

УДК 539.3

© 1992 г. Е. Н. Вильчевская, С. К. Канаун

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТОНКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о равновесии однородной упругой среды, содержащей тонкое включение, модули упругости которого существенно отличаются от модулей упругости среды. Решение задачи зависит от двух безразмерных параметров: отношения  $\delta_1$  характерных линейных размеров включения и отношения  $\delta_2$  модулей упругости включения и среды. Параметр  $\delta_1$  мал, а параметр  $\delta_2$  может быть как малым, так и большим. Задача построения главных членов асимптотики упругих полей в окрестности тонкой неоднородности по указанным параметрам была сведена [1] к решению интегральных (псевдодифференциальных) уравнений на срединной поверхности включения. К аналогичным уравнениям приводит использование двумерных моделей тонких включений [2–5]. Ниже обсуждаются некоторые свойства решений указанных уравнений. Предлагается метод их численного решения, основанный на введении специального класса аппроксимирующих функций, что позволяет свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой вычисляется аналитически. Идея метода принадлежит В. Г. Мазье.

**1. Интегральные уравнения задачи о тонком податливом и жестком включениях.** Пусть в однородной упругой среде с тензором модулей  $C_0$  имеется включение, занимающее ограниченную область  $V$ , один из характерных размеров которой  $h$  мал по сравнению с двумя другими (порядка  $l$ ), так что отношение  $\delta_1 = h/l$  — малый параметр. Включение идеально связано со средой по границе, а его упругие свойства определяются тензором модулей  $C$ . Требуется решить задачу статической теории упругости для среды с включением при заданной внешней нагрузке.

Для прикладных задач механики композитов наибольший интерес представляют тонкие включения, модули упругости которых существенно отличаются от модулей среды. При этом параметр  $\delta_2$ , равный отношению характерных модулей включения и среды ( $\delta_2 = O(CC_0^{-1})$ ), либо мал (податливые включения), либо велик (жесткие включения).

Заметим, что наиболее ценную информацию об упругих полях в окрестности тонких включений несут главные члены асимптотики этих полей по параметрам  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ . Для построения указанных членов необходимо найти предельное решение рассматриваемой задачи при  $\delta_1 \rightarrow 0$ ,  $\delta_2 \rightarrow 0$  (или  $\delta_2 \rightarrow \infty$ ), когда величина отношения  $\delta_1/\delta_2$  (или произведения  $\delta_1\delta_2$ ) остается фиксированной и равной ее значению для рассматриваемого включения. Такая асимптотика описывает упругие поля на расстояниях от поверхности включения, превышающих его характерный поперечный размер  $h$ , и представляет основной интерес при формулировке критериев хрупкого разрушения тел с включениями [2], решении задачи осреднения для сред с множеством тонких включений и др.

Начнем с рассмотрения тонких податливых включений, для которых параметр  $\delta_2$  мал. Будем считать, что срединная поверхность включения  $\Omega$

есть поверхность Ляпунова, ограниченная замкнутым контуром  $\Gamma$ ,  $n(x)$  — заданное на  $\Omega$  непрерывное поле вектора нормали,  $x(x_1, x_2, x_3)$  — точка среды. Было показано [1], что главные члены асимптотики по  $\delta_1, \delta_2$  полей деформации  $\varepsilon(x)$  и напряжений  $\sigma(x)$  в среде с тонким податливым включением имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(x) &= \varepsilon_{0\alpha\beta}(x) + \int_{\Omega} K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') C_0^{\lambda\mu\nu\rho} n_\nu(x') b_\rho(x') d\Omega' \\ \sigma^{\alpha\beta}(x) &= \sigma_0^{\alpha\beta}(x) + \int_{\Omega} S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') n_\lambda(x') b_\mu(x') d\Omega' \\ K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) &= -[\nabla_\alpha \nabla_\lambda G_{\beta\mu}(x)]_{(\alpha\beta)(\lambda\mu)} \\ S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x) &= C_0^{\alpha\beta\nu\rho} K_{\nu\rho\tau\delta}(x) C_0^{\tau\delta\lambda\mu} - C_0^{\alpha\beta\lambda\mu} \delta(x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\varepsilon_0(x)$  и  $\sigma_0(x)$  — внешние поля деформаций и напряжений, которые существовали бы в среде при отсутствии неоднородности и заданных внешних нагрузках,  $G(x)$  — функция Грина для однородной среды с модулями  $C_0$ ,  $\delta(x)$  — трехмерная дельта-функция. Известно [6], что  $G(x)$  — четная однородная функция степени  $-1$ , фурье-образ которой имеет вид

$$G^*(k) = L^{-1}(k), \quad L^{\alpha\beta}(k) = k_\lambda C_0^{\lambda\alpha\beta\mu} k_\mu$$

Векторное поле  $b(x)$  — плотность потенциалов в (1.1) — удовлетворяет на  $\Omega$  уравнению [1]

$$\lambda^{\alpha\beta}(x) b_\beta(x) + \int_{\Omega} T^{\alpha\beta}(x, x') b_\beta(x') d\Omega' = n_\beta(x) \sigma_0^{\alpha\beta}(x), \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

$$\lambda^{\alpha\beta}(x) = h^{-1}(x) n_\lambda(x) C^{\lambda\alpha\beta\mu} n_\mu(x), \quad T^{\alpha\beta}(x, x') = -n_\lambda(x) S^{\lambda\alpha\beta\mu}(x-x') n_\mu(x')$$

где  $h(x)$  — поперечный размер включения вдоль нормали  $n(x)$  к  $\Omega$  в точке  $x \in \Omega$ .

