

УДК 539.3

© 1992 г. И. А. Лубягин, Д. А. Пожарский, М. И. Чебаков

## ВНЕДРЕНИЕ ШТАМПА В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА В УПРУГИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ КЛИН

Получены и исследованы интегральные уравнения Фредгольма второго рода для разных граничных условий на одной грани клина, что позволило представить соответствующие функции Грина интегралами от рядов Неймана по степеням  $(1 - 2\nu)$ . Изучаются контактные задачи о действии штампа в форме эллиптического параболоида на упругий пространственный клин. Для решения интегральных уравнений этих задач применяется асимптотический метод «больших  $\lambda$ » [1]. Проводится сравнение результатов численного анализа с известной контактной задачей для полупространства [2, 3].

Ранее [4] при помощи интегрального преобразования Конторовича — Лебедева на действительной оси было получено точное решение первой основной граничной задачи для упругого несжимаемого пространственного клина и высказана гипотеза, что для коэффициента Пуассона  $\nu \neq 1/2$  решение этой задачи должно получаться в виде разложения по степеням  $(1 - 2\nu)$ . В дальнейшем [5, 6] для построения решения первой основной граничной задачи теории упругости для пространственного клина использовалось интегральное преобразование Конторовича — Лебедева в комплексной плоскости. Эта задача для симметричного случая (скользящая заделка одной грани клина) была сведена [6] к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

1. Рассмотрим, используя цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ , где ось  $z$  направлена по ребру клина, единичное сосредоточенное усилие, действующее на грань  $\varphi = \alpha$  пространственного упругого клина угла раствора  $\alpha$ . Другая грань клина предполагается либо свободной от напряжений (задача а), либо лежащей без трения на недеформируемом основании (задача б), или жестко заделанной (задача в). Для простоты здесь и далее считаем, что задачи симметричны по  $z$ . Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид

$$\varphi = \alpha: \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0; \quad \sigma_{\varphi} = \delta(r - x) \delta(|z| - y) \quad (1.1)$$

$$\varphi = 0: \text{ а) } \sigma_{\varphi} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$$

$$\text{ б) } v = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{ в) } u = v = w = 0$$

Напряжения и перемещения выразим через три гармонические функции по известным формулам [5], а сами гармонические функции представим интегралами Фурье — Конторовича — Лебедева в комплексной плоскости [6]. Внося эти представления в (1.1), (1.2) и применяя ряд результатов теории функций комплексного переменного [6], придем в итоге к уравнениям Фредгольма второго рода относительно функций  $\Phi_m(u)$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), через которые выражаются искомые перемещения

$v(r, \alpha, z)$  (параметр  $\beta x > 0$ ):

$$\Phi_m(u) - \theta_m \int_0^\infty L_m(u, y) \Phi_m(y) dy = \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} K_{iu}(\beta x), \quad 0 < u < \infty \quad (1.3)$$

$$L_m(u, y) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi u}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2} W_m(y) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi t g_m(t) dt}{(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi u)(\operatorname{ch} \pi t + \operatorname{ch} \pi y)}$$

$$\text{а) } W_1(u) = \frac{\operatorname{ch} \alpha u - \cos \alpha}{\operatorname{sh} \alpha u + u \sin \alpha}, \quad W_2(u) = -\frac{\operatorname{ch} \alpha u + \cos \alpha}{\operatorname{sh} \alpha u - u \sin \alpha}$$

$$g_1(t) = \frac{\operatorname{cth} \alpha t/2}{\operatorname{ch} \alpha t - \cos 2\alpha}, \quad g_2(t) = \frac{\operatorname{th} \alpha t/2}{\operatorname{ch} \alpha t + \cos 2\alpha} \quad (1.4)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = (1 - 2\nu) \sin^2 \nu$$

$$\text{б) } W_3(u) = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha}, \quad g_3(t) = \frac{\operatorname{cth} \alpha t}{\operatorname{ch} 2\alpha t - \cos 4\alpha}$$

$$\theta_3 = (1 - 2\nu) \sin^2 2\alpha$$

$$\text{в) } W_4(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2\alpha u - 2u \sin 2\alpha}{2\kappa \operatorname{ch} 2\alpha u + 2u^2 - 2u^2 \cos 2\alpha + \kappa^2 + 1}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

$$g_4(t) = \frac{\operatorname{th} \alpha t \sin^2 2\alpha}{\operatorname{ch} 2\alpha t + \cos 4\alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{ch} \alpha t} \{g_5(t) [2g_6(t) - tg_7(t)] + \quad (1.5)$$

$$+ g_8(t) [2g_7(t) - tg_6(t)]\} / g_9(t) + 2(1 - \nu) \sin \alpha \{g_5(t) \times$$

$$\times (\sin 3\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{ch} 2\alpha t) - g_6(t) \cos 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha t\} / g_9(t)$$

$$g_5(t) = \kappa \operatorname{sh} 2\alpha t \cos 2\alpha - t \sin 2\alpha$$

$$g_6(t) = \cos 2\alpha \operatorname{ch} 2\alpha t - \operatorname{ch} 3\alpha t - \operatorname{ch} \alpha t \cos 4\alpha \quad (1.6)$$

