Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 532.58

© 1992 г. В. А. Городцов

ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ АСИМПТОТИКА СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛ В ВОЛНОВОДНОМ СЛОЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Дается анализ асимптотической зависимости волнового сопротивления тел, быстро горизонтально движущихся в волноводе с произвольно стратифицированной жидкостью. Для волновода конечной глубины установлена обратная пропорциональность сопротивления квадрату скорости и прямая пропорциональность квадрату объема для малых тел. Общие результаты уточнены для однородной стратификации и резко выраженного переходного слоя.

При движении тел в стратифицированной по плотности жидкости происходит возбуждение внутренних волн, распространение возмущений внутри жидкости. В силу этого даже в пренебрежении вязким сопротивлением (приближении идеальной жидкости) тело будет испытывать волновое сопротивление. Для его вычисления удобно заменить граничную задачу обтекания тела задачей о движении массовых или силовых источников, эквивалентных телу по своему гидродинамическому воздействию на жидкость. Например, это могут быть массовые дипольные источники, которые распределены по поверхности обтекаемого тела и отыскиваются как решения граничных интегральных уравнений. Использование моделирующих распределений источников особенно удобно тем, что позволяет сделать ряд общих заключений и без решения достаточно трудоемких задач о конкретном виде распределений источников.

Асимптотический характер зависимости волнового сопротивления от скорости быстро движущихся тел удается установить для жидкости с достаточно произвольной стратификацией без большой детализации эквивалентных им распределений источников. Относительно последних делаются лишь самые общие предположения типа суммарной компенсации источников и стоков в направлении движения, соизмеримости характерных масштабов тел и соответствующих распределений источников, и малости размеров тел по сравнению с глубиной волновода.

1. Волновое сопротивление для горизонтального волновода с произвольной стратификацией. Малые возмущения гидродинамических характеристик от равномерно горизонтально движущихся массовых источников $m(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t,\ z)$, рассмотрением которых ограничимся в дальнейшем, в линейном приближении пропорциональны этим источникам. Из уравнений баланса массы и количества движения неоднородной, расслоенной по плотности жидкости, находящейся в поле тяжести, для вертикальной компоненты скорости возмущения w следует

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2(z)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right\}w=\frac{\partial^3 m}{\partial t^2\partial z}$$

$$N^2(z)\equiv gd\ln\rho/dz$$

Здесь использовано традиционное приближение Буссинеска, согласно которому пренебрегается влиянием изменений плотности на инерцию, $N(z)$ — частота плавучести, квадрат которой пропорционален исходному градиенту плотности, зависящему только от вертикальной координаты z, $\mathbf{r}=(x, y)$ — горизонтальный координатный вектор.

Для представления решения этого дифференциального уравнения удобно пользоваться разложением в интеграл Фурье по горизонтальным переменным и времени и ряд по полной системе собственных функций, зависящих от вертикальной координаты,

$$w=\sum_n \int d^2k\, d\omega w_n(\mathbf{k}, z)\, \Phi_n(\mathbf{k}, \omega)\, e^{i\mathbf{kr}-i\omega t} \tag{1.1}$$

$$\Phi_n=\frac{1}{4\pi^2}\frac{\omega^2 c_n^2 k^2}{(\omega+i\varepsilon)^2-c_n^2k^2}\delta(\omega-\mathbf{kv}_0)\int_{h_1}^{h_2} dzm(\mathbf{k}, z)\frac{\partial w_n(k, z)}{\partial z}$$

Здесь $\mathbf{k}=(k_x, k_y)$ — волновой вектор, $k=|\mathbf{k}|$, $m(\mathbf{k}, z)$ — компонент Фурье массового источника $m(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0 t, z)$, зависимости которого от разностного аргумента $\mathbf{r}-\mathbf{v}_0 t$ обязано появление в разложении дельта-функции $\delta(\omega-\mathbf{kv}_0)$. Обозначение $+i\varepsilon$ указывает на малый сдвиг полюсов с вещественной оси частот.