Следует отметить, что оператор  $T$  может быть записан в форме интегрального оператора с ядром  $T(x, x')$  лишь условно, так как соответствующий интеграл при  $x \in \Omega$  формально расходится для сколь угодно гладких  $b(x)$  ( $T(x, x') \sim |x-x'|^{-3}$  при  $x' \rightarrow x$ ). Можно показать [7], что  $T$  — псевдодифференциальный оператор с главным однородным символом — однородной функцией степени единица. Было получено [7, 8] регулярное представление оператора  $T$  на функциях  $b(x)$  с непрерывной вдоль  $\Omega$  производной. Из общей теории разрешимости уравнений типа (1.2) следует [9], что однозначное решение этого уравнения существует при дополнительном условии:  $b(x) = 0$  при  $x \in \Gamma$ .

Можно показать [1], что поля деформаций и напряжений (1.1) при плотности  $b(x)$ , удовлетворяющей уравнению (1.2), соответствуют решению следующей граничной задаче теории упругости. Найти векторное поле перемещений  $u(x)$  из решения уравнений Ламе для однородной среды с модулями  $C_0$  при заданной внешней нагрузке, если на поверхности  $\Omega$  выполняются условия

$$[u_\alpha(x)] = b_\alpha(x), \quad [n_\beta(x) \sigma^{\alpha\beta}(x)] = 0, \quad n_\beta(x) \sigma^{\alpha\beta}(x) = \lambda^{\alpha\beta}(x) b_\beta(x) \quad (1.3)$$

Здесь  $[f(x)]$  означает скачок функции  $f(x)$  при переходе через поверхность  $\Omega$  в точке  $x$  со стороны нормали,  $\lambda(x)$  имеет вид (1.2). Предлага-

гался [2, 3] эвристический подход к решению задачи о тонком включении, состоящий в замене последнего срединной поверхностью с граничными условиями вида (1.3). При  $\lambda(x)=0$  граничные условия (1.3), а следовательно представления (1.1) и уравнение (1.2), соответствуют задаче о трещине в однородной упругой среде.

Рассмотрим теперь случай жестких включений, когда параметр  $\delta_2$  велик. Главные члены асимптотики полей деформаций и напряжений (пределы  $\varepsilon(x)$  и  $\sigma(x)$  при  $\delta_1 \rightarrow 0$ ,  $\delta_2 \rightarrow \infty$ ,  $\delta_1 \delta_2 = O(1)$ ) имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}(x) &= \varepsilon_{0\alpha\beta}(x) + \int_{\Omega} K_{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') q^{\lambda\mu}(x') d\Omega' \\ \sigma^{\alpha\beta}(x) &= \sigma_0^{\alpha\beta}(x) + \int_{\Omega} S^{\alpha\beta\lambda\mu}(x-x') C_{0\lambda\mu\nu\rho}^{-1} q^{\nu\rho}(x') d\Omega' \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $q(x)$  — тензор, принадлежащий поверхности  $\Omega$ :

$$n_{\alpha}(x) q^{\alpha\beta}(x) = 0, \quad \Theta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta}(x) q^{\lambda\mu}(x) = q^{\alpha\beta}(x) \quad (1.5)$$

$\Theta(x)$  — оператор ортогонального проектирования на касательную к  $\Omega$  плоскость в точке  $x$ :

$$\Theta(x) = \Theta(n) = E_1 - 2E_3(n) + E_6(n), \quad n = n(x)$$

$$E_{1\alpha\beta\lambda\mu} = \delta_{\alpha(\lambda} \delta_{\beta)\mu}, \quad E_{3\alpha\beta\lambda\mu}(n) = n_{(\alpha} \delta_{\beta)(\lambda} n_{\mu)}, \quad E_{6\alpha\beta\lambda\mu}(n) = n_{\alpha} n_{\beta} n_{\lambda} n_{\mu}$$

$\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера.

Поле  $q(x)$  удовлетворяет на  $\Omega$  следующему уравнению:

$$\mu_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) q^{\lambda\mu}(x) + \int_{\Omega} U_{\alpha\beta\lambda\mu}(x, x') q^{\lambda\mu}(x') d\Omega' = \Theta_{\alpha\beta}^{\lambda\mu}(x) \varepsilon_{0\lambda\mu}(x) \quad (1.6)$$

$$\mu_{\alpha\beta\lambda\mu}(x) = h^{-1}(x) \Theta_{\alpha\beta}^{\nu\rho}(x) C_{\nu\rho\tau\delta}^{-1} \Theta_{\lambda\mu}^{\tau\delta}(x), \quad U_{\alpha\beta\lambda\mu} = \Theta_{\alpha\beta}^{\nu\rho}(x) K_{\nu\rho\tau\delta}(x-x') \Theta_{\lambda\mu}^{\tau\delta}(x')$$

Интегральный оператор  $U$  с ядром  $U(x, x')$  представляет собой псевдодифференциальный оператор с главным однородным символом — однородной функцией степени единица. Было получено [1] регулярное представление этого оператора на непрерывно дифференцируемых вдоль  $\Omega$  функциях  $q(x)$ . Однозначное решение уравнения (1.6) существует в классе функций, удовлетворяющих условию  $e_{\alpha}(x) q^{\alpha\beta}(x) = 0$  на контуре  $\Gamma$ , где  $e(x)$  — нормаль к  $\Gamma$ , лежащая в касательной к  $\Omega$  плоскости в точке  $x$ .

