Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 622.011+539.375

© 1992 г. Ю. Н. Гордеев

ДИСКООБРАЗНАЯ ТРЕЩИНА ГИДРОРАЗРЫВА В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о дискообразной трещине гидроразрыва [1] в насыщенной жидкостью пороупругой среде. Трещина расклинивается потоком вязкой фильтрующейся в пласт жидкостью разрыва. Напряженное состояние и деформации пороупругой среды описываются уравнениями Био [2]. Методами теории обобщенных аналитических функций [3] получено решение пространственной осесимметричной задачи о дискообразной трещине гидроразрыва в пороупругой среде. В отличие от упругой среды раскрытие трещины в пороупругой среде определяется не только давлением жидкости разрыва на ее берегах, но и распределением скорости утечек жидкости в пласт. Для стационарной «идеальной» трещины, давление вдоль которой постоянно, получено аналитическое решение.

Ранее рассматривались [4–6] плоские задачи теории пороупругих сред. Получено [5] представление общего решения уравнений теории в форме Попковича – Нейбера; эти результаты были обобщены [6] на слабо сжимаемые жидкости. Был развит также [4] другой подход к получению представления общего решения плоских задач через две аналитические функции. Рассматривались [7–11] применения теории пороупругих сред к решению задач гидроразрыва насыщенного жидкостью пласта: стационарные задачи [7, 8], плоская нестационарная задача [9], задачи о трещинах Перкинса – Керна в пороупругих средах [10, 11].

1. Постановка задачи. Пусть осесимметричная трещина в бесконечном насыщенном жидкостью пористом пространстве и однородном сжимающем поле напряжений σ_∞ поддерживается в раскрытом состоянии нагнетаемой в нее жидкостью, которая, двигаясь вдоль трещины, может фильтроваться через ее стенки в пористое пространство. Предполагается, что радиус скважины r_0 много меньше длины трещины ($L \ll r_0$), поэтому эффектами, связанными с наличием скважины, можно пренебречь.

Эта задача возникает, в частности, в связи с проблемой гидравлического разрыва нефтеносного пласта [1].

Для описания осесимметричной деформации насыщенной жидкостью пористой среды и фильтрации в ней жидкости используются уравнения связанной консолидации [2] в цилиндрической системе координат (i, j, $k=r$, φ, z; по повторяющимся индексам производится суммирование)

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rr}+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{rz}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rz}+\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}=2G\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right)-2\eta\frac{1-\nu}{1-2\nu}p\delta_{ij} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}m+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho_0 u)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 v)=0,\qquad \eta=\frac{3(\nu_u-\nu)}{2B(1-\nu)(1+\nu_u)} \tag{1.3}$$

$$m-m_0=\frac{\rho_0(1-\nu)}{G(1+\nu)}\eta\left(\sigma_{kk}+\frac{3}{B}p\right),\quad u=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}p,\quad v=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}p$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial w_1}{\partial r},\quad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{w_1}{r},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w_2}{\partial z},\quad \varepsilon_{r\varphi}=\varepsilon_{z\varphi}=0$$

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{\partial w_2}{\partial r}\right)$$

Здесь σ_{ij} — тензор суммарных напряжений, p — поровое давление; B — параметр Скэмптона, ν — коэффициент Пуассона, ν_u — коэффициент Пуассона, соответствующий условиям, когда жидкость не может уйти из среды [2], G — модуль сдвига, ε_{ij} — тензор деформаций, w_1 — радиальное смещение, w_2 — смещение в направлении оси симметрии задачи, m, m_0 — масса поровой жидкости на единицу объема в деформированном и недеформированном состоянии соответственно, ρ_0 — плотность жидкости, k — коэффициент проницаемости, μ — вязкость жидкости, u, v — компоненты скорости фильтрации в радиальном направлении и в направлении оси симметрии. Используется система обозначений упругих констант, предложенная ранее [4].

Уравнения (1.1), (1.2) — уравнения равновесия и закон Гука для насыщенной жидкостью пористой среды. Связь между потоком поровой жидкости и ее массой определяется законом сохранения массы и законом Дарси.

Цилиндрическая система координат выбрана так, чтобы плоскость трещины лежала в координатной плоскости $z=0$.