Пространственно неоднородная (по вертикали) стратификация имеет волноводные свойства. Соответствующие собственные функции $w_n(k, z)$ и собственные значения $c_n=c_n(k)$ определяются решением спектральной задачи

$$(\partial^2/\partial z^2-k^2+c_n^{-2}N^2(z))\,w_n=0, \qquad w_n|_{z=h_1}=w|_{z=h_2}=0 \tag{1.2}$$

Спектр волновых мод дискретный, если волновод образован твердыми горизонтальными границами, расположенными на конечных глубинах $z=h_1$ и $z=h_2$, или исчезающей на больших глубинах стратификацией ($N^2\to 0$ при $z\to h_{1,2}=\pm\infty$) в случае безграничной жидкости [1]. Далее рассматриваются только подобные ситуации.

Возмущения давления p можно выразить через вертикальный компонент скорости и записать в аналогичном (1.1) виде

$$p=\sum_n \int d^2k d\omega P_n(\omega, \mathbf{k}, z)\, e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$$

$$P_n=\frac{i\omega\rho}{k^2}\left\{\frac{\partial w_n(k, z)}{\partial z}\Phi_n-\frac{1}{(2\pi)^2}m(\mathbf{k}, z)\,\delta(\omega-\mathbf{kv}_0)\right\} \tag{1.3}$$

В линейной задаче квадратичные по возмущениям энергетические характеристики типа волнового сопротивления становятся квадратичными формами распределений источников. Для равномерно движущегося распределения массовых источников волновое сопротивление R с учетом (1.1), (1.3) можно представить следующей суммой вкладов отдельных волновых мод [2]:

$$R=\frac{1}{v_0}\int d^2r\int_{h_1}^{h_2} dzpm=\sum_n R_n$$

$$R_n=\frac{\rho}{2\pi v_0}\int d^2r\, d^2r'\int_{h_1}^{h_2} dz\, dz' S_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; z, z')\, m(\mathbf{r}, z)\, m(\mathbf{r}', z') \tag{1.4}$$

$$S_n = \int_0^\infty dk \frac{\theta(v_0 - c_n)}{\sqrt{v_0^2 - c_n^2}} k^2 c_n^4 \frac{\partial w_n}{\partial z} \frac{\partial w_n}{\partial z'} \cos \frac{k(x-x')c_n}{v_0} \times$$
$$\times \cos\left(\frac{k(y-y')}{v_0} \sqrt{v_0^2 - c_n^2}\right)$$

Здесь $\theta(v_0 - c_n)$ — единичная функция Хевисайда.

Важными свойствами спектральной задачи для внутренних волн (1.2) являются монотонное падение фазовых скоростей волн $c_n(k)$ с ростом волнового числа k и номера моды n, ограничение возможных частот $\omega_n(k) = kc_n(k) \leqslant N_{max}$, и ограниченность фазовых скоростей всех волн в частном случае волновода конечной глубины [1, 2]. Благодаря им общее выражение для вклада n-й моды в волновое сопротивление R_n легко упростить при больших скоростях движения источников.

При скоростях движения моделируемого тела, превышающих фазовые скорости волн данной моды $v_0 > c_{n0} \equiv \lim_{k\to 0} c_n(k) \geqslant c_n(k)$ (что всегда достижимо в волноводе конечной глубины), функция Хевисайда не дает ограничений на область интегрирования по волновым числам и ее можно опустить. При еще больших ($v_0 \gg c_{n0}$) скоростях $\sqrt{v_0^2 - c_{n0}^2}$ можно заменить на v_0.

Подменяя тела массовыми источниками, естественно требовать суммарную компенсацию всех источников и стоков. Будем полагать подобную компенсацию в направлении движения (что подразумевает некоторую симметрию тела), которое далее считаем совпадающим с направлением оси x

$$\int dx m(\mathbf{r}, z) = 0, \quad D = \int_{h_1}^{h_2} dz D(z) = \int_{h_1}^{h_2} dz \int d^2 r x m(\mathbf{r}, z) \neq 0 \qquad (1.5)$$