Используя свойства потенциалов в правых частях равенств (1.4), можно показать [1], что поля  $\varepsilon(x)$  и  $\sigma(x)$  при плотности  $\mu(x)$ , удовлетворяющей уравнению (1.6), соответствуют следующей граничной задаче теории упругости. Найти решение уравнений Ламе для однородной среды с модулями  $C_0$  при заданной внешней нагрузке, если на поверхности  $\Omega$  выполняются граничные условия (индексы для простоты опускаем)

$$[u(x)] = 0, \quad [\Theta(x)\varepsilon(x)] = 0, \quad \Theta(x)\varepsilon(x) = \mu(x)q(x) \quad (1.7)$$

где  $\mu(x)$  имеет вид (1.6),  $q(x)$  является тензором поверхности  $\Omega$  (1.5) и удовлетворяет на  $\Omega$  условию

$$\partial_{\alpha} q^{\alpha\beta}(x) = -[n_{\alpha}(x)\sigma^{\alpha\beta}(x)], \quad \partial_{\alpha} = \nabla_{\alpha} - n_{\alpha}(x)n^{\beta}(x)\nabla_{\beta} \quad (1.8)$$

Здесь  $\partial_\alpha$  — градиент вдоль поверхности  $\Omega$ . Правая часть первого равенства (1.8) — скачок вектора напряжений при переходе через поверхность  $\Omega$ .

Было показано [1], что компоненты тензора  $q(x)$  имеют смысл интегральных напряжений (усилий), действующих в поперечных сечениях тонкого включения. При этом (1.8) есть уравнение равновесия для этих усилий. Аналогичному уравнению удовлетворяют усилия в тонкой упругой оболочке, находящейся в безмоментном напряженном состоянии [10]. Таким образом, условия (1.7), (1.8) соответствуют задаче сопряжения безмоментной упругой оболочки (мембраны) с однородной упругой средой. При этом первые два соотношения (1.7) имеют смысл условий совместности деформаций включения и среды, а последнее — закон Гука для включения. При  $\mu=0$  соотношения (1.7), (1.8) представляют собой граничные условия задачи о нерастяжимой мембране, впаянной в однородную упругую среду. В случае плоской задачи аналогичные (1.7), (1.8) условия предлагались [4] для моделирования тонких прямолинейных включений в упругой плоскости.

**2. Асимптотика решений уравнений (1.2), (1.6) у края включений.** При построении численных решений уравнений (1.2), (1.6) полезно располагать информацией о структуре решения в окрестности края поверхности  $\Omega$ . Рассмотрим асимптотику решений уравнений (1.2), (1.6) вблизи гладкого участка граничного контура  $\Gamma$ . Перепишем эти уравнения в символической форме

$$\begin{aligned}\lambda(x)b(x) + (Tb)(x) &= n(x)\sigma_0(x), \\ \mu(x)q(x) + (Uq)(x) &= \Theta(x)\varepsilon_0(x)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Пусть поперечный размер включения  $h(x)$  является гладкой ограниченной функцией, которая в окрестности края поверхности  $\Omega$  может быть записана в виде

$$h(x) = h_0(x_0)r^\gamma + O(r^{\gamma+1}), \quad \gamma > 0 \quad (2.2)$$

где  $r$  — расстояние от точки  $x \in \Omega$  до точки  $x_0 \in \Gamma$  по нормали к  $\Gamma$ ,  $h_0(x_0)$  — гладкая на  $\Gamma$  функция. Рассмотрим асимптотику непрерывных ограниченных решений уравнений (2.1) в окрестности гладкой части контура  $\Gamma$  для указанных функций  $h(x)$ . Из общей теории эллиптических псевдодифференциальных уравнений [9] следует, что вид асимптотики решений уравнений (2.1) вблизи  $\Gamma$  совпадает с асимптотикой решения следующих модельных задач. Введем в точке  $x_0 \in \Gamma$  локальную декартову систему координат  $y_1, y_2, y_3$ , причем ось  $y_2$  направим вдоль касательной к  $\Gamma$  в точке  $x_0$ , ось  $y_3$  — вдоль предельной к  $\Omega$  нормали в точке  $x_0$ , тогда ось  $y_1$  лежит в касательной к  $\Omega$  плоскости в точке  $x_0$ . Указанные модельные задачи состоят в решении уравнений (2.1) на полуплоскости ( $y_3=0, -\infty < y_2 < \infty, y_1 \geq 0$ ), когда их правые части зависят только от координат  $y_1$ , а функции  $\lambda(y)$  и  $\mu(y)$  имеют вид

$$\lambda(y) = \lambda_0 y_1^{-1}, \quad \lambda_0 = h_0^{-1}(x_0) n_0 C n_0 \quad (2.3)$$

$$\mu(y) = \mu_0 y_1^{-1}, \quad \mu_0 = h_0^{-1}(x_0) \Theta(n_0) C^{-1} \Theta(n_0), \quad n_0 = n(x_0)$$

При этом решения уравнений (2.1) также зависят только от  $y_1$ . Вид асимптотики решений таких модельных задач при  $y_1 \rightarrow 0$  и асимптотики решений уравнений (2.1) при  $x \rightarrow x_0 \in \Gamma$  совпадают [9].