$$g_7(t) = \sin 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha t + \operatorname{sh} \alpha t \sin 4\alpha$$

$$g_8(t) = \sin 2\alpha (\kappa \operatorname{ch} 2\alpha t - 1)$$

$$g_9(t) = [g_5^2(t) + g_8^2(t)] (\operatorname{sh}^2 2\alpha t + \cos^2 2\alpha)$$

$$\theta_4 = -(1 - 2\nu)$$

Задаче *a* отвечают два интегральных уравнения Фредгольма (1.3) при  $m = 1, 2$ , а задачам *б* и *в* — по одному интегральному уравнению (1.3) при  $m = 3$  и  $m = 4$  соответственно. При фиксированном  $\beta x > 0$  правая часть интегрального уравнения (1.3) не лежит в пространстве  $L_2(0, \infty)$ , в котором рассматривалось [6] интегральное уравнение, подобное (1.3), (1.5), но принадлежит пространству непрерывных ограниченных на полуоси функций  $C_M(0, \infty)$ . Заметим, что функции  $L_m(u, y)$  знакопостоянны при  $m = 1, 2, 3$ ,  $0 < u, y < \infty$ ,  $0 < \alpha < 2\pi$ , что облегчает вычисление норм в  $C_M(0, \infty)$  соответствующих интегральных операторов в (1.3). Численным интегрированием с точностью до 1% найдены значения этих норм, равные  $(1 - 2\nu) q_m$ ,  $m = 1, 2$ , при разных  $\alpha = \pi n/4$ :

$n$	1	2	3	4	5	6
$q_1$	0,4944	0,4408	0,2936	0,1323	0,1010	0,05234
$q_2$	1,148	1,301	0,04231	0,02134	0,08913	0,01524

Отсюда для задачи *a* следует, что, например, при  $\alpha = \pi/2$ , решение уравнения (1.3) при  $m = 2$  можно представить рядом Неймана при выполнении условия  $(1 - 2\nu) 1,301 < 1$  или  $\nu > 0,116$ , а при  $\alpha = 3\pi/4$  уже для любого  $\nu \in [0, 1/2]$ . Сравнивая выражения (1.5) и (1.4) и используя приведенные выше значения  $q_i$ , приходим к выводу, что в случае зада-

чи  $b$  для  $\alpha = \pi n/8$  такое представление решения возможно также при всяком  $\nu$ . Проведенные для случая  $\nu$  оценки и вычисления показывают, что при  $\alpha = \pi n/4$  ( $n = 1, 2, 3, 5, 6$ );  $\nu = 0,25$ ;  $\nu = 0,30$ ;  $\nu = 0,35$  решение интегрального уравнения (1.3) тоже можно построить методом последовательных приближений. После решения интегральных уравнений (1.3) перемещение  $v(r, \alpha, z)$  в случае, например, задачи  $a$  находится по формуле

$$v(r, \alpha, z) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1-\nu}{G} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} \{W_2(u) \Phi_2(u) - W_1(u) \Phi_1(u)\} \times \\ \times K_{iu}(\beta r) \cos \beta z \cos \beta y d\beta du \quad (1.7)$$

Обратим внимание на то, что, как следует из (1.3), функции  $\Phi_m(z)$  ( $m = 1, 2$ ) в формуле (1.7) зависят еще и от  $\beta r$ .

2. Пусть теперь в грань  $\varphi = \alpha$  клина силой  $P$ , приложенной на оси  $z = 0$  на расстоянии  $H$  от ребра клина, вдавливается жесткий эллиптический в плане штамп, форма основания которого описывается функцией  $f(r, z)$ , четной по  $z$ . Без ограничения общности будем рассматривать наиболее интересный для приложений случай, когда поверхность штампа — эллиптический параболоид, т. е.

$$f(r, z) = (r - a)^2/2R_1 + z^2/2R_2, \quad R_1 < R_2$$

Предположим, что неизвестная зона контакта — эллипс  $\Omega$ :  $(r - a)^2/c^2 + z^2/b^2 = 1$ ,  $a > c$ . Под действием силы  $P$  штамп оседает на величину  $\delta$  и поворачивается на угол  $\gamma$  вокруг прямой  $r = a$ . Вне зоны контакта грань  $\varphi = \alpha$  не нагружена. Силами трения между клином и штампом пренебрегаем. На грани  $\varphi = 0$  выполняется одно из условий (1.2). При заданных величинах  $P, R_1, R_2, \lambda = a/b$  требуется найти распределение нормальных контактных напряжений под штампом  $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$  ( $(r, z) \in \Omega$ ) и определить величины  $a, b, c, \delta, \gamma, H$ .

Введенный здесь безразмерный параметр  $\lambda$  характеризует относительную удаленность области контакта от ребра клина. Отметим, что приведенная выше постановка контактной задачи не является единственно возможной и может быть видоизменена.