Тогда $S_n|_{x=x'}$ не отражается на величине сопротивления согласно (1.4), и взамен $\cos(kc_n(x-x')/v_0)$ можно подставить $\cos(kc_n(x-x')/v_0) - 1$. Предполагая кроме $v_0 \gg c_{n0}$ относительную малость размеров тела ($l_x \ll v_0/N_{max}$, $l_y \ll h_2 - h_1$), еще более упрощаем выражение для вклада n-й моды в волновое сопротивление

$$R_n = \frac{\rho}{2\pi v_0^4} \int_{h_1}^{h_2} dz dz' A_n(z, z') D(z) D(z')$$
$$A_n \approx \int_0^\infty dk k^4 c_n^6 \frac{\partial w_n(k, z)}{\partial z} \frac{\partial w_n(k, z')}{\partial z'} \qquad (1.6)$$

Функция $A_n(z, z')$ определяется исключительно стратификацией, типом волновода, а не характеристиками (в частности, скоростью) источников. Величина вклада в сопротивление R_n может зависеть от скорости, кроме множителя v_0^{-4}, неявным образом через вертикальную плотность дипольных моментов $D(z)$. Однако при больших скоростях в рамках линейного описания малых возмущений можно ожидать близости этой зависимости к линейной $D(z) \approx v_0 \Delta(z)$, присущей однородной жидкости. В итоге асимптотическая зависимость вклада в волновое сопротивление n-й моды от скорости оказывается падающей степенным образом:

$$R_n \sim v_0^{-2}, \qquad v_0 \gg c_{n0},\ N_{\max} l \tag{1.7}$$

Для волновода конечной глубины скорости всех внутренних волн конечны, так что выполнимо неравенство $v_0 \gg c_{10} \geqslant c_n(k)$, и для всех мод можно пользоваться оценкой (1.7). Следовательно, для полного волнового сопротивления, подразумевая суммируемость ряда по модам, можно ожидать асимптотической оценки

$$R \sim F^{-2}, \qquad F \equiv v_0/(N_{\max} l) \gg 1 \tag{1.8}$$

Иная ситуация в случае неограниченной по вертикали жидкости. Кроме волновых мод ($n \geqslant 1$) с ограниченными скоростями волн, имеется одна низшая «нулевая» мода, для которой собственное значение неограниченно растет с уменьшением волнового числа [1]

$$c_0^2(k)|_{k\to 0} \approx \frac{\gamma g}{k} + O(1), \quad \gamma \equiv \frac{\rho(+\infty) - \rho(-\infty)}{\rho(+\infty) + \rho(-\infty)} \tag{1.9}$$

Тем самым оценки (1.6), (1.7) могут применяться лишь в отношении более высоких мод с $n \geqslant 1$. Что касается нулевой моды, то неравенство $v_0 > c_0(k)$ не может быть выполнено для всех волновых чисел и интервал интегрирования в (1.4) по волновым числам для вклада в волновое сопротивление нулевой моды всегда будет зависеть от величины скорости. Поэтому более сложной будет результирующая асимптотическая зависимость от скорости. В общем виде возможны лишь малорезультативные упрощения вида вклада нулевой моды

$$\begin{gathered} R_0 = \frac{\rho}{2\pi v_0^4} \int_{h_1}^{h_2} dz\, dz' A_0(z, z') D(z) D(z') \\ A_0 \approx v_0 \int_0^\infty dk \frac{\theta(v_0 - c_0)}{\sqrt{v_0^2 - c_0^2}} k^4 c_0^6 \frac{\partial w_0(k, z)}{\partial z} \frac{\partial w_0(k, z')}{\partial z'} \end{gathered} \tag{1.10}$$

Уточним далее приведенные общие рассуждения на примерах конкретных стратификаций: однородной стратификации и стратификации с острым максимумом частоты плавучести.