Рассмотрим модельное уравнение, соответствующее жесткому включению (случай податливого включения обсуждался ранее [8]). Подставляя выражения (2.3) во второе уравнение (2.1), интегрируя по  $y_2$  и учитывая, что  $q(y) = q(y_1)$ , приходим к уравнению ( $y_1 = t$ )

$$t^{-\gamma} q(t) + U_0 \int_0^{\infty} \frac{q(t')}{(t-t')^2} dt' = f(t), \quad t > 0 \quad (2.4)$$

$$U_0 = \mu_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(n_0) K(1, y_2, 0) \Theta(n_0) dy_2, \quad f(t) = \mu_0^{-1} \Theta(n_0) \varepsilon_0$$

где  $K(x_1, x_2, x_3)$  — ядро интегрального оператора в первом уравнении (1.1).

Интегральный оператор в (2.4) действует на непрерывно дифференцируемую ограниченную функцию  $q(t)$  по формуле [8]

$$\int_0^{\infty} \frac{q(t')}{(t-t')^2} dt' = \int_0^{\infty} \frac{q(t') - q(t)}{(t-t')^2} dt' - \frac{1}{t} q(t)$$

где в правой части стоит интеграл в смысле главного значения по Коши.

Для построения асимптотики решения уравнения (2.4) при  $t \rightarrow 0$  можно воспользоваться результатами работы [8], где рассмотрено аналогичное уравнение. Оказывается, что вид искомой асимптотики зависит от формы края включения — показателя  $\gamma$  в представлении (2.2) для  $h(x)$ . В случае «затупленного» края ( $0 \leq \gamma < 1$ ) асимптотика решения уравнения (2.4) при  $t \rightarrow 0$  имеет вид

$$q(t) = q_0 t^{\gamma} + O(t^{\gamma-1})$$

Если края включения имеют точку возврата ( $\gamma > 1$ ), то рассматриваемая асимптотика определяется соотношением

$$q(t) = q_0 t^{\gamma} + O(t^{\gamma-1})$$

В случае остроконечного включения ( $\gamma = 1$ )

$$q(t) = q_1 t^{-s_1} + q_2 t^{-s_2} + O(t^{-s_3})$$

где  $s_1, s_2$  — лежащие в полосе  $-1 < \operatorname{Re} s < -1/2$  корни трансцендентного уравнения

$$\det[\Theta(n_0) + s\pi \operatorname{ctg}(s\pi) U_0] = 0 \quad (2.5)$$

Тензоры  $\Theta(n_0)$  и  $U_0$  определены в (1.5), (2.4),  $s_3$  — корень того же уравнения в полосе  $-2 < \operatorname{Re} s < -3/2$ . В случае изотропных среды и включения показатели  $s_1, s_2, s_3$  — корни независимых уравнений

$$\operatorname{tg} s\pi = -\frac{7(2-\nu_0)}{8\xi} s, \quad \operatorname{tg} s\pi = -\frac{s}{\xi}, \quad \xi = \frac{\mu_0}{n_0 \mu}, \quad \kappa_0 = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}$$

которые являются следствием (2.5). Здесь  $\lambda_0, \mu_0$  — коэффициенты Ламе среды,  $\mu$  — модуль сдвига включения. Аналогичные результаты были получены [2, 8] для податливых включений.

3. Численное решение уравнений (1.2), (1.6). Класс включений, для которых уравнения (1.2), (1.6) могут быть решены аналитически, исчерпывается тонкими эллипсоидальными включениями, находящимися в полиномиальном внешнем поле [8]. Если форма включений отлична от эллипсоидальной, то для построения решений этих уравнений приходится обращаться к численным методам. При этом весьма полезной оказывается постановка вариационных задач, равносильных задачам решения уравнений (1.2), (1.6).

Рассмотрим  $T$  и  $U$  в уравнениях (1.2), (1.6) как операторы в гильбертовом пространстве  $L_2(\Omega) = H(\Omega)$  [9]. Областью определения  $T$  и  $U$  можно считать функции из плотного в  $L_2(\Omega)$  пространства  $C_0^\infty(\Omega)$  финитных, бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых сосредоточен во внутренних подобластях  $\Omega$ . На таких функциях действие операторов  $T$  и  $U$  определяется формулами регуляризации (2.6), (2.14) работы [1]. Можно показать, что  $T$  и  $U$  – симметричные положительные операторы, т. е.

$$\begin{aligned} (Tb, b) > 0, \quad (Uq, q) > 0 \\ \left( (f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) d\Omega, \quad f, \varphi \in L_2(\Omega) \right) \end{aligned}$$

