_j^2)^{-1}$$

определяются соотношениями

$$\rho_0c_1^2=K_1(\gamma_k^++\sqrt{\beta_i\beta_j})(\gamma_k^-+\sqrt{\beta_i\beta_j}),\quad \rho_0c_2^2=K_2 \tag{2.9}$$
$$K_1=2\sqrt{\beta_i\beta_j}v_i^2v_j^2\theta M^{-1},\quad K_2={}^1/_2v_i^2v_j^2\theta M$$
$$M=(\sqrt{\beta_i}+\sqrt{\beta_j})(\alpha_k+\sqrt{\beta_i\beta_j})+[(\sqrt{\beta_i}-\sqrt{\beta_j})^2\times$$
$$\times(\alpha_k+\sqrt{\beta_i\beta_j})^2+(\gamma_k^+-\gamma_k^-)^2\sqrt{\beta_i\beta_j}]^{1/2}$$

Здесь ρ_0 — плотность материала в недеформированном состоянии; c_1, c_2 — скорости волн. Ясно, что для вещественности c_2 достаточно выполнения неравенств (2.2), тогда как для вещественности c_1, помимо (2.2), нужно требовать справедливости неравенств (2.6) (или (2.3)).

В (2.8), (2.9) предполагается, что

$$(\alpha_k^2+\beta_i^2)(\alpha_k^2+\beta_j^2)(\beta_i^2+\beta_j^2)\neq0 \tag{2.10}$$

Если $\beta_i=\beta_j=0$, но $\alpha_k\neq0$, то соотношения (2.9) справедливы для любой нормали $\mathbf{n}$, лежащей в плоскости $x_k=0$, однако выражения для K_1, K_2 и M принимают вид

$$K_1=2v_i^2v_j^2n_i^2n_j^2M^{-1},\quad K_2={}^1/_2M$$
$$M=\alpha_k(v_i^2n_i^2+v_j^2n_j^2)+[\alpha_k^2(v_i^2n_i^2-v_j^2n_j^2)^2+(\gamma_k^+-\gamma_k^-)^2\times$$
$$\times v_i^2v_j^2n_i^2n_j^2]^{1/2}$$

Во всех остальных случаях нарушения условия (2.10) имеем $c_1=c_2=0$, $\gamma_k^\pm+\sqrt{\beta_i\beta_j}=0$, т. е. соотношения (2.9) опять-таки можно считать выполненными, если положить $K_2=0$. При этом соответствующее направление $\mathbf{n}$ либо определяется формулами (2.8) (если последние имеют смысл), либо произвольно в плоскости $x_k=0$ (в противном случае).

Таким образом, неравенства (2.6) (или (2.3)) выражают требование вещественности скорости c_1.

В совокупности неравенства (2.2), (2.3) необходимы и достаточны для справедливости условия Адамара в главных плоскостях меры деформации Фингера. Что касается импликаций (2.4), то их следует рассматривать как дополнительные ограничения, обеспечивающие вещественность скоростей распространения упругих волн не только в главных плоскостях, но и по любому направлению $\mathbf{n}$.

Полученные выше результаты позволяют сформулировать следующий достаточный признак справедливости условия Адамара.

Теорема 3. Если при заданных v_1, v_2, v_3 для всякой перестановки i, j, k индексов 1, 2, 3 и любой комбинации m, n символов плюс, минус соблюдаются неравенства (2.2), (2.3) и имеют место импликации

$$(\gamma_i^m<0)\wedge(\gamma_j^n<0)\Rightarrow\beta_k\gamma_k^{mn}-\gamma_i^m\gamma_j^n\geqslant0 \qquad (2.11)$$

то рассматриваемый материал удовлетворяет условию Адамара в точке (v_1, v_2, v_3) пространства растяжений.

Доказательство очевидно и поэтому опускается.

Замечания. 1°. Если в (2.2)–(2.4) заменить всюду знак $\geqslant$ на $>$, то получится система элементарных неравенств, равносильных условию сильной эллиптичности [2, 4] уравнений равновесия нелинейно упругой среды. Соответствующим образом может быть переформулирована и теорема 3.