При знании перемещений вида (1.7) интегральное уравнение этой задачи можно записать следующим образом:

$$\frac{1-\nu}{G} \frac{2}{\pi^2} \iint_\Omega q(x, y) d\Omega \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi u W_k(u, \beta x) K_{iu}(\beta r) \cos \beta(z - y) d\beta du = \\ = \delta + \gamma(r - a) - \frac{(r - a)^2}{2R_1} - \frac{z^2}{2R_2}, \quad (r, z) \in \Omega \quad (2.1)$$

$$W_1(u, \beta x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \pi u/2} \left( W_1(u) B_1^u \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} K_{iv}(\beta x) \right\} - \right. \\ \left. - W_2(u) B_2^u \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} K_{iv}(\beta x) \right\} \right)$$

$$W_{2,3}(u, \beta x) = \frac{W_{3,4}(u)}{\operatorname{ch} \pi u/2} B_{3,4}^u \left\{ \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2} K_{iv}(\beta x) \right\}$$

$$B_m^u = \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_m A_m^u)^n, \quad A_m^u \{f(y)\} = \int_0^\infty L_m(u, y) f(y) dy$$

Здесь  $A_m^u$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) — интегральные операторы, а значения  $k = 1, 2, 3$  отвечают соответственно задачам *а*, *б*, *в*. Для решения интегрального уравнения (2.1) применим асимптотический метод «больших  $\lambda$ » [1], эффективный при достаточном удалении области контакта от ребра клина. При помощи известных теорем можно доказать законность почленного интегрирования по  $u$  и  $\beta$  функционального ряда в ядре уравнения (2.1). Используя значение интеграла [7, 8]

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{ch} \pi u K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \cos \beta (z - y) d\beta du = \frac{1}{R}$$

$$R = \sqrt{(r - x)^2 + (z - y)^2}$$

выделим из ядра интегрального уравнения (2.1) его особую часть, совпадающую с ядром известной контактной задачи для упругого полупространства [2, 3, 9]

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{2G} \iint_{\Omega} \frac{q(r, y)}{R} dx dy + \frac{1-\nu}{2G} \iint_{\Omega} q(x, y) F(x, y, r, z) dx dy = \\ & = \pi \left( \delta + \gamma(r - a) - \frac{(r - a)^2}{2R_1} - \frac{z^2}{2R_2} \right); \quad (r, z) \in \Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} F(x, y, r, z) = & \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh} \pi u (W_k(u, \beta x) - \operatorname{cth} \pi u K_{iu}(\beta x)) \times \\ & \times K_{iu}(\beta r) \cos \beta (z - y) d\beta du \end{aligned}$$

Далее используем следующие безразмерные величины и обозначения (штрихи будем опускать):

$$\begin{aligned} br' = r - a, \quad bx' = x - a, \quad bz' = z, \quad by' = y, \quad b\delta' = \delta, \quad bc' = c, \\ bR' = R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bH' = H, \quad 2Gb^2P' = (1 - \nu) P, \quad 2Gq'(x', y') = (1 - \nu) q(x, y) \\ F'(x', y', r', z') = bF(x, y, r, z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$A = \frac{b}{2R_1}, \quad B = \frac{b}{2R_2}, \quad \Omega': \frac{r'^2}{c^2} + z'^2 = 1$$

*Лемма.* Функция  $F(x, y, r, z)$  непрерывна со всеми производными при  $(x, y), (r, z) \in \Omega$ . При  $\lambda > 1 + c$  ( $1 \leq \alpha < 2\pi$ ),  $\lambda > \alpha^{-1} + c$  ( $c/2 \leq \alpha \leq 1$ ),  $\lambda > \sqrt{1 + c^2(1 + \alpha^2)} \alpha^{-1}$  ( $0 < \alpha \leq c/2$ ) функция  $F(x, y, r, z)$  ( $(x, y), (r, z) \in \Omega$ ) представима абсолютно сходящимся рядом

$$F(x, y, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x, y, r, z)}{\lambda^n} \quad (2.4)$$

где  $f_n(x, y, r, z)$  — некоторые полиномы.

Разложение (2.4) получается почленным интегрированием функционального ряда в выражении для  $F(x, y, r, z)$  с использованием известных интегралов и представлений [7, 8]

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \cos \beta (z - y) d\beta = \frac{1}{\sqrt{xr} \operatorname{ch} \pi u} P_{iu-1/2} \left( 1 + \frac{R^2}{2rx} \right)$$

$$P_{iu-\frac{1}{2}}(1+\theta^2) = F\left(\frac{1}{2}-iu, \frac{1}{2}+iu, 1; -\frac{\theta^2}{2}\right) \quad (2.5)$$

$$x \int_0^{\infty} K_{ig}(\beta x) K_{iu}(\beta x) \cos \beta(z-y) d\beta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-y}{x}\right)^{2n} \frac{\pi^2}{2^{2n+1}} \times$$

$$\times \frac{1}{[(2n)!]^2 (\operatorname{ch} \pi u + \operatorname{ch} \pi g)} \times$$

$$\times \begin{cases} 1, & n=0 \\ \prod_{k=0}^{n-1} [(1+2k)^2 + (u+g)^2][(1+2k)^2 + (u-g)^2], & n=1, 2, \dots \end{cases} \left| \frac{z-y}{x} \right| < 2$$