причем равенство здесь достигается только при  $b=0, q=0$ . Для  $T$  это свойство было доказано [7], для  $U$  оно устанавливается аналогично. Операторы  $T_{(\lambda)}$  и  $U_{(\mu)}$  в (1.2), (1.6) ( $T_{(\lambda)} = \lambda + T, U_{(\mu)} = \mu + U$ ) отличаются от  $T$  и  $U$  определенно положительными слагаемыми и потому также являются положительными. Отсюда следует [11], что решения уравнений (1.2), (1.6) доставляют минимум функционалам

$$F_{(\lambda)}(b) = \int_{\Omega} (T_{(\lambda)}^{\alpha\beta} b_{\beta}) b_{\alpha} d\Omega - 2 \int_{\Omega} n_{\alpha} \sigma_0^{\alpha\beta} b_{\beta} d\Omega$$

$$F_{(\mu)}(q) = \int_{\Omega} (U_{(\mu)}^{\alpha\beta\lambda\mu} q^{\lambda\mu}) q^{\alpha\beta} d\Omega - 2 \int_{\Omega} \kappa_{\alpha\beta}^{\lambda\mu} \epsilon_{0\lambda\mu} q^{\alpha\beta} d\Omega$$

Следовательно, для построения функций  $b(x)$  и  $q(x)$  можно использовать прямые вариационные методы. Вариационная формулировка использовалась [12] для решения задачи о трещине ( $\lambda=0$ ). Было дано [13, 14] обоснование аналога метода конечных элементов применительно к решению задачи о трещине на основе вариационного подхода.

Другой путь решения уравнений (1.2), (1.6) состоит в использовании схемы, которая обычно применяется для решения граничных интегральных уравнений теории упругости [15]. При этом поверхность  $\Omega$  разбивается на  $N$  непересекающихся областей  $\Omega_i$ , так что  $\Omega = \cup \Omega_i$ . Искомые решения аппроксимируются линейной комбинацией стандартных функций с неизвестными коэффициентами внутри каждой из областей  $\Omega_i$ . Подставляя такую аппроксимацию в исходное уравнение и требуя его выполнения в конечном числе узловых точек, можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимации. Обсуждались [7, 16–18] проблемы реализации такого подхода для решения задачи о трещине в упругой среде.

Основные трудности здесь связаны с вычислением коэффициентов матрицы указанной системы линейных алгебраических уравнений, так как вблизи диагонали этой матрицы её коэффициенты представляются интегралами по областям  $\Omega_i$  от быстро изменяющихся функций. В пространственном случае определение таких интегралов с достаточной точностью требует большого объема вычислений даже при простейшей (кусочно-постоянной) аппроксимации искомых функций в областях  $\Omega_i$ .

4. Специальный класс аппроксимирующих функций. Введем класс аппроксимирующих функций, позволяющий свести решение уравнений

(1.2), (1.6) к системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой вычисляется аналитически.

Пусть  $\Omega$  — плоская область в  $\mathbb{R}^2$  или отрезок прямой в  $\mathbb{R}^1$ . При этом ядра  $T(x, x')$  и  $U(x, x')$  операторов  $T$  и  $U$  зависят только от разности аргументов, а сами операторы можно рассматривать как операторы свертки, если функции  $b(x)$  и  $q(x)$  считать продолженными нулем вне  $\Omega$ . Если  $b$  и  $q$  — функции класса  $S(\mathbb{R}^n)$  ( $n=1, 2$ ) (бесконечно дифференцируемые функции, стремящиеся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ ), то действие на них операторов  $T$  и  $U$  определяется формулами

$$\begin{aligned} (Tb)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} T^*(k) b^*(k) e^{-ikx} dk \\ (Uq)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(k) q^*(k) e^{-ikx} dk \end{aligned} \quad (4.1)$$

Интегралы распространены на всю плоскость ( $n=2$ ) или прямую ( $n=1$ ) и существуют в обычном смысле,  $T^*(k)$ ,  $U^*(k)$  — однородные функции степени единица, преобразования Фурье функций  $T(x)$  и  $U(x)$ .

Рассмотрим случай  $n=1$  (плоская задача) и пусть область  $\Omega$  представляет собой отрезок  $|x| \leq 1$  на плоскости  $(x, y)$ . Будем искать решение уравнений (1.2), (1.6) в виде рядов

$$b(x) = \sum_{i=1}^{2N} b^i f(x - x_i), \quad q(x) = \sum_{i=1}^{2N} q^i f(x - x_i), \quad f(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{Dh^2}\right\} \quad (4.2)$$

где  $x_i = -1 + h(i - 1/2)$  — узлы аппроксимации,  $h = 1/N$  — шаг аппроксимации,  $D$  — дисперсия. Выбор решения в форме (4.2) связан с тем, что действие оператора  $T$  вида (4.1) на функцию  $f(x - x_i)$  ( $f \in S(\mathbb{R}^1)$ ) определяется достаточно простым соотношением

$$(Tf)(x) = A[1 - 2\xi_i \exp(-\xi_i^2) \operatorname{Erfi}(\xi_i)], \quad \xi_i^2 = (x - x_i)^2 / (h^2 D)$$

где  $A$  — известная постоянная,  $\operatorname{Erfi}(\xi_i)$  — интеграл вероятности мнимого аргумента. Аналогичный вид имеет результат действия оператора  $U$  на  $f(x - x_i)$ .