2°. При помощи теоремы 1 можно получить также эффективный критерий положительной продольной упругости [3] изотропного сжимаемого материала, но здесь на этом не останавливаемся.

3. Проверка условия Адамара. Рассмотрим теперь некоторые примеры проверки условия Адамара по предложенной в разд. 2 методике.

Сжимаемый материал Муни – Ривлина (*или материал Адамара*) [2]. Удельная потенциальная энергия деформации определяется соотношением

$$\Pi=c_1I_1+c_2I_2+f(I_3)\quad(c_1>0,\ c_2>0) \qquad (3.1)$$

$$I_1=v_1^2+v_2^2+v_3^2,\ I_2=v_1^2v_2^2+v_2^2v_3^2+v_3^2v_1^2,\ I_3=v_1^2v_2^2v_3^2$$

где I_1, I_2, I_3 – главные инварианты меры деформации Фингера, f – дважды непрерывно дифференцируемая функция третьего инварианта I_3, c_1, c_2 – постоянные. Если отсчетная конфигурация совпадает с естественным состоянием и последнему приписано значение $\Pi=0$, то функция f подчиняется дополнительным ограничениям

$$f(1)+3(c_1+c_2)=0,\ f'(1)+c_1+2c_2=0 \qquad (3.2)$$

Штрихом в (3.2) отмечена производная по I_3. Легко показать, что необходимое и достаточное условие положительности Π имеет вид

$$3(c_1I_3^{1/3}+c_2I_3^{2/3})+f(I_3)>0\quad(I_3\neq1) \qquad (3.3)$$

В самом деле, необходимость (3.3) вытекает из рассмотрения потенциала (3.1) на прямой $v_1=v_2=v_3$ пространства растяжений, а для доказательства достаточности следует воспользоваться очевидными оценками

$$I_1\geqslant3I_3^{1/3},\ I_2\geqslant3I_3^{2/3}$$

и учесть, что $c_1>0$, $c_2>0$.

При обозначении $c_3\equiv f'+2I_3f''$ из (2.1), (3.1) находим

$$\alpha_k=2(c_1+c_2v_k^2),\ \beta_k=2[c_1+c_2(v_i^2+v_j^2)+c_3v_i^2v_j^2]$$
$$\gamma_k^\pm=2(c_1+c_2v_k^2)\pm2v_iv_j(c_2+c_3v_k^2) \qquad (3.4)$$

где i, j, k – произвольная перестановка чисел 1, 2, 3. Условия (2.2) принимают вид

$$c_1+c_2v_k^2\geqslant0,\ c_1+c_2(v_i^2+v_j^2)+c_3v_i^2v_j^2\geqslant0 \qquad (3.5)$$

Покажем, что неравенства (3.5) обеспечивают неотрицательность γ_k^+ ($k=1, 2, 3$). Действительно, это очевидно, если $c_2+c_3v_k^2\geqslant 0$, а при $c_2+c_3v_k^2<0$ следует из легко проверяемого при помощи (3.4) тождества

$$2\gamma_k^+=\beta_i+\beta_j-2(v_i-v_j)^2(c_2+c_3v_k^2) \qquad (3.6)$$

Итак, неравенства

$$\gamma_k^++\sqrt{\beta_i\beta_j}\geqslant 0 \qquad (3.7)$$

всегда выполняются, если имеют место условия (3.5).

Проверим теперь неравенства

$$\gamma_k^-+\sqrt{\beta_i\beta_j}\geqslant 0 \qquad (3.8)$$

Если $c_2+c_3v_k^2\leqslant 0$, то $\gamma_k^-\geqslant 0$ и (3.8) выполнено. Пусть $c_2+c_3v_k^2>0$. Тогда ввиду (3.4), (3.5) справедливы оценки

$$\beta_i\geqslant 2v_j^2(c_2+c_3v_k^2), \quad \beta_j\geqslant 2v_i^2(c_2+c_3v_k^2)$$

откуда следует

$$\gamma_k^-+\sqrt{\beta_i\beta_j}\geqslant 2(c_1+c_2v_k^2)\geqslant 0$$

т. е. условия (3.8) в любом случае удовлетворяются.