и им подобных. В формулах (2.5)  $F(a, b, c; x)$  — гипергеометрическая функция Гаусса, разлагающаяся в ряд. Слагаемые, в которых  $r$  или  $x$  стоят в знаменателе, раскладываются в ряд Тейлора по степеням  $r/\lambda$  или  $x/\lambda$ . Поскольку при указанных в лемме  $\lambda$  все ряды сходятся абсолютно, они сходятся при любом порядке суммирования и их можно перегруппировать к виду (2.4). При этом легко определяется явный вид функций  $f_n(x, y, r, z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Разыскивая теперь решение интегрального уравнения (2.2), (2.4) в форме

$$q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n(x, y)}{\lambda^n} \quad (2.6)$$

подставляя (2.6) в (2.2), (2.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим бесконечную систему интегральных уравнений относительно  $q_n(x, y)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

$$1) \iint_{\Omega} \frac{q_0(x, y)}{R} dx dy = \pi(\delta + \gamma r - Ar^2 - Bz^2)$$

$$2) \iint_{\Omega} \frac{q_1(x, y)}{R} dx dy = -(a_0 + \kappa_1) \iint_{\Omega} q_0(x, y) dx dy$$

$$3) \iint_{\Omega} \frac{q_2(x, y)}{R} dx dy = \iint_{\Omega} \left[ (x+r) \left( \frac{a_0}{2} + \kappa_2^{10} \right) q_0(x, y) + \right. \\ \left. + (a_0 - \kappa_1) q_1(x, y) \right] dx dy$$

$$4) \iint_{\Omega} \frac{q_3(x, y)}{R} dx dy = - \iint_{\Omega} \left[ \left( (x^2 + r^2) \left( \frac{3}{8} a_0 + \kappa_3^{20} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + rx \left( \frac{a_0}{4} + 2\kappa_3^{11} \right) + \frac{a_1}{2} R^2 - \kappa_3(z-y)^2 \right) q_0(x, y) - \right. \\ \left. - (x+r) \left( \frac{a_0}{2} + \kappa_2^{10} \right) q_1(x, y) + (a_0 + \kappa_1) q_2(x, y) \right] dx dy$$

и т. д., где

$$(r, z) \in \Omega, \quad a_0 = \int_0^{\infty} (\operatorname{th} \pi u W^k(u) - 1) du$$

$$a_1 = - \int_0^{\infty} (\operatorname{th} \pi u W^k(u) - 1) \left( \frac{1}{4} + u^2 \right) \frac{du}{2}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$W^1(u) = W_1(u) - W_2(u) \quad (2.8)$$

$$W^k(u) = W_k(u), \quad k = 2, 3$$

$n$	$a_0$	$a_1$	$x_1$	$x_2^{10}$	$x_3^{20}$	$x_3^{11}$	$x_3$
-----	-------	-------	-------	------------	------------	------------	-------

Задача а

1	21,16	-10,26	27,56	14,39	10,40	7,428	7,050
2	1,378	-0,4499	8,224	4,847	4,932	1,976	1,620
3	0,07944	-0,01992	0,4103	0,2532	0,2620	0,09904	0,09262

Задача б

1	-0,4008	0,8749	1,140	0,7311	0,6741	0,3048	0,3570
3	-7,452·10 <sup>-3</sup>	-6,022·10 <sup>-3</sup>	0,04076	0,02465	0,02176	0,01082	0,0180
5	-0,2011	0,03358	6,429·10 <sup>-3</sup>	3,640·10 <sup>-3</sup>	2,376·10 <sup>-3</sup>	1,880·10 <sup>-3</sup>	2,286·10 <sup>-3</sup>

Задача в

1	-1,561	2,308	-0,02224	-0,01112	0,02723	-0,01703	-0,03080
2	-0,5222	0,1355	0,01677	8,383·10 <sup>-3</sup>	-6,449·10 <sup>-4</sup>	6,331·10 <sup>-3</sup>	9,500·10 <sup>-3</sup>
5	-0,3010	0,04930	-4,778·10 <sup>-3</sup>	-2,389·10 <sup>-3</sup>	-5,400·10 <sup>-4</sup>	-1,585·10 <sup>-3</sup>	-2,134·10 <sup>-3</sup>

$$\kappa_i^{jl} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} [W_1(u) B_1^u \{J_i^j(u, y)\} - W_2(u) B_2^u \{J_i^{jl}(u, y)\}] du, \quad k = 1$$

$$\kappa_i^{jl} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{sh} \frac{\pi u}{2} W_k(u) B_k^u \{J_i^{jl}(u, y)\} du, \quad k = 2, 3, \quad \kappa_i^{00} = \kappa_i$$

$$J_i^{jl}(u, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos us \cos yt \operatorname{ch}^i s \operatorname{ch}^l t}{(\operatorname{ch} s + \operatorname{ch} t)^i} ds dt, \quad j + l < i$$

В таблице приведены значения постоянных, рассчитанные по формулам (2.8) при  $\alpha = \pi n/4$  для задач *a*, *b*, *v* ( $k = 1, 2, 3$ ),  $v = 0, 3$ .