Рассмотрим подробнее аппроксимацию (4.2). Пусть  $u(x)$  — гладкая функция, первая и вторая производные которой ограничены при  $x \in (-\infty, \infty)$ . Справедливо следующее представление<sup>1</sup>:

$$u(x) = u_h(x) + R(x), \quad u_h(x) = \frac{1}{(\pi D)^{1/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(mh) f(x - mh) \quad (4.3)$$

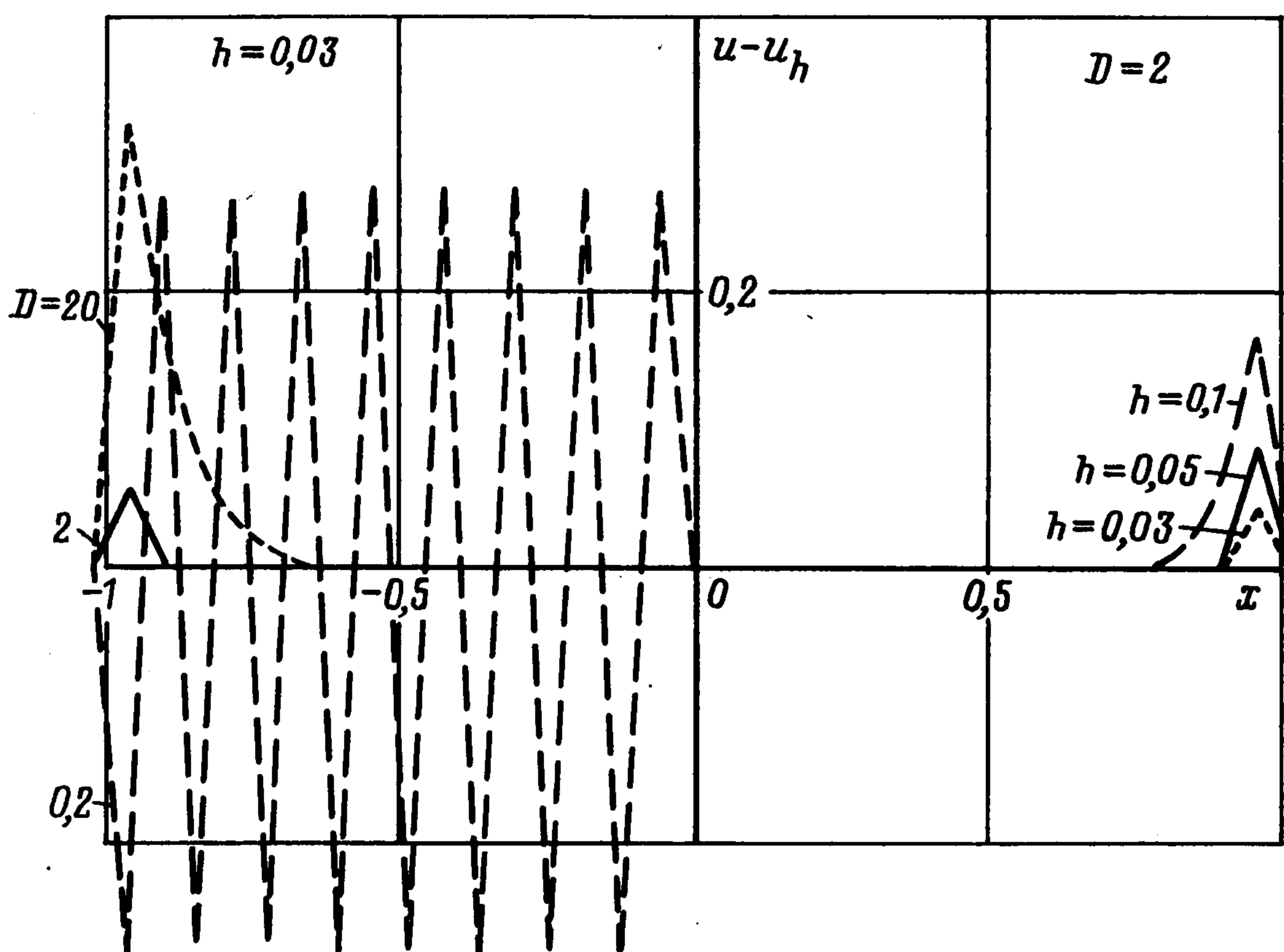
$$|R(x)| \leq (\|u\| + \|u'\|) R_0(D, h) + \|u''\| h^2 D / 4, \quad R_0(D, h) = O(\exp(-\pi^2 D)) \quad (4.4)$$

где  $\|u\|$  — норма в пространстве непрерывных функций. Таким образом, при

<sup>1</sup> Вильчевская Е. Н., Канаун С. К. Расчет упругих полей в окрестности тонких включений и трещин в сплошной среде: Препринт № 57. Л., Ленинградский филиал института машиноведения, 1991. 28 с.

аппроксимации функции  $u(x)$  рядом  $u_h(x)$  вида (4.3) ошибка зависит от двух параметров: «дисперсии»  $D$  и «шага» аппроксимации  $h$ .