Рассмотрим, наконец, импликацию (2.4). Как установлено выше, отрицательными могут быть лишь величины γ_k^- ($k=1, 2, 3$). Допустим, что $\gamma_i^-<0$, $\gamma_j^-<0$. При этом согласно равенствам (3.4) обязательно должно быть

$$c_2+c_3v_i^2>0, \quad c_2+c_3v_j^2>0 \qquad (3.9)$$

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$\beta_k\gamma_k^+-\gamma_i^+\gamma_j^-=4(v_k+v_i)(v_k+v_j)\times$$
$$\times[(c_1+c_2v_iv_j)(c_2+c_3v_iv_j)+c_2^2(v_i-v_j)^2] \qquad (3.10)$$

правая часть которого неотрицательна, поскольку в силу (3.9) независимо от знака c_3 соблюдается неравенство $c_2+c_3v_iv_j>0$.

Таким образом, по теореме 3 неравенства (3.5) не только необходимы, но и достаточны для справедливости условия Адамара. Отметим также, что при доказательстве этого факта не использовались ограничения $c_1>0$, $c_2>0$. Если считать их выполненными, то в (3.5) остаются лишь неравенства

$$c_1+c_2(v_i^2+v_j^2)+c_3v_i^2v_j^2\geqslant 0 \qquad (3.11)$$

Ясно, что условие (3.11) соблюдается для всех v_1, v_2, v_3 тогда и только тогда, когда

$$c_3=f'+2I_3f''\geqslant 0 \qquad (3.12)$$

Следовательно, сжимаемый материал Муни — Ривлина удовлетворяет условию Адамара при любых деформациях в том и только в том случае, когда выполняется неравенство (3.12).

В качестве примера можно привести трехконстантный потенциал

$$\Pi=c_1(I_1-3)+c_2(I_2-3)+c_0(I_3-1)+(c_1+2c_2+c_0)(I_3^{-1}-1)$$

$$(c_0,\ c_1,\ c_2>0)$$

для которого, как можно убедиться, соблюдаются условия (3.2), (3.3). В данном случае

$$f(I_3)=c_0(I_3-1)+(c_1+2c_2+c_0)(I_3^{-1}-1)-3(c_1+c_2)$$

$$c_3=c_0+\frac{3(c_1+2c_2+c_0)}{I_3^2}>0$$

т. е. неравенство (3.12) выполнено.

Материал Синьорини [2]. Ограничимся рассмотрением так называемой упрощенной модели Синьорини, которой соответствует потенциал

$$\Pi={}^1/_8 J_3^{-1/2}[(9\lambda+5\mu)-2(3\lambda+\mu)J_1+(\lambda+\mu)J_1^2]-\mu \tag{3.13}$$

$$J_1=v_1^{-2}+v_2^{-2}+v_3^{-2},\quad J_3=v_1^{-2}v_2^{-2}v_3^{-2};\quad \lambda,\ \mu=\mathrm{const}$$

где J_1, J_3 — первый и третий главные инварианты меры деформации Альманзи [2, 3]. Были приведены [2] достаточные условия положительности П:

$$\mu>0,\quad 9\lambda+5\mu>0 \tag{3.14}$$

Не останавливаясь на доказательстве, отметим, что условия (3.14) не только достаточны, но и необходимы.

При помощи соотношений (2.1) из (3.13) находим

$$\begin{aligned}&\alpha_k={}^1/_2 v_i^{-1}v_j^{-1}v_k[(\lambda+\mu)J_1-(3\lambda+\mu)]\\&\beta_k={}^1/_2 v_iv_jv_k^{-3}[(\lambda+\mu)J_1-(3\lambda+\mu)+2(\lambda+\mu)v_k^{-2}]\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\gamma_k^{\pm}={}^1/_2 v_i^{-1}v_j^{-1}v_k[(\lambda+\mu)J_1-(3\lambda+\mu)\pm2(\lambda+\mu)v_i^{-1}v_j^{-1}]$$

На основании формул (3.15) неравенства (2.2) принимают вид

$$(\lambda+\mu)J_1-(3\lambda+\mu)\geqslant0 \tag{3.16}$$

$$(\lambda+\mu)J_1-(3\lambda+\mu)+2(\lambda+\mu)v_k^{-2}\geqslant0$$

Ясно, что при выполнении условий (3.16) величины γ_k^+ ($k=1,\ 2,\ 3$) неотрицательны. Поэтому неравенства (3.7) удовлетворяются. Точно так же доказывается и справедливость неравенств (3.8). Таким образом, условия (2.3) являются в данном случае следствиями (2.2).