При последовательном решении уравнений (2.7) можно убедиться, что их правые части всегда являются полиномами от  $r$  и  $z$ , поэтому их решение можно найти в замкнутом виде по формулам § 52 монографии [9]. Каждая функция  $q_n(x, y)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) при этом имеет корневую особенность на границе  $\partial\Omega$  эллипса контакта. В силу гладкости выбранной формы основания штампа нужно поставить условие  $q(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \in \partial\Omega$ . Как следует из результатов работы [2], существование такого ограниченного на  $\partial\Omega$  решения при данной постановке задачи будет зависеть от числа слагаемых, удерживаемых в разложении (2.6), и в рассматриваемом здесь случае может быть построено, если в (2.6) ограничиться точностью до  $O(\lambda^{-4})$ . Привлекая интегральные условия равновесия штампа

$$\iint_{\Omega} q(x, y) dx dy = P, \quad \iint_{\Omega} q(x, y) x dx dy = P(H - \lambda) \quad (2.9)$$

и вводя обозначения по формулам

$$S_{00} = K, \quad S_{01} = \frac{E - c^2 K}{c^2(1 - c^2)}, \quad S_{10} = \frac{K - E}{1 - c^2}$$

$$S_{11} = \frac{(1 + c^2)E - 2c^2 K}{3c^2(1 - c^2)^2}, \quad S_{02} = \frac{2(1 - 2c^2)E + c^2(3c^2 - 1)K}{3c^4(1 - c^2)^2}$$

$$S_{20} = \frac{(3 - c^2)K - 2(2 - c^2)E}{3(1 - c^2)^2}, \quad f_0 = 3c^3(S_{11}^2 - S_{02}S_{20})$$

$$f_1 = (2S_{20} - c^2 S_{11})/f_0$$

$$f_2 = (2S_{11} - c^2 S_{02})/f_0$$

$$f_3 = (2c^2 S_{02} - S_{11})/f_0$$

$$f_4 = (2c^2 S_{11} - S_{20})/f_0$$

$$f_5 = \frac{(a_0 + 2\kappa_2^{10})((a_0 + \kappa_1)S_0^{-1}\lambda^{-3} - \lambda^{-2})}{1 + (a_1 - a_0/4 - 2\kappa_2^{11})/(\lambda^3 S_{01})}$$

$$f_6 = \frac{a_0/2 + \kappa_2^{10}}{6S_{00}S_{01}} f_5 - \frac{a_0^2 - \kappa_1^2}{S_{00}^2}$$

$$f_7 = \frac{f_6}{\lambda^2} - \frac{a_0 + \kappa_1}{\lambda S_{00}} \left(1 + \frac{f_6}{\lambda^2}\right) - \frac{cS_{10}}{2\lambda^3 S_{00}} ((a_1 - 2\kappa_2)(c^2 f_3 - f_2) +$$

$$+ 2\varepsilon_1(f_1 - c^2 f_4)), \quad \varepsilon_1 = -(3a_0/8 + a_1/2 + \kappa_2^{20})$$

$$f_8 = 1 + f_7 + \frac{\varepsilon_1 c^2}{3\lambda^3 S_{00}} - \frac{a_1}{6\lambda^3 S_{00}} \quad (2.10)$$

$$f_9 = c^2 \left( \frac{f_7}{\lambda} + \frac{\varepsilon_1 c^2 - a_1/6}{5\lambda^3 S_{00}} \right)$$

$$\begin{aligned}
f_{10} &= \frac{f_7}{3} + \frac{e_1 c^2 / 3 - a_1 / 2}{5 \lambda^2 S_{00}} \\
f_{11} &= \frac{3 S_{00}}{\pi f_8} \\
f_{12} &= (a_1 - 2 \kappa_3) f_3 - 2 e_1 f_4 \\
f_{13} &= 2 e_1 f_3 - (a_1 - 2 \kappa_3) f_2 \\
f_{14} &= -\frac{\pi c f_{12}}{3 \lambda^2 S_{00}} \\
f_{15} &= -\frac{2 \pi c}{3} \left[ -f_4 + \frac{f_{12} c}{\lambda^2} \left( -\frac{f_1 S_{10}}{2 S_{00}} + \frac{c^2 f_4 S_{01}}{2 S_{00}} + \frac{f_1 - f_4}{3} \right) \right] \\
f_{16} &= -\frac{2 \pi c}{3} \left[ f_3 + \frac{f_{12} c}{\lambda^2} \left( \frac{f_2 S_{10}}{2 S_{00}} - \frac{c^2 f_3 S_{01}}{2 S_{00}} - \frac{f_2 - f_3}{3} \right) \right] \\
f_{17} &= \frac{2 c S_{00}}{f_8} \left[ f_4 \left( f_{10} - \frac{c^2 S_{01}}{2 S_{00}} f_8 \right) - \frac{f_1}{c^2} \left( f_9 - \frac{c^2 S_{10}}{2 S_{00}} f_8 \right) \right] \\
f_{18} &= \frac{2 c S_{00}}{f_8} \left[ \frac{f_2}{c^2} \left( f_9 - \frac{c^2 S_{10}}{2 S_{00}} f_8 \right) - f_3 \left( f_{10} - \frac{c^2 S_{01}}{2 S_{00}} f_8 \right) \right] \\
f_{19} &= f_1 + f_4 + \frac{c (f_{13} - f_{12})}{\lambda^2} \left[ f_1 \left( \frac{1}{3} - \frac{S_{10}}{2 S_{00}} \right) - f_4 \left( \frac{1}{3} - \frac{c^2 S_{01}}{2 S_{00}} \right) \right] \\
f_{20} &= f_2 + f_3 + \frac{c (f_{13} - f_{12})}{\lambda^2} \left[ f_2 \left( \frac{1}{3} - \frac{S_{10}}{2 S_{00}} \right) - f_3 \left( \frac{1}{3} - \frac{c^2 S_{01}}{2 S_{00}} \right) \right]
\end{aligned}$$