2. Однородно стратифицированная жидкость в волноводе конечной глубины. В случае однородно стратифицированного (с постоянной частотой плавучести N) слоя жидкости глубины h, заключенного между твердыми границами $z = h_1 = 0$ и $z = h_2 = h$, спектральная задача (1.2) имеет простое решение

$$c_n^2 = \frac{N^2 h^2}{k^2 h^2 + \pi^2 n^2}, \quad w_n^2 = \frac{2h}{N^2 k^2 h^2} \sin^2 \frac{\pi n z}{h}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для скоростей всех внутренних волн здесь справедливы простые ограничения $c_n^2 < c_{n0}^2 = N^2 h^2 / (\pi^2 n^2)$. Становится ясно, что условие больших скоростей $v_0 \gg c_{n0}$ подразумевает большую величину числа Фруда для волновода $v_0/(Nh)$. При относительной малости размеров тела ($l \ll h$) это тем более верно в отношение числа Фруда для тела $F \equiv v_0/(Nl) \gg 1$, и формула (1.6) приводится к упрощенному виду

$$R_n \approx \frac{\rho N^4}{16\pi v_0^4 n} \left(\int_0^h dz D(z) \cos \frac{\pi n z}{h} \right)^2 \tag{2.1}$$

Предполагая вертикальный размер тела столь малым, что $l_z \ll h/n$, и горизонт его движения z_0 удаленным от горизонта экстремума собственной функции ($\cos(\pi z_0 n/h) \sim 1$), получим еще более простую оценку вклада n-й моды в волновое сопротивление

$$R_n \approx \frac{\rho N^4 D^2}{16\pi v_0^4 n} \cos^2 \frac{\pi n z_0}{h} \tag{2.2}$$

Следовательно, излучение низших волновых мод при больших скоростях движения тела имеет простой дипольный характер, за исключением «экстремальных» горизонтов. В случае точечного диполя этот результат получается при единственном предположении $v_0 \gg Nh/n$ (без такого условия R_n для диполя выражается через эллиптические интегралы).

Если горизонт движения тела совпадает с горизонтом экстремума моды волновода, то высокоскоростной вклад последней в волновое сопротивление, как следует из (2.1), будет уже определяться некоторым квадрупольным моментом распределения источников

$$R_n \approx \frac{\rho \pi N^4 n}{16 v_0^4 h^2} Q^2, \qquad Q \equiv \int d^2 r \int_{l_1}^{l_2} dz x (z - z_0)\, m(\mathbf{r}, z)$$

Суммирование вкладов всех мод можно выполнить, опираясь на приближенную формулу (2.1). При больших скоростях $v_0 \gg c_{10} = Nh/\pi$ и относительно малых размерах тела ($l \ll h$) для полного волнового сопротивления находим

$$R \approx \frac{\rho N^4}{32\pi v_0^4} \int_{l_1}^{l_2} dz\, dz' D(z)\, D(z') \ln \left| \frac{h}{2\pi (z - z') \sin(\pi z_0/h)} \right|$$

Отсюда, в частности, видно, что просуммированное по всем модам сопротивление логарифмически велико для моделирующих источников, локализованных по вертикали. Причина в преувеличении роли высших мод при таком моделировании тел. Полученная формула подтверждает также общую асимптотическую оценку (1.8).

3. Переходная зона скачка плотности. При хорошо выраженном максимуме стратификации $N(z) = N_m (\operatorname{ch} z/h)^{-1}$ в безграничной жидкости собственные значения имеют простой вид

$$c_n^2 = \frac{N_m^2 h^2}{(kh + n)(kh + n + 1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

а нормированные собственные функции следующим образом выражаются через гипергеометрическую функцию полиномиального типа, полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)$:

$$w_n(k,z) = C_n\left(\operatorname{ch}\frac{z}{h}\right)^{-kh} P_n^{(kh,\,kh)}\left(\operatorname{th}\frac{z}{h}\right)$$
$$C_n^2 = \frac{(2n+1+2kh)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1+2kh)}{2k^2hN_m^2 4^{kh}\Gamma^2(n+1+kh)} \tag{3.2}$$

Из-за отсутствия жестких ограничений по вертикали в этом примере нулевая мода характеризуется сколь угодно быстрыми длинными внутренними волнами

$$c_0^2 = \frac{N_m^2h}{k(1+kh)}, \quad w_0^2 = \frac{|2h\Gamma(2+2kh)|^{1/2}}{2khN_m 2^{kh}\Gamma(1+kh)}\left(\operatorname{ch}\frac{z}{h}\right)^{-kh}$$