Рассмотрим аппроксимацию (4.3) на примере функции  $u(x)$ , имеющей вид единичного импульса:  $u(x)=1$  при  $|x|\leq 1$ ,  $u(x)=0$  при  $|x|>1$ . Результаты аппроксимации при различных  $D$  и  $h$  представлены на фигуре, в левой части которой ( $x<0$ ) приведены графики функции  $u(x)-u_h(x)$  для фиксированного шага аппроксимации  $h=1/50$  и различных дисперсиях  $D$ , а в правой – графики той же функции при фиксированной величине дисперсии  $D=2$  и различных  $h$ . Очевидно, что область наиболь-



шей погрешности рассматриваемой аппроксимации сосредоточена в окрестности точек  $x=\pm 1$ . Если параметр  $h$  порядка 0,03, так что в правой части (4.3) остается около 60 слагаемых, то наименьшая погрешность аппроксимации (4.3) достигается при  $D\approx 2$  (при этом  $|u(x)-u_h(x)|<0,05$ ).

Перейдем к решению уравнения (1.2) на основе аппроксимации (4.2). Начнем с плоской задачи и пусть область  $\Omega$  есть по-прежнему отрезок ( $|x|\leq 1, y=0$ ) на плоскости  $(x, y)$ . В случае изотропной среды и плоской деформации ядро  $T(x)$  оператора  $T$  в (1.2) имеет вид

$$T^{\alpha\beta}(x) = -\frac{\mu_0\kappa_0}{\pi x^2} \delta^{\alpha\beta} \quad (4.5)$$

где  $x^{-2}$  – следует понимать как обобщенную функцию, преобразование Фурье которой  $\pi|k|$ . Если включение также изотропное, с коэффициентами Ламе  $\lambda, \mu$  и поперечным размером  $h(x)=h_0\alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – безразмерная функция формы включения ( $\alpha(x)=O(1)$ ), то векторное уравнение (1.2) распадается на два независимых уравнения

$$\frac{\Lambda_\alpha b_\alpha(x)}{\alpha(x)} - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_\alpha(x')}{(x-x')^2} dx' = f_\alpha(x), \quad |x|<1 \quad (\alpha=1,2) \quad (4.6)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\mu}{h_0\mu_0\kappa_0}, \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda+2\mu}{2h_0\mu_0}, \quad f_\alpha(x) = \frac{\sigma_0^{\alpha 2}(x)}{\mu_0\kappa_0}$$

Здесь учтено, что  $b(x)=0$  при  $|x|>1$ . Подставляя сюда  $b(x)$  в форме (4.2), используя формулы (4.1) и требуя выполнения уравнения в узловых точках  $x_i$ , приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимации  $b^i$

$$\sum_{i=1}^{2N} A_{\alpha}^{ki} b_{\alpha}^i = f_{\alpha}^k, \quad f_{\alpha}^k = f_{\alpha}(x_k), \quad (\alpha = 1, 2), \quad k = 1, \dots, 2N \quad (4.7)$$

$$A_{\alpha}^{ki} = \frac{\Lambda_{\alpha} \exp(-\xi_{ik}^2)}{\alpha(x_k)} - \frac{2\pi^{1/2}}{hD^{1/2}} [1 - \xi_{ik} \exp(-\xi_{ik}^2) \operatorname{Erfi}(\xi_{ik})], \quad \xi_{ik} = \frac{x_k - x_i}{hD^{1/2}}$$

Матрица этой системы  $A_{\alpha}^{ki}$  является целиком заполненной, симметричной, с преобладанием членов в окрестности главной диагонали. Наиболее предпочтителен при решении системы (4.7) метод Зейделя [19].

Для увеличения точности расчетов целесообразно, учитывая результаты разд. 3 и работы [8], представить функцию  $b(x)$  в виде:

$$b(x) = \beta(x) (1-x^2)_+^s \quad (4.8)$$

где вторым сомножителем справа учитывается вид асимптотики решения у краев включения  $x = \pm 1$ . Величина показателя  $s$  известна и зависит от формы края включения (см. раздел 3),  $f_+ = f$  при  $f \geq 0$ ,  $f_+ = 0$  при  $f < 0$ . При этом искомой функцией становится  $\beta(x)$ . Используя аппроксимацию (4.2) для каждой из функций  $\beta(x)$  и  $(1-x^2)_+^s$ , задачу можно свести к решению системы, аналогичной (4.7), матрица которой также вычисляется аналитически. Подробно данный подход изложен в работе, указанной в сноске на с. 281, где приведены также результаты расчетов, демонстрирующие эффективность метода.

Перейдем теперь к пространственной задаче и для простоты рассмотрим трещину с плоской поверхностью  $\Omega$ . В случае изотропной среды преобразование Фурье  $T^*(k)$  ядра  $T(x)$  в (1.2) имеет вид ( $k = k(k^1, k_2)$ )

$$T^{*\alpha\beta}(k) = 1/2 \mu_0 |k| [\delta^{\alpha\beta} + \kappa_0 (n^{\alpha} n^{\beta} + m^{\alpha} m^{\beta})], \quad m^{\alpha} = k^{\alpha} / |k| \quad (4.9)$$

где  $n$  — нормаль к  $\Omega$ .