где  $E = E(\sqrt{1-c^2})$ ,  $K = K(\sqrt{1-c^2})$  — полные эллиптические интегралы, окончательно получим

$$q(x, y) = \frac{3P}{2\pi c} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - y^2}, \quad H = \lambda \quad (2.11)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{2S_{00}f_{19}(1 - f_{11}/f_{14}) - (f_{12} - f_{13})(f_{11}/f_{15} + f_{17})/\lambda^2}{2S_{01}f_{20}(1 - f_{11}/f_{14}) - (f_{12} - f_{13})(f_{11}/f_{16} + f_{18})/\lambda^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{P}{B} = \frac{(f_{11}/f_1 + f_{15})A/B + f_{11}/f_{16} + f_{16}}{1 - f_{11}/f_{14}} \quad (2.13)$$

$$\frac{\delta}{B} = \frac{(f_{11}/f_{15} + f_1)A/B + f_{11}/f_{16} + f_{16}}{1 - f_{11}/f_{14}} \quad (2.14)$$

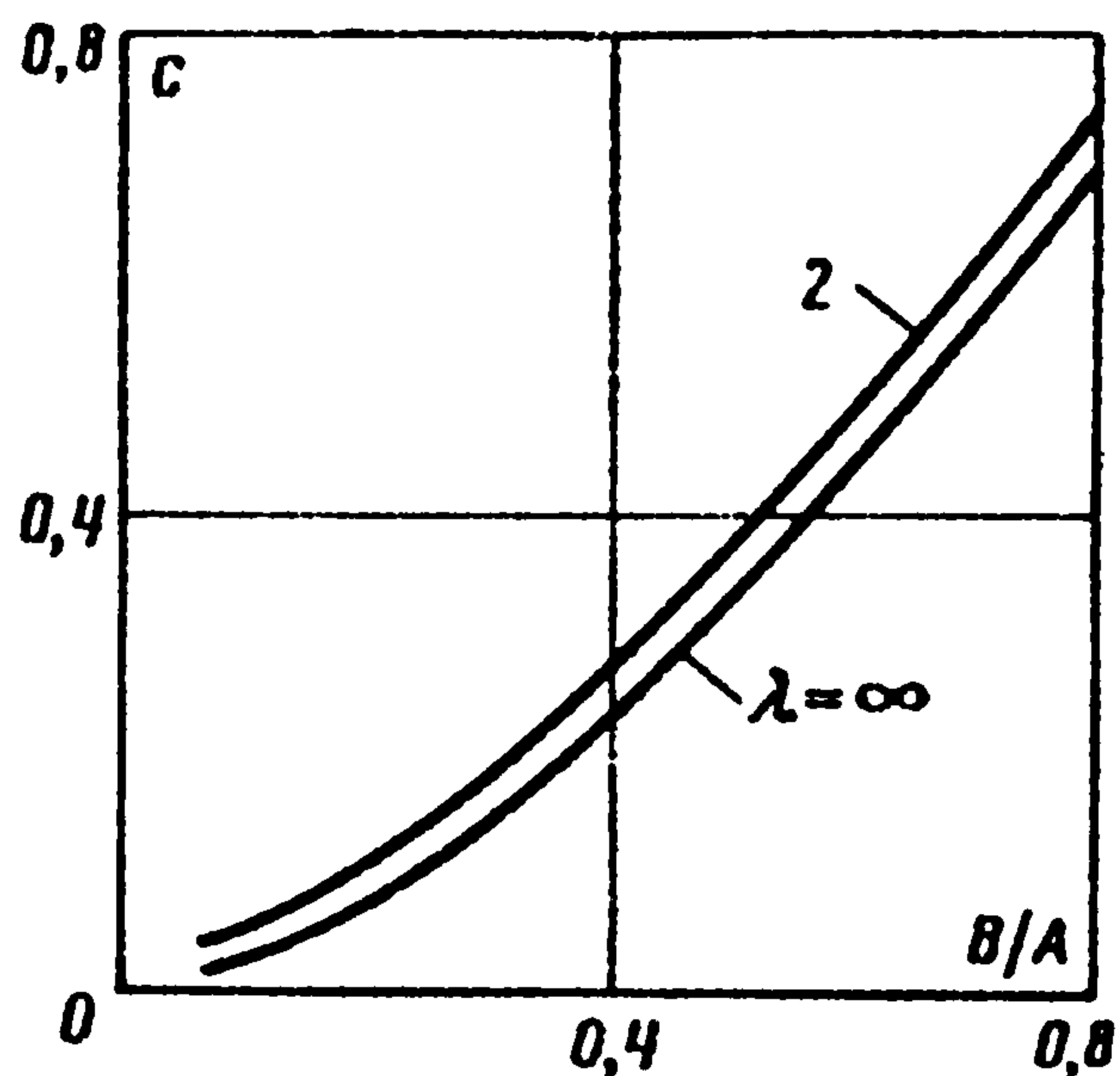
$$\frac{\gamma}{B} = f_5 \left[ \frac{\delta}{2S_{00}B} + c \left( \frac{A}{B} f_1 - f_2 \right) \left( \frac{1}{3} - \frac{S_{10}}{2S_{00}} \right) + c \left( f_3 - \frac{A}{B} f_4 \right) \left( \frac{1}{3} - \frac{c^2 S_{01}}{2S_{00}} \right) \right] \quad (2.15)$$