Далее, ввиду формул (3.15) имеем

$$\begin{aligned}\beta_k\gamma_k^+-\gamma_i^-\gamma_j^-={}^1/_2 v_k^{-2}(v_k^{-1}+v_i^{-1})(v_k^{-1}+v_j^{-1})(\lambda+\mu)\times\\ \times[(\lambda+\mu)J_1-(3\lambda+\mu)]\end{aligned} \tag{3.17}$$

Если $\gamma_i^-<0$, $\gamma_j^-<0$, то обязательно $\lambda+\mu>0$, поэтому соотношение (3.17) свидетельствует о том, что импликации (2.4) всегда выполняются, если имеют место неравенства (3.16).

Итак, для упрощенного закона Синьорини (3.13) условие Адамара сводится к неравенствам (3.16). Заметим, что второе из них при соблюдении необходимых и достаточных условий (3.14) положительности П является следствием первого, так как при этом $\lambda+\mu>0$. В итоге в (3.16) остается лишь одно первое неравенство. Следовательно, для модели (3.13) (при ограничениях (3.14)) условие Адамара справедливо при любых деформациях тогда и только тогда, когда

$$3\lambda+\mu\leqslant 0 \tag{3.18}$$

Заметим, что неравенство (3.18) совместно с (3.14), в чем можно убедиться, полагая, например, $\lambda=-4$, $\mu=9$.

Аналогично можно рассмотреть и другие примеры изотропных сжимаемых упругих материалов. В частности, описанным в разд. 2 методом воспроизводятся уже известные результаты по проверке условия Адамара (для полулинейного материала Джона [2], частных случаев материала Блейтца – Ко [6], упругой жидкости Эйлера [3]), полученные ранее [1, 2, 4, 7, 8] применением критерия Сильвестра к матрице компонент акустического тензора или некоторыми искусственными приемами. Отметим также, что для всех только что перечисленных моделей, как и для (3.1), (3.13) и ряда других, выполняется посылка теоремы 3; значит, область ее применимости достаточно широка.

Анализ конкретных примеров свидетельствует о том, что изложенная в разд. 2 методика проверки условия Адамара весьма эффективна. Преимущество ее по сравнению с другими возможными подходами (в частности, использованием критерия Сильвестра [2, 4] или разного рода искусственных приемов [1, 8]) состоит, с одной стороны, в единообразии выполняемых операций для всех сжимаемых материалов, а с другой стороны – в отсутствие в (2.2) – (2.4) тех или иных вспомогательных параметров. Кроме того, сравнительная простота неравенств (2.2) – (2.4) позволяет, как правило, осуществлять проверку условия Адамара аналитически. Последнее возможно, например, для таких моделей, как материал Мурнагана [2] и общие случаи материалов Синьорини [2] и Блейтца – Ко [2, 6]. В случаях, когда эффективны другие методы, предлагаемый здесь способ не более трудоемок и столь же быстро приводит к цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурвич Е. Л., Лурье А. И.* К теории распространения волн в нелинейно-упругой среде (Эффективная проверка условия Адамара) // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 110–116.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. *Лурье А. И.* Критерий эллиптичности уравнений равновесия нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 23–34.
5. *Baker M., Ericksen J. L.* Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids and Reiner-Rivlin fluids // J. Washington Acad. Sci. 1954. V. 44. № 2. P. 33–35.
6. *Blatz P. J., Ko W. L.* Applications of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials // Trans. Soc. Rheol. 1962. V. 6. P. 223–251.
7. *Knowles J. K., Sternberg E.* On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics for a special material // J. of Elast. 1975. V. 5. № 3–4. P. 341–361.
8. *Гурвич Е. Л.* Условие Адамара в нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 45–51.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 12.V.1991