Аналогично плоской задаче будем искать решение уравнения (1.2) при  $\lambda(x)=0$  в форме  $(x_1, x_2)$  — декартовы координаты в плоскости трещины)

$$b(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N b^i(x_1, x_2) \quad (4.10)$$

$$b^i(x_1, x_2) = b^i \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{i1})^2}{D_1 h_1^2} - \frac{(x_2 - x_{i2})^2}{D_2 h_2^2}\right)$$

где  $(x_{i1}, x_{i2})$  — координаты узлов аппроксимации,  $h_1, h_2$  — шаги аппроксимации по координатам  $x_1, x_2$ . Далее дисперсии  $D_1, D_2$  и шаги  $h_1, h_2$  выберем так, чтобы  $h_1^2 D_1 = h_2^2 D_2 = 4D$ . Подставим ряд (4.10) в уравнение (1.2), воспользуемся определением (4.1) оператора  $T$  и выражением (4.9) для  $T^*(k)$ . Требуя выполнения уравнения в узловых точках  $x_k$ , приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов  $b^i$  в представлении

(4.10):

$$\sum_{i=1}^N A_{ki}^{\alpha\beta} b_{,i} = \sigma_0^{\alpha\beta} (x_k) n_{\beta}, \quad k = 1, \dots, 2N \quad (4.11)$$

$$A_{ki} = \frac{\mu_0 \pi^{1/2}}{2D^{1/2}} \exp(-\xi_{ki}) \left\{ 2 [(1 - 2\xi_{ki}) J_0(\xi_{ki}) + 2\xi_{ki} J_1(\xi_{ki})] (\delta^{\alpha\beta} + \kappa_0 n^{\alpha} n^{\beta}) + \right. \\ \left. + \kappa_0 [(J_1(\xi_{ki}) - J_0(\xi_{ki})) (e_1^{\alpha} e_1^{\beta} + e_2^{\alpha} e_2^{\beta}) + \right. \\ \left. + 2 \left( J_0(\xi_{ki}) - \left( \frac{1}{2\xi_{ki}} + 1 \right) J_1(\xi_{ki}) \right) y_{ki}^{\alpha} y_{ki}^{\beta} \right] \right\} \\ y_{ki}^{\alpha} = (x_{1k} - x_{1i}) e_1^{\alpha} + (x_{2k} - x_{2i}) e_2^{\alpha}, \quad \xi_{ki} = |y_{ki}|^2 / (8D)$$

где  $e_1, e_2$  — орты осей  $x_1, x_2$ ;  $J_0, J_1$  — функции Бесселя.

Так же, как и в случае плоской задачи, при построении решения уравнения (1.2) целесообразно учесть вид асимптотики  $b(x)$  в окрестности краев трещины и представить функцию  $b(x)$  в виде  $b(x) = \beta(x_1, x_2) \times \times f_+(x_1, x_2)$ . Здесь  $f_+$  — известная функция, описывающая характер поведения решения при  $x \rightarrow \Gamma$ . Реализация такого подхода, а также результаты численных расчетов приведены в работе, указанной в сноске на с. 281.

В заключение отметим, что предложенный подход может быть применен для решения уравнений (1.2), (1.6) и в случае неплоской поверхности  $\Omega$ . Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводится решение задачи, в этом случае так же могут быть найдены в аналитической форме, хотя оказываются более громоздкими, чем (4.11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Канаун С. К. О сингулярных моделях тонкого включения в однородной упругой среде. // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 81–91.
2. Соткилава О. В., Черепанов Г. П. Некоторые задачи неоднородной теории упругости. // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 3. С. 539–550.
3. Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М. Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением. // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 7. С. 636–639.
4. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
5. Кит Г. С., Хай Н. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1989. 283 с.
6. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды. // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. № 9. С. 783–791.
7. Канаун С. К. К задаче о пространственной трещине в анизотропной упругой среде. // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 361–370.
8. Канаун С. К. Тонкий дефект в однородной упругой среде. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 74–83.
9. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
10. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромиз, 1962. 431 с.
11. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
12. Гольдштейн Р. В., Ентов В. П., Заговский А. Ф. Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1976. Т. 7. № 5. С. 5–13.
13. Stephan E. P. A boundary integral equation method for three-dimensional crack problems in elasticity. // Math. Meth in Appl. Sci. 1986. V. 8. № 4. P. 609–623.

14. *Costabel M., Stephen E. P.* An improved boundary element Galerkin method for three-dimensional crack problems. // *Integ. Equat. and Oper. Theory.* 1987. V. 10. № 4. P. 467–504.
15. *Крауч С., Старфильд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
16. *Канаун С. К., Касаткин К. Г.* Численное решение задачи о трещине в однородной упругой среде. // *Исследование по механике строительных конструкций и материалов.* Л.: ЛИСИ, 1982. С. 5–13.
17. *Линьков А. М., Могилевская С. Г.* Конечночастные интегралы в задаче о пространственных трещинах. // *ПММ.* 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 844–850.
18. *Линьков А. М., Могилевская С. Г.* Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости. // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 116–122.
19. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 734 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
5.V.1991