Формулы (2.11)–(2.15) определяют решение поставленной задачи с точностью до  $O(\lambda^{-4})$ . Уравнение (2.12) служит для определения  $c$  или эксцентриситета эллипса контакта  $e = \sqrt{1-c^2}$ . Затем из уравнения (2.13) можно найти  $b$ , а значит, и величины  $a$  и  $c$  (размерное, см. (2.3)). Величины осадки и перекоса штампа определяются соответственно из (2.14), (2.15).

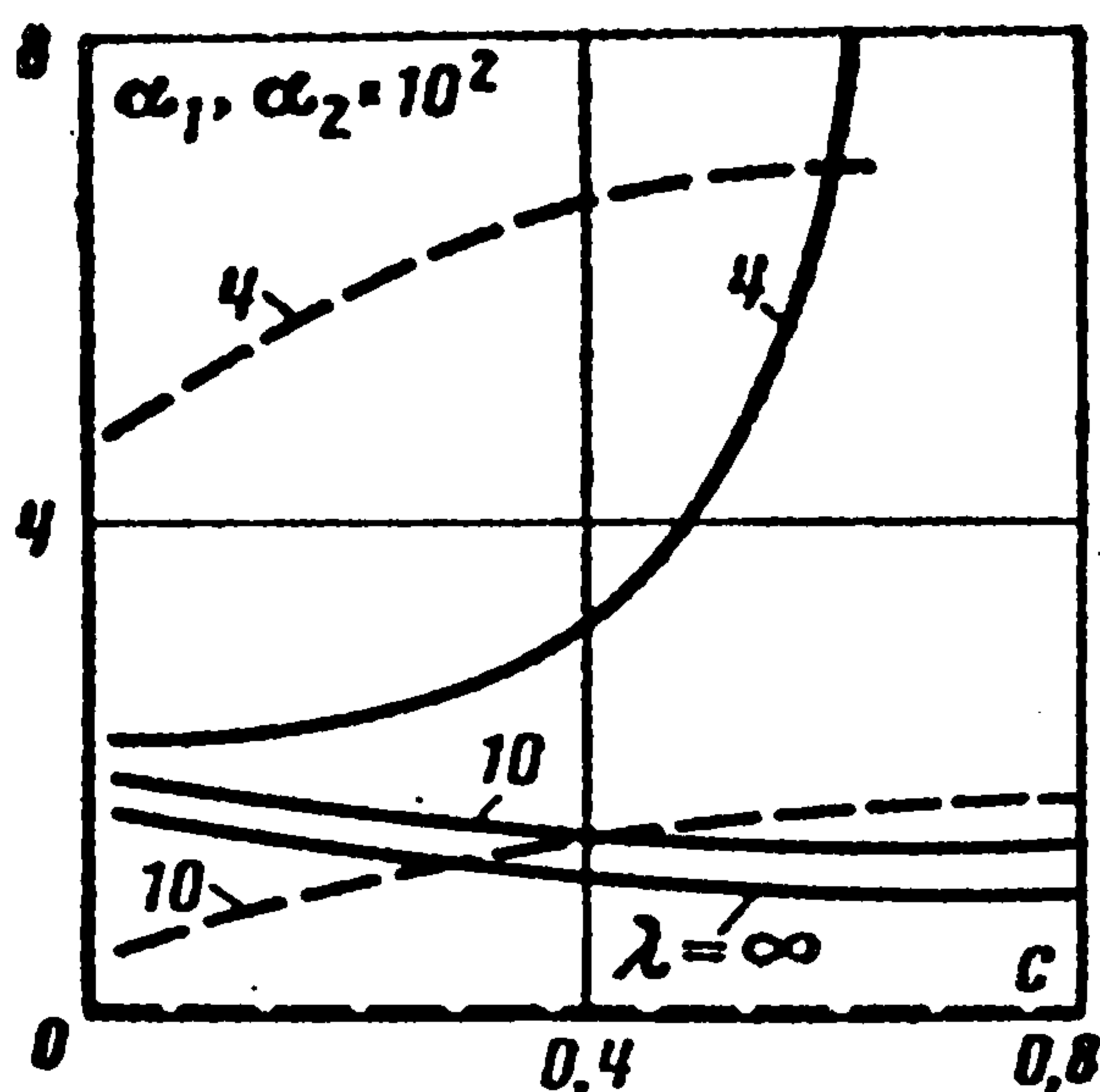
При  $\lambda \rightarrow \infty$  решение (2.14)–(2.15) переходит в известное решение А. И. Лурье [3] контактной задачи о вдавливании эллиптического парабола в упругое полупространство.