Для описания движения нагнетаемой жидкости вдоль трещины гидроразрыва используем уравнение непрерывности и закон Пуазейля

$$\frac{\partial}{\partial t}w+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rwu_c)=-2v_L,\qquad u_c=-\frac{w^2}{12\mu}\frac{\partial}{\partial r}p_c \tag{1.4}$$

Здесь w — раскрытие берегов трещины, p_c — давление нагнетаемой в трещину жидкости, u_c — радиальная скорость движения жидкости вдоль трещины, v_L — скорость утечек жидкости через стенки трещины в пористую среду.

На берегах трещины ставятся граничные условия

$$p_c(r,t)=p(r,z=0,t),\quad v_L(r,t)=\pm v(r,z=\pm 0,t) \tag{1.5}$$

2. Метод решения. Для решения осесимметричной упругой задачи воспользуемся теорией обобщенных аналитических функций [3]. Введем комплексные переменные и производные по этим переменным

$$t=z+ir,\ \bar t=z-ir,\ \partial/\partial t={}^1/_2(\partial/\partial z-i\partial/\partial r),\ \partial/\partial\bar t={}^1/_2(\partial/\partial z+i\partial/\partial r)$$

Тогда уравнения (1.1), (1.2) могут быть преобразованы к виду

$$2\frac{\partial}{\partial t}F_*-\frac{F_*-\bar F_*}{t-\bar t}=2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial t}(\eta p) \tag{2.1}$$

$$F_*(t,\bar t)=2G\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\theta+i\omega\right],\qquad \theta=\frac{\partial}{\partial r}u+\frac{u}{r}+\frac{\partial}{\partial z}w,$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} u - \frac{\partial}{\partial r} w\right)$$

Интегрируя уравнение (2.1), получим

$$F_*(t, \bar t) = \Phi_*(t, \bar t) + 2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\eta p \tag{2.2}$$

где $\Phi_*(t, \bar t)$ — обобщенная аналитическая функция, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению: $2\partial\Phi_*/\partial\bar t - (\Phi_* - \bar\Phi_*)/(\bar t - t) = 0$ [3].

Из (2.1) и (2.2) получим уравнение относительно функции $F(t, \bar t) = 2G(w - iu)$

$$2\frac{\partial}{\partial \bar t} F - \frac{F - \bar F}{t - \bar t} = \frac{\varkappa}{2(1-\nu)}\bar\Phi_* - \frac{1}{2(1-\nu)}\Phi_* + 2\eta p \tag{2.3}$$

Предполагая, что $p(r, z)$ — аналитическая функция по переменным r, z, проинтегрируем уравнение (2.3)

$$F(t, \bar t) = \varkappa\bar\Phi(t, \bar t) - 2z\frac{\partial}{\partial z}\Phi - \Psi + \eta\int d\bar t\, p(t, \bar t) \tag{2.4}$$

где Ψ — произвольная обобщенная аналитическая функция, Φ — обобщенная аналитическая функция, связанная с Φ_* соотношением:

$$\Phi_* = 2(1-\nu)\partial\Phi(t, \bar t)/\partial z = 2(1-\nu)\Phi'$$

Используя выражение (2.4) и закон Гука, получим представления полей напряжений и смещений насыщенной жидкостью пористой среды через две обобщенные аналитические функции

$$2G(\bar w - iu) - \eta\int d\bar t\, p(t, \bar t) = \varkappa\bar\Phi(t, \bar t) - 2z\Phi' - \Psi \tag{2.5}$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi} + 4\eta p = 4(1+\nu)\operatorname{Re}\Phi' \tag{2.6}$$

$$\sigma_{zz} - i\sigma_{rz} + \eta p - \eta\int d\bar t\, \partial p(t, \bar t)/\partial t = \bar\Phi' - 2z\Phi'' - \Psi' \tag{2.7}$$

Производная от обобщенной функции $\Phi' = \partial\Phi(t, \bar t)/\partial z$ может быть также записана в виде $\Phi' = -i\partial(\operatorname{Re}\Phi)/\partial r + r^{-1}\partial(r\operatorname{Im}\Phi)/\partial r$ [3], поэтому выражение (2.5) после дифференцирования можно преобразовать в следующее:

$$2G(r^{-1}\partial(ru)/\partial r + i\partial w/\partial r) - \eta p + \eta\int d\bar t\, \partial p(t, \bar t)/\partial t = \varkappa\bar\Phi' + 2z\Phi'' + \Psi' \tag{2.8}$$

Для перехода от обобщенных аналитических функций Φ, Ψ к обычным аналитическим функциям используем интегральные операторы S и S^{-1} [3]

$$S\varphi = -\frac{1}{\pi|t - \bar t|}\int_{\bar t}^{t} \varphi(\sigma) M(\sigma, t)\, d\sigma;$$

$$S^{-1}\Phi = \frac{1}{2}\frac{d}{d\zeta}\int_{\bar\zeta}^{\zeta} h(\tau, \zeta) M(\zeta, \tau)\Phi(\tau)\, d\tau \tag{2.9}$$

$$(h(\tau, \zeta) = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}\tau, \operatorname{Im}\zeta), \quad M(\sigma, t) = \sqrt{(\sigma - \bar t)/(\sigma - t)})$$

причем $S^{-1}S\varphi=\varphi$, $SS^{-1}\Phi=\Phi$; если Φ — обобщенная аналитическая функция, то $S^{-1}\Phi=\varphi$ — обычная аналитическая функция.

Подействовав на выражения (2.7), (2.8) оператором S^{-1}, после преобразований получим

$$S^{-1}\left[\sigma_{zz}-i\sigma_{rz}+\eta p-\eta\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p(t,\tau)}{\partial t}dt\right]=\varphi'(\xi)+2(\xi-\bar{\xi})\overline{\varphi''(\xi)}+\psi'(\bar{\xi}) \tag{2.10}$$

$$S^{-1}\left[2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+i\frac{\partial}{\partial r}w\right)-\eta p+\eta\int_{t_0}^{\tau}\frac{\partial p(t,\tau)}{\partial t}d\tau\right]=$$
$$=\varkappa\varphi'(\xi)-2(\xi-\bar{\xi})\overline{\varphi''(\xi)}-\psi'(\bar{\xi}) \tag{2.11}$$

где φ, ψ — обычные аналитические функции комплексного переменного $\xi=x+iy$ $(y=z)$.

Сформулируем для аналитических функций φ, ψ смешанную краевую задачу. При этом используем принцип суперпозиции, т. е. будем представлять поля напряжений и смещений в виде суммы двух полей, одно из которых соответствует сплошному телу под действием нагрузок, приложенных внутри тела (σ_∞ — однородное сжимающее напряжение, p_∞ — невозмущенное давление поровой жидкости), второе — телу с разрезом, к поверхностям которого приложены нагрузки.

Скорость утечки жидкости из трещины в пласт равна

$$v_L\pm=\pm v=\mp\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}p(z=0\pm 0,r) \tag{2.12}$$

Оператор S^{-1} ставит в соответствие пространственному осесимметричному деформируемому состоянию (z, r) плоское состояние, симметричное относительно оси $x=0$ $(y=z,\ r\to x)$. Приняв во внимание, что значения радикалов, входящих в оператор S^{-1}, на разных берегах разреза различаются знаком, и положив $t_0=0$, для удовлетворения условиям симметрии (относительно оси $x=0$) из (2.10) получим граничные значения аналитических функций φ', ψ' $(y=z=0\pm 0)$

$$\pm R-iT=\varphi'^{\pm}(x)+\psi'^{\pm}(x) \tag{2.13}$$

$$R=S_0^{-1}\Sigma,\quad T=\left(\frac{\eta\mu}{2k}\right)S_1^{-1}\int_0^r v\,ds,\quad S_k^{-1}Q=\operatorname{sign}(x)\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{x^k r^{1-k}Q(r)\,dr}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\Sigma(r)=p(r)-\sigma_\infty-\eta(p(r)-p_\infty)-{}^1/_2\eta(p(r)-p(0))$$

Решение краевой задачи (2.13) известно [12]. При учете нулевых условий на бесконечности, условий симметрии относительно осей $x=0$ и $y=0$ это решение может быть записано в виде

$$\varphi'(\xi)-\psi'(\xi)=\frac{1}{i\pi}\int_{-l}^{l}\frac{R(x)\,dx}{x-\xi}+\frac{1}{i}\frac{A\xi}{(l^2-\xi^2)}$$
$$\varphi'(\xi)+\psi'(\xi)=\frac{1}{\pi\sqrt{\xi^2-l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{x^2-l^2}\,T(x)\,dx}{x-\xi}\quad(\xi=x+iy) \tag{2.14}$$

Наличие второго слагаемого в первом выражении (2.14) связано с тем, что функция R не определена в вершинах разреза $x=\pm l$ (они исключены из рассмотрения при получении формул (2.13)), поэтому у искомой функции $\varphi'-\psi'$ следует допустить наличие полюсов в указанных точках, порядок которых определяется порядком особенностей в окрестности этих точек. В данном случае порядок полюсов продиктован корневой особенностью тензора напряжений при $x\to\pm l$.

Учитывая свойства оператора S, из (2.11), (2.14) при $y=z=0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}w=\frac{\varkappa+1}{4G}\left\{-\int_0^r v\,ds+\frac{2}{\pi r}\int_0^r\frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{dx}{x-y}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{s\,ds}{\sqrt{x^2-s^2}}\Sigma(s)+\frac{Ay}{l^2-y^2}\right]\right\} \tag{2.15}$$

Интегрируя соотношение (2.15) по r при учете граничных условий на берегах трещины и особенностей в окрестностях ее вершин, после упрощения получим

$$w=\frac{\varkappa+1}{4G}\left\{\frac{2}{\pi}\int_r^l\int_0^x\frac{\Sigma(s)\,s\,dx\,ds}{\sqrt{x^2-r^2}\sqrt{x^2-s^2}}+W_v\right\} \tag{2.16}$$

$$W_v=-\frac{\eta\mu}{2k}\int_r^l d\rho\int_0^\rho v(s)\,ds=\frac{\eta\mu}{2k}\left[(l-r)\int_0^l v\,ds+\int_r^l v(r-s)\,ds\right]$$

$$A=-\frac{2}{\pi}\int_0^l s\Sigma(s)(l^2-s^2)^{-1/2}\,ds \tag{2.17}$$

Если использовать критерий разрушения [13], то постоянная A также может быть выражена через модуль сцепления горной породы K_l:

$$A=-\pi^{-1}K_l\sqrt{l/2}$$

Из уравнений (2.6), (1.3) получим уравнение, характеризующее перенос поровой жидкости в пласте:

$$\frac{\partial}{\partial t}p=c\Delta p-\omega\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{Re}\,\Phi')\left(\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{2.18}$$

$$c=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{kGB}{\mu\eta(3-4\eta B)},\quad \omega=\frac{4(1+\nu)B}{3-4\eta B}$$

$$\mathrm{Re}\,\Phi'=\mathrm{Re}\,S\overline{\varphi'(\xi)}=-\frac{1}{\pi^2}\int_0^l \tau K(y,r;\tau)\Sigma(\tau)\,d\tau+\frac{\eta\mu}{2\pi^2 k}\times$$

$$\times\int_0^l L(y,r;\rho)v(\rho)\rho\,d\rho$$

$$K(y,r;\tau)=\int_\tau^l\int_0^r\frac{d\zeta\,ds}{\sqrt{\zeta^2-r^2}\sqrt{r^2-s^2}}\frac{d}{d\zeta}\mathrm{Im}\left[\frac{-2\zeta}{\zeta^2-\zeta^2}\right]$$

$$L(y,r;\rho)=-\rho\int\limits_{\rho}^{l}\int\limits_{0}^{r}\frac{\sqrt{l^2-\zeta^2}\,d\zeta\,ds}{\sqrt{\zeta^2-\rho^2}\sqrt{r^2-s^2}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{-2}{\sqrt{l^2-\xi^2}(\xi^2-\zeta^2)}\right]$$
$$(\xi=s+iy)$$

3. Стационарная задача. Рассмотрим стационарную задачу гидроразрыва пористой насыщенной жидкостью среды осесимметричной неподвижной трещиной l=const. В этом случае уравнение пьезопроводности (2.18) сводится к уравнению Лапласа для давления поровой жидкости

$$\Delta p=0 \tag{3.1}$$

В выражение для раскрытия трещины гидроразрыва кроме распределения давления на ее берегах $p_0(r)$ входит скорость утечек жидкости в пласт $v(r)$. Распределение скорости утечек $v(r)$ на берегах трещины может быть найдено в результате решения уравнения Лапласа (3.1) с заданным давлением $p_0(r)$.

В силу симметрии задачи относительно плоскости $y=0$ сформулируем краевую задачу для уравнения Лапласа (3.1) в верхней полуплоскости $y>0$:

$$\begin{gathered}p(r,\ z=0)-p_\infty=p_0(r)-p_\infty,\ r<l;\ \partial p(r,\ z=0)/\partial r=0,\ r>l\\ p(r,\ z\to\infty)-p_\infty=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

Краевая задача (3.1), (3.2) в цилиндрической системе координат $(r,\ z)$ может быть решена методом парных интегральных уравнений [14]

$$p(r,z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\int\limits_0^l dt\cos\lambda t\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{ds\,s\,(p_0(s)-p_\infty)}{\sqrt{t^2-s^2}} \tag{3.3}$$

Учитывая, что $v(r)=-(k/\mu)\partial p(r<l,\ z=0)/\partial z$, из (2.16), (3.3) найдем вклад в раскрытие трещины утечек жидкости в пласт

$$\begin{aligned}Wv=-\frac{\eta\mu}{2k}\int\limits_r^l d\rho\int\limits_0^\rho v(s)\,ds=\frac{\eta}{\pi}\Bigg[\frac{1}{l}\sqrt{l^2-r^2}\int\limits_0^l\frac{s\,(p_0(s)-p_\infty)\,ds}{\sqrt{l^2-s^2}}-\\ -\int\limits_0^r ds\,s\,(p_0(s)-p_\infty)\int\limits_r^l\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-s^2}}G(\rho,r)-\\ -\int\limits_r^l ds\,s\,(p_0(s)-p_\infty)\int\limits_s^l\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-s^2}}G(\rho,r)\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$G(\rho,r)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sqrt{\rho^2-r^2}}{\rho}\right)$$

В общем случае распределение давления жидкости в трещине находится из решения системы уравнений (1.4).

Рассмотрим частный случай трещины гидроразрыва с высокой гидравлической проводимостью. Распределение давления в такой трещине приближенно можно считать постоянным вдоль ее берегов.

$$p_0(r)=p_0=\text{const} \tag{3.5}$$

Подставив выражение (3.5) в (3.4), получим

$$W_v = -\frac{\eta(p_0-p_\infty)l}{\pi}\left[\frac{r}{l}\arccos\left(\frac{r}{l}\right)-\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}\right] \tag{3.6}$$

Полное раскрытие трещины гидроразрыва найдем из уравнения (2.16) при учете соотношений (3.5), (3.6). Получим

$$w(r)=\frac{\varkappa+1}{2\pi G}l\left\{(p_0-\sigma_\infty)\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}-\eta(p_0-p_\infty)\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}-\frac{W_v}{l}\right\} \tag{3.7}$$

В выражении (3.7) первое слагаемое соответствует чисто упругому решению. Второе слагаемое связано с тем, что в пороупругой среде нагрузка передается как жидкой, так и твердой фазам, имеющим разные модули сжимаемости. При $p_0>p_\infty$ это слагаемое приводит к уменьшению раскрытия трещины по сравнению с упругим решением. И, наконец, третье слагаемое обусловлено эффектами набухания пороупругой среды при фильтрации жидкости из трещины в среду ($v>0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Желтов Ю. П., Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 5. С. 3–41.
2. *Biot M. A.* General theory of three dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. V. 12. № 2. P. 155–165.
3. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости: применение методов теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1978. 462 с.
4. *Rice J. R., Cleary M. P.* Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Rev. Geophys. and Space Phys. 1976. V. 14. № 2. P. 227–241.
5. *McNamee J., Gibson R. E.* Diplacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1960. V. 13. № 1. P. 98–111.
6. *Керчман В. И.* Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 1. С. 45–54.
7. *Зазовский А. Ф., Панько С. В.* О локальной структуре решения связанной задачи о трещине гидроразрыва в проницаемой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 5. С. 153–158.
8. *Зазовский А. Ф.* Развитие дискообразной трещины гидроразрыва в мощном, насыщенном жидкостью пласте // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 5. С. 169–178.
9. *Гордеев Ю. Н.* Нестационарная задача о плоской трещине гидроразрыва в насыщенном жидкостью пласте // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 100–108.
10. *Boone T. J., Detournay E.* Response of a vertical hydraulic fracture intersecting a poroelastic formation bounded by semi-infinite impermeable elastic layer // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. and Geomecyh. Abstr. 1990. V. 27. P. 189–197.
11. *Detournay E., Ceng A. H.-D., McLennan T. D.* A poroelastic PRK hydraulic fracture model based on an explicit moving algorithm // ASME J. of Energy Resources Technology. 1990. V. 112. No. 4. P. 224–230.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
13. *Баренблатт Г. И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
14. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.VI.1991