и потому необходимость выполнения неравенства $v_0 \geqslant c_0(k)$ (см. (1.4)) исключает излучение длинных внутренних волн нулевой моды с волновыми числами, не удовлетворяющими неравенству

$$kh(1+kh) \geqslant N_m^2h^2/v_0^2 \tag{3.3}$$

Однако при больших скоростях движения ($v_0^2 \gg N_m^2h^2$) сильно заглубленного тела ($z_0 \gg h$, l_z) основной вклад в интеграл для S_0 дают хотя и конечные, но малые волновые числа ($kh \ll 1$). Это позволяет получить для тел малых размеров (l_x, $l_y^2z_0^{-1} \ll v_0^2/(N^2h)$) упрощенные результаты

$$R_0 \approx \frac{\rho\mu^4}{(32\pi\mu z_0)^{1/2}}\left(\int dz D(z)\, e^{-\mu z}\right)^2, \quad \mu \equiv \frac{N_m^2h}{v_0^2} \tag{3.4}$$

$$R_0 \approx \frac{\rho D^2 N_m^7 h^{7/2}}{v_0^7(32\pi z_0)^{1/2}} \exp\left(-\frac{N_m^2hz_0}{v_0^2}\right) \tag{3.5}$$

причем один переходит в другой при $l_z \ll \mu^{-1}$. Экспоненциальность асимптотической зависимости от скорости здесь обязана упомянутому ограничению на волновые числа излучения (3.3).

При достаточно больших скоростях движения тела ($v_0^2 > c_{10}^2 = N_m^2h^2/2$) не будет ограничений на волновые числа излучения остальных мод. Легко тогда устанавливаются асимптотические зависимости от скорости типа (1.6), (1.7). В предположении о большом заглублении тела и его малых размерах ($l_x \lesssim v_0/N_m$, $l_y \ll z_0$) также легко оцениваются зависимости и от других параметров (простота обязана определяющему вкладу бесконечно малых волновых чисел)

$$R_n \approx \frac{3\rho N_m^4D^2}{64\pi v_0^4}\left(1 - \frac{N_m^2h^2}{n(n+1)v_0^2}\right)^{-1/2} \frac{2n+1}{n^3(n+1)^3}\left(\frac{h}{z_0}\right)^5, \quad n \geqslant 1 \tag{3.6}$$

В отличие от предыдущего здесь спадание с глубиной оказывается степенным. Вклады высших мод в волновое сопротивление убывают с ростом номера моды гораздо быстрее, чем в случае однородной стратификации.

С уменьшением толщины переходного стратифицированного слоя ($h \to 0$) при сохранении общего перепада плотности ($N_m^2h = \gamma g = \mathrm{const}$) обостряется градиент плотности, и вклады всех мод, кроме нулевой, быстро убывают ($R_n \sim h^3$).

Рассмотрим отдельно предельную ситуацию.

4. Граница раздела между жидкостями с различными плотностями. В случае вырожденной стратификации с одной поверхностью скачка плотности $z=0$, разделяющей две однородные жидкости с плотностями $\rho(+\infty)$ и $\rho(-\infty)$, возможна лишь поверхностная нулевая мода с фазовыми скоростями волн $c=(\gamma g/k)^{1/2}$ (ср. с (1.9)).

Формула волнового сопротивления распределения источников, движущихся под (знак плюс и $\rho=\rho(+\infty)$) или над (знак минус и $\rho=\rho(-\infty)$) поверхностью скачка, можно тогда записать в общем виде [2]

$$R=\int d^2r\, d^2r' \int_0^\infty dz\, dz' S(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; z, z')\, m(\mathbf{r}, z)\, m(\mathbf{r}', z')$$

$$S(\mathbf{r}; z, 0)=\frac{\rho(1\pm\gamma)\nu^2}{2\pi}\int_0^\infty d\varphi\, \mathrm{ch}^2\varphi \exp(-\nu|z|\,\mathrm{ch}^2\varphi)\times$$
$$\times\cos(\nu x\,\mathrm{ch}\,\varphi)\cos(\nu y\,\mathrm{sh}\,\varphi\,\mathrm{ch}\,\varphi)$$

Для относительно малых распределений источников дипольного типа (1.5) и большого их удаления от поверхности скачка плотности ($l\ll\nu^{-1}\equiv v_0^2/(\gamma g)\ll|z_0|$) отсюда следует высокоскоростная асимптотика

$$R\approx\rho(1\pm\gamma)\nu^4(32\pi\nu|z_0|)^{-1/2}\exp(-2\nu|z_0|)$$

совпадающая с (3.5) при $\mu\to\nu$, $\gamma\ll1$, т. е. в предельной ситуации слабого скачка плотности $h\to0$, $N_m^2h=\gamma g=\mathrm{const}$ (предельный переход с фиксированным перепадом плотности).