3. Численный анализ решения (2.11)–(2.15) проведем на примере задачи  $\alpha$  при  $\alpha = \pi/2$ ,  $\nu = 0,3$  (для других значений  $\alpha$  он аналогичен).

На фиг. 1 представлен график зависимости (2.12), связывающий отношение полуосей эллипса контакта  $c$  с отношением радиусов кривизны штампа  $R_1/R_2 = B/A$  при  $\lambda = 2$  и  $\lambda = \infty$ . Расчеты показывают, что при  $0,1 \leq c \leq 0,9$  отличие соответствующих значений  $R_1/R_2$  для  $\lambda = 10$  и  $\lambda = \infty$  не превосходит 0,1%. Величина  $\delta/B$  из (2.14)



Фиг. 1



Фиг. 2

при  $\lambda \rightarrow \infty$  гораздо медленнее стремится к своему предельному значению и, например, при  $\lambda = 10$ ,  $c = 0,1$  отличается от него на 15%. Таким образом, близость области контакта к ребру клина намного больше влияет на величину осадки штампа, чем на эксцентриситет эллипса контакта. Величина  $\gamma/B$  при  $\lambda = 4$ ,  $0,1 \leq c \leq 0,9$  отрицательна и имеет порядок  $10^{-2}$ , а при  $\lambda \rightarrow \infty$   $\gamma/B \rightarrow 0$  [3]. Как следует из (2.3), (2.13), (2.14), величина  $\delta$  пропорциональна  $P^{2/3}$  (здесь  $\delta, P$  — размерные) [3]. Из (2.3), (2.13), (2.15) видно, что угол  $\gamma$  пропорционален размерной величине  $P^{1/3}$ .

На фиг. 2 для разных  $\lambda$  показаны сплошными и штриховыми линиями соответственно графики зависимостей величин

$$\alpha_1 = \frac{\delta}{P^{2/3}} \frac{2R_2^{1/3} G^{2/3}}{(1-\nu)^{1/3}}, \quad \alpha_2 = - \frac{\gamma}{P^{1/3}} \frac{2R_2^{2/3} G^{1/3}}{(1-\nu)^{1/3}}$$

(здесь  $\delta, P$  — размерные) от  $c$ . Видно, что при некоторых (не очень больших)  $\lambda$  осадок штампа может расти при приближении формы области контакта к круговой.

Формулы (2.11) показывают, что сила приложена в центре эллипса контакта, а распределение контактных напряжений симметрично относительно осей симметрии этого эллипса. Оказывается, члены, учитывающие несимметричность функции  $q(x, y)$  и точки приложения силы имеют порядок  $\lambda^{-4}$ . Чтобы учесть их, т. е. решить интегральное уравнение (2.2) с точностью до  $O(\lambda^{-5})$ , можно задавать только одну из величин  $R_1$  или  $R_2$ , при этом  $R_1/R_2$  будет определяться в ходе построения ограниченного решения типа (2.11).

Ниже приведены значения величины  $\alpha_3 = \frac{2}{3}\pi q(x, 0)/P$ , рассчитанные по формуле (2.11) в нескольких точках области контакта при  $R_1/R_2 = 0,5$  и разных  $\lambda$ .

$x$	0	0,2	0,4	0,6
$\alpha_3 \lambda = 2, c = 0,6230$	1,605	1,520	1,231	0,4321
$\alpha_3 \lambda = 4, c = 0,6296$	1,588	1,506	1,227	0,4313
$\alpha_3 \lambda = \infty, c = 0,6306$	1,586	1,504	1,226	0,4880

В заключение заметим, что метод «больших  $\lambda$ » позволяет в рамках разумной постановки задачи при условии  $q(x, y) = 0$  ( $(x, y) \in \partial\Omega$ ) определить эллипс контакта и другие величины лишь с ограниченной степенью точности. В случае же штампа с плоским основанием, когда решение уравнения (2.2) ищется в классе функций, имеющих корневую особенность на  $\partial\Omega$ , все требуемые величины могут быть найдены с любой степенью точности (эллипс контакта при этом считается известным).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова В. М. Некоторые контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 758—764.
2. Довгорович В. И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 107 с.

3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. *Уфлянд Я. С.* Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // *Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.* М.: Наука, 1972. С. 549—553.
5. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
6. *Орлюк Е. И.* Функциональные уравнения пространственной задачи теории упругости для клина и их решение // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 3. С. 194—198.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
9. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабашко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
27.VII.1990