Асимптотическое упрощение формулы сопротивления тела, сильно заглубленного под слоем скачка ($\gamma g z_0\gg v_0^2$), можно выполнить, пользуясь менее ограничительным неравенством на его размеры. Если предположить $\gamma g l\leqslant v_0^2$, то небольшое усложнение результата произойдет из-за некоторого учета интерференции излучения от различных участков тела. Для симметричного вытянутого тела получим

$$R\approx\rho(1+\gamma)\nu^2(32\pi\nu z_0)^{-1/2}M^2\exp(-2\nu z_0)$$

$$M=\int d^2r\, dz\, m(\mathbf{r}, z)\sin(\nu x)\exp(-\nu(z-z_0))$$

Ситуация принципиально меняется при учете хотя бы одной границы, расположенной на конечной глубине. Тогда фазовые скорости волн даже нулевой моды становятся ограниченными (максимальная скорость пропорциональна корню из глубины). Например, для двухслойной жидкости с твердой крышкой сверху ($z=-H$) или снизу ($z=+H$) это видно из формулы

$$c^2=\gamma g k^{-1}(1-\exp(-2kH))/(1\mp\gamma\exp(-2kH))$$

В итоге отпадает необходимость в особом рассмотрении нулевой моды, и высокоскоростная асимптотика вкладов в сопротивление всех мод может быть найдена единообразно.

5. Заключение. Таким образом, без решения задач об обтекании конкретных тел стратифицированной жидкостью при больших скоростях (больших числах Фруда) достаточно просто удается найти асимптотический вид зависимости волнового сопротивления от скорости (квадратичного функционала решения от параметра).

При конечной глубине жидкости вклад каждой моды в сопротивление оказывается квадратично падающим с ростом скорости $(R_n \sim v_0^{-2})$ при больших ее величинах, причем этот результат справедлив для произвольной стратификации. Однако характер убывания такого вклада с ростом номера моды чувствителен к типу стратификации и относительным размерам тела.

Для однородно стратифицированной жидкости в волноводе конечной глубины и распределений источников, локализованных в вертикальном направлении, убывание вкладов с ростом номера моды оказывается столь медленным $(R_n \sim n^{-1})$, что суммарное сопротивление становится аномально большим (ряд по модам логарифмически расходится). Это находится в прямом соответствии с бесконечностью волнового сопротивления вертикально локализованных источников, движущихся в безграничной однородно стратифицированной жидкости [3]. Как здесь, так и там возникновение парадокса указывает на преувеличение вклада поперечных волн при моделировании трехмерных тел локализованными источниками.

Более резкой зависимость от номера моды становится при сильно выраженной неоднородности стратификации. Как видно из вышеизложенного, при большом удалении малого тела от области максимальной стратификации вклады высших мод в волновое сопротивление оказываются пренебрежимо малыми для любых источников (см. (3.6)).

Наконец, следует подчеркнуть ту особенность высокоскоростной асимптотики, что волновое сопротивление малых тел оказывается зависящим только от такой общей характеристики, как полный дипольный момент моделирующих источников, пропорциональный объему тела. Исключения связаны со случаями движения на уровнях экстремумов собственных функций волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Case K. M.* Some properties of internal waves. // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 1. P. 18–29.
2. *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* К теории волнового сопротивления (поверхностные и внутренние волны) // Кочин Н. Е. и развитие механики. М.: Наука, 1984. С. 131–149.
3. *Городцов В. А.* Излучение внутренних волн быстро движущимися источниками в экспоненциально стратифицированной жидкости. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 6. С. 1375–1378.

Москва

Поступила в редакцию
7.